

La Funzione di Utilità

(Appendice cap. 3)

Il concetto di Utilità

- Il livello di **utilità** è rappresentato da un valore numerico che “quantifica” il benessere relativo del consumatore in relazione al consumo di un paniere
- Date le preferenze dei consumatori, la cosiddetta **funzione di utilità** associa ad ogni paniere un numero – livello di utilità – tale che a panieri preferiti siano assegnati numeri più elevati.

$$U = f(x_1; x_2)$$

- Esempio:

$$U = x_1 \cdot x_2$$

Funzione di Utilità

- Tale funzione permette di stabilire un ORDINE fra i panieri, qualsiasi sia il numero di beni considerati nel paniere. È definita per ogni paniere (completezza)
 - ✓ Assegna valori più alti ai panieri con più beni (non sazietà) che si collocano su curve di indifferenza più lontane dall'origine
 - ✓ Assegna lo stesso valore ai panieri sulla medesima curva di indifferenza

Funzione di Utilità

$$D \succ A \succ C$$

Es:

$$U(D)=10; U(A)=6; U(C)=4$$

$$B \sim C$$

Es:

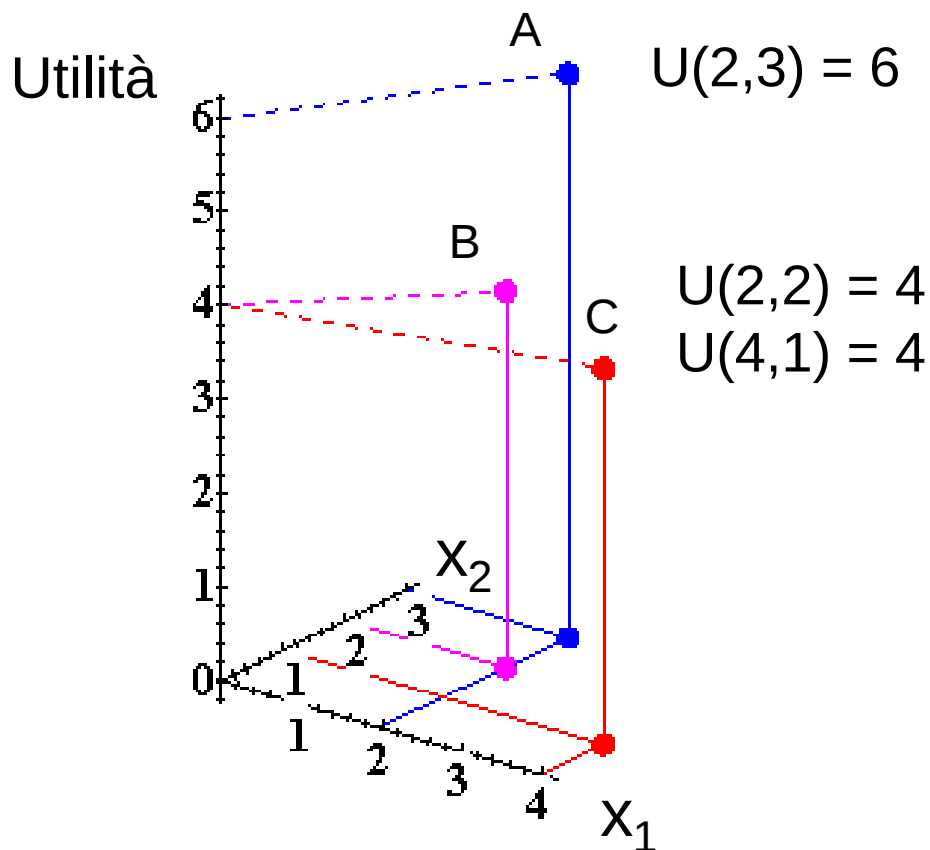
$$U(B)=4; U(C)=4$$

Uguale Preferenza $\Rightarrow$ stesso livello di utilità

A tutti i panieri su una curva di indifferenza è associato lo stesso livello di utilità

Deduzione delle curve di indifferenza da una funzione di utilità

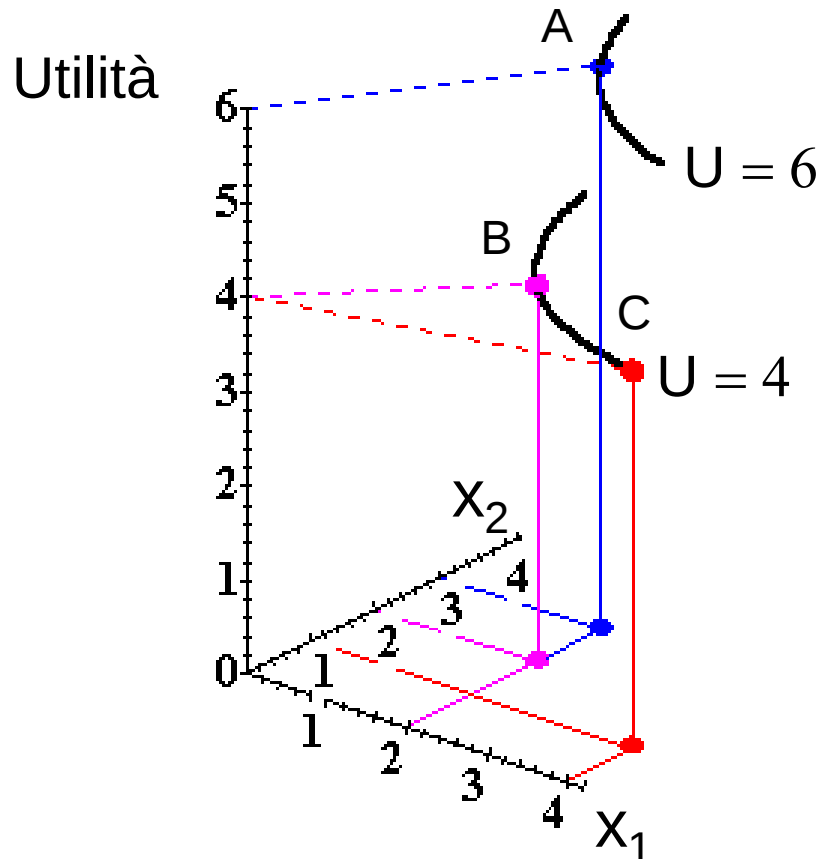
Se si conosce la funzione di utilità, è possibile ricostruire le curve di indifferenza



Deduzione delle curve di indifferenza da una funzione di utilità

La curva di indifferenza passante per A è costituita da tutti i panieri per i quali il livello di utilità è lo stesso.

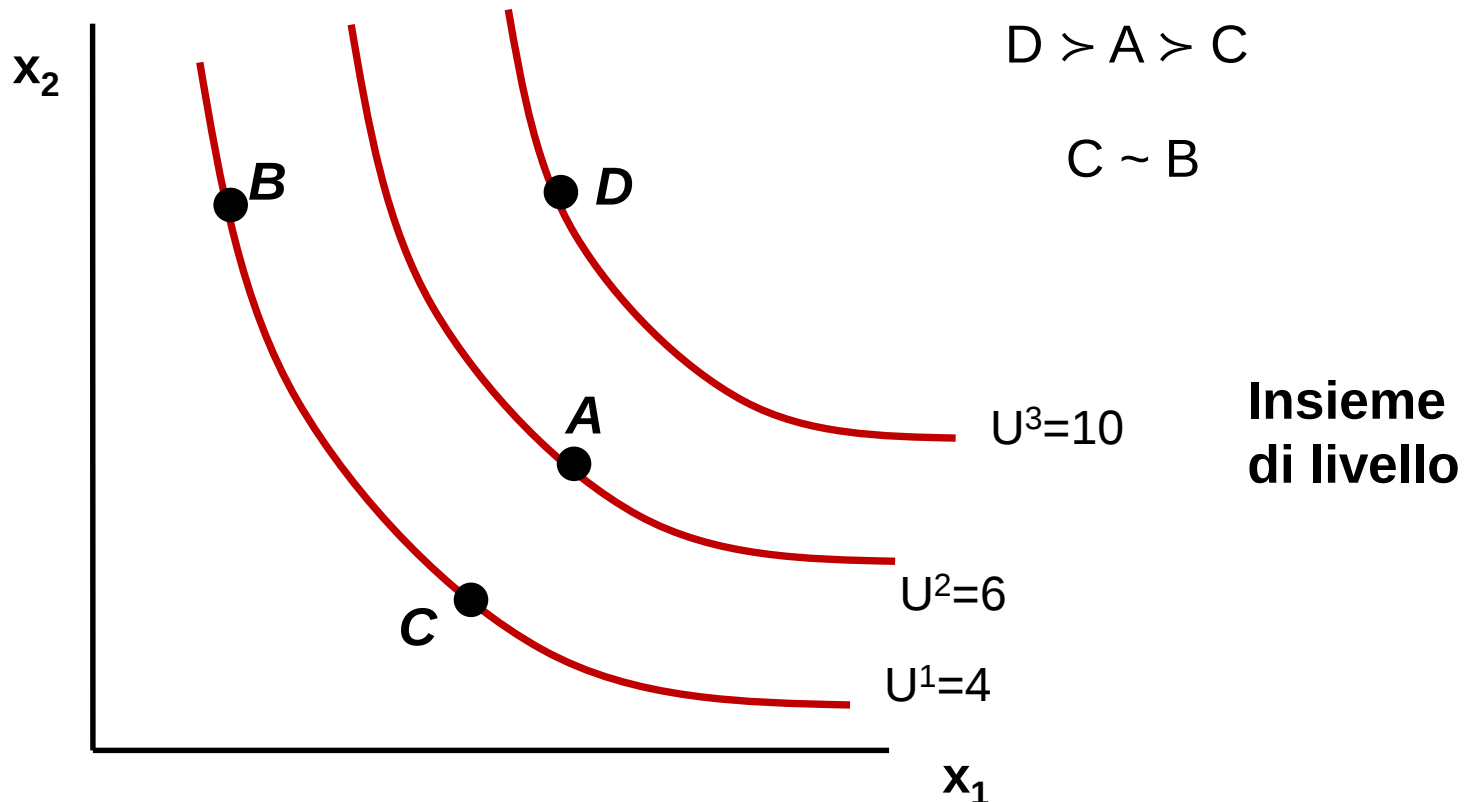
Curve di indifferenza più alte → maggiore utilità



Funzione di Utilità e Curve di Indifferenza

In un piano a due dimensioni (x_1, x_2):

- Le curve di indifferenza permettono di rappresentare graficamente la funzione di utilità
- Le curve di indifferenza sono linee di livello associate ai diversi valori che può assumere l'utilità



Formalmente

- L'utilità è una funzione di due variabili reali che associa uno ed un solo valore u ad ogni coppia (x_1, x_2) in $R^+ \times R^+$ (dove R^+ include 0)

$$U : (x_1, x_2) \in R^+ \times R^+ \rightarrow u \in R$$

- La funzione di utilità definisce implicitamente la famiglia di curve di indifferenza corrispondenti:
 - ❖ Data $U(x_1, x_2)$, la curva d'indifferenza corrispondente al livello di utilità u_0 è la funzione $x_2 = g(x_1)$ tale per cui:

$$U(x_1, g(x_1)) = u_0$$

Funzione di Utilità: Esempio

Algebricamente:

- Data la funzione di utilità

$$U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

- La corrispondente famiglia di curve di indifferenza

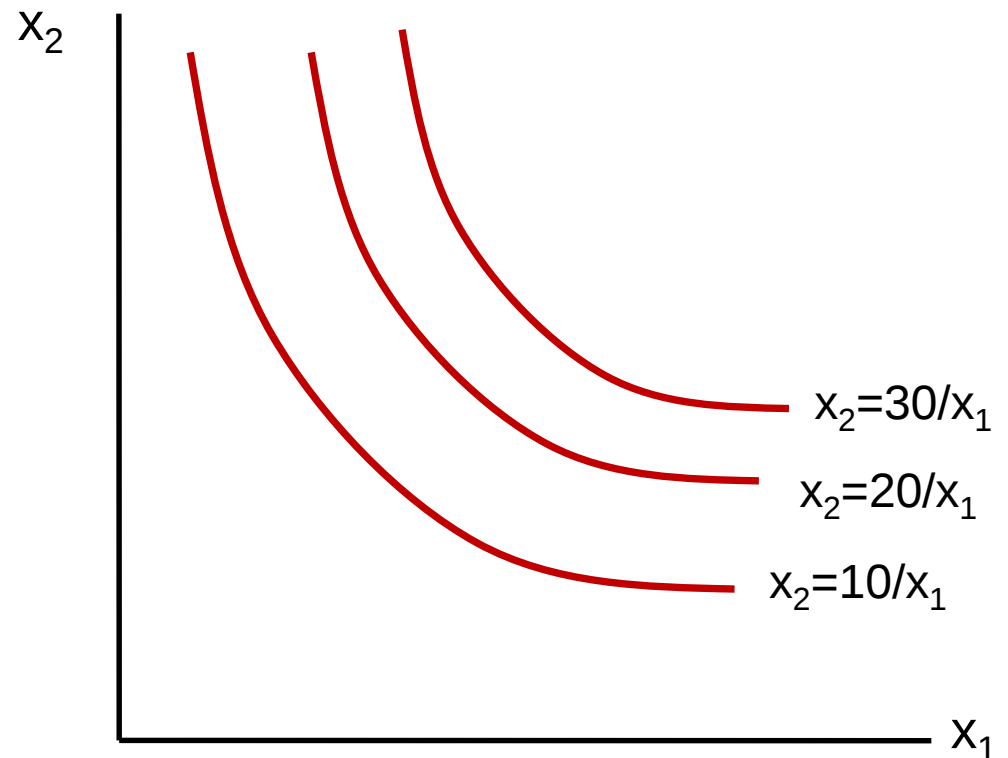
$$u_0 = x_1 \cdot x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{u_0}{x_1}$$

Dato un certo valore per u_0 , esplicitiamo x_2 in funzione di x_1

Famiglia di Curve di Indifferenza e Utilità

Famiglia di curve di indifferenza è $x_2 = \frac{u_0}{x_1}$

u_0 è il benessere o “utilità”



Utilità Ordinale

- **Le funzioni di utilità sono volte a riassumere le informazioni ordinali (benessere relativo, non assoluto) non cardinali**
- Forniscono informazioni ordinali: stabiliscono se un'alternativa sia migliore o peggiore dell'altra (non l'intensità della preferenza)

Se $U(X) = 6$ e $U(Y) = 2$ ➔ $X \succ Y$

Utilità Ordinale

- La scala scelta per la funzione di utilità è arbitraria e non modifica le preferenze

$$U^1(x_1, x_2) = x_1 x_2; \quad U^2(x_1, x_2) = 2x_1 x_2$$

Consideriamo 3 panieri:

A=(4,6)

B=(3,6)

C=(9,2)

$U^1(A)=24$; $U^1(B)=18$; $U^1(C)=18$

$U^2(A)=48$; $U^2(B)=36$; $U^2(C)=36$

In entrambi i casi:

$$A \succ B \sim C$$

Utilità Ordinale

- Per ogni valore di U , le due funzioni generano DIVERSE curve di indifferenza
- Tuttavia, esiste una relazione biunivoca tra le due funzioni:

$$2U^1(x_1, x_2) = U^2(x_1, x_2)$$

➔ le due funzioni di utilità rappresentano le STESSE preferenze

Stesso ordinamento ➔ Stesse Preferenze

Una funzione $U^2 = g(U^1)$ che è una trasformazione monotona della funzione U^1 ne rappresenta le stesse preferenze.

Beni, Mali, Beni Neutrali e Utilità

- BENI: il consumo dei beni aumenta l'utilità
- MALI: il consumo di mali riduce l'utilità
- BENI NEUTRALI: il consumo di beni neutrali non determina nessuna variazione dell'utilità

Funzione di Utilità Cobb-Douglas

- Una forma funzionale molto usata è chiamata Cobb-Douglas:

$$U(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$$

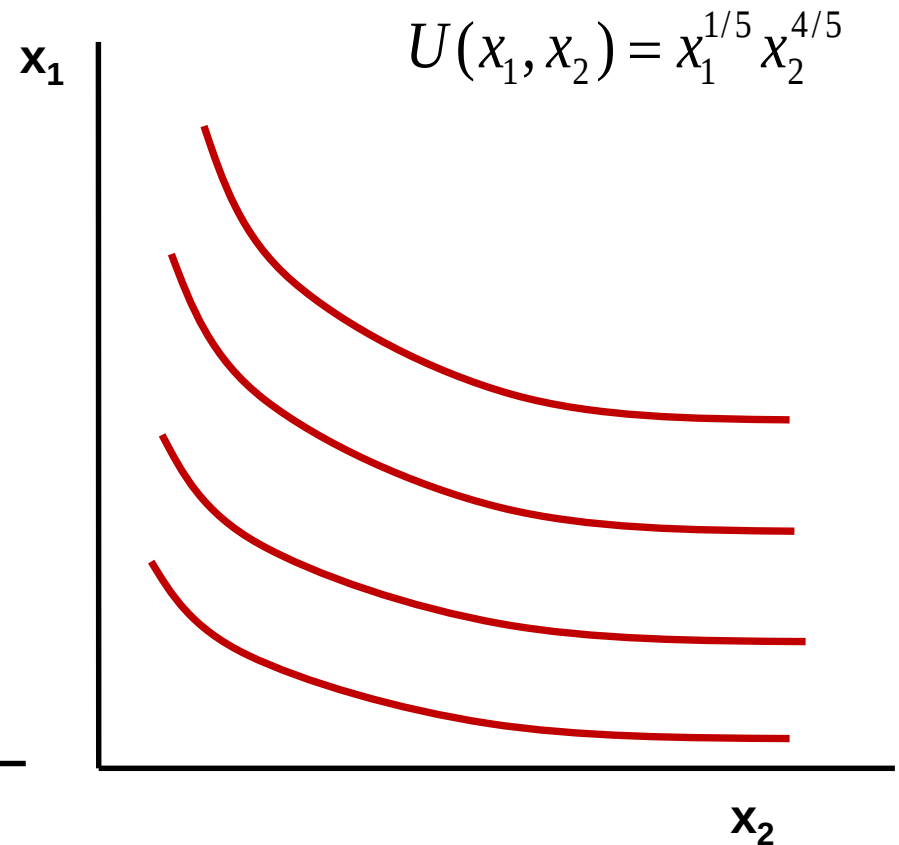
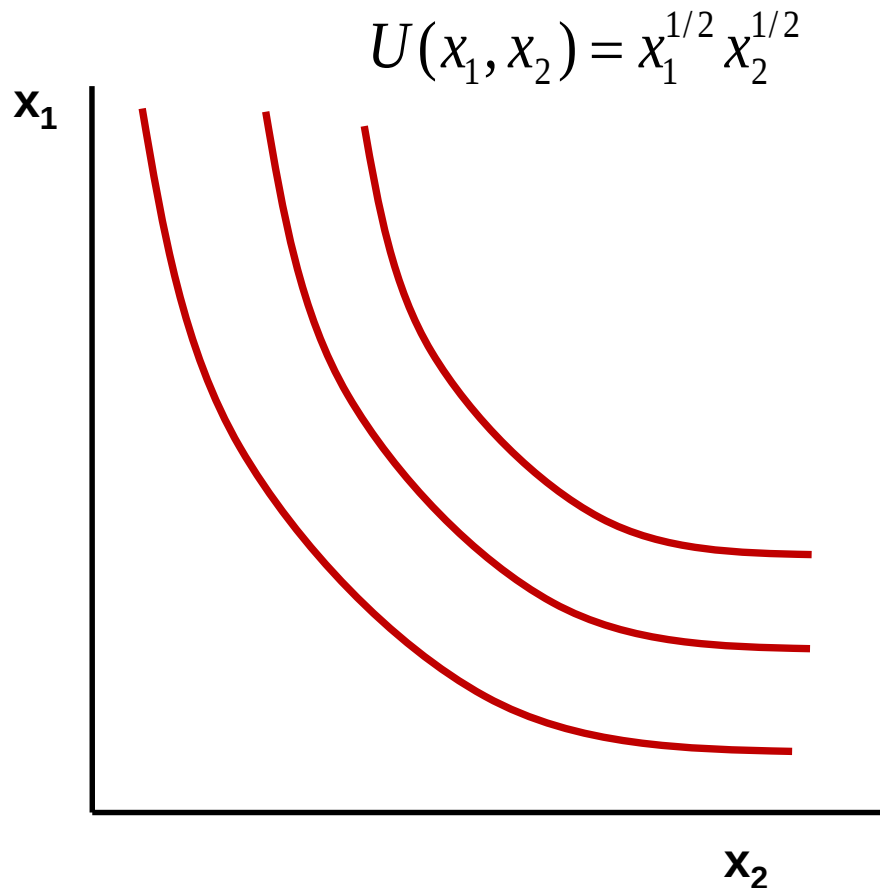
Es: $U = x_1 x_2$

- E' convessa ed è monotona ➔ preferenze well-behaved
- Una sua trasformazione monotona rappresenta sempre preferenze well-behaved. Es: logaritmo

$$U(x_1, x_2) = c \ln x_1 + d \ln x_2$$

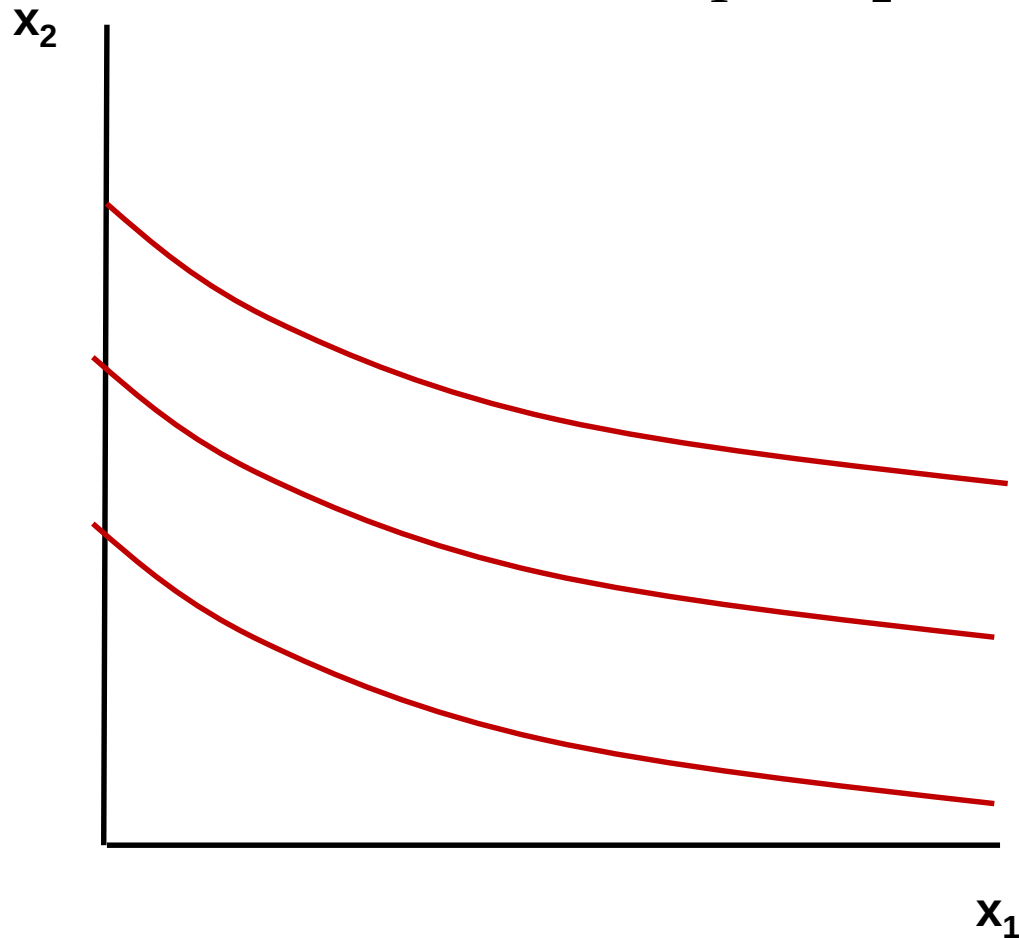
Funzione di Utilità Cobb-Douglas

Curve di indifferenza associate ad una funzione di utilità Cobb-Douglas
Asintotiche agli assi (ma non li toccano mai)



Funzione di Utilità: Quasi Lineare

$$U = g(x_1) + x_2$$



Funzione di Utilità: perfetti sostituti

$$U = \frac{1}{2}x_1 + x_2$$

L'individuo
richiede 2
unità di x_1 per
rinunciare a 1
unità di x_2

Comprese
Moment Act,
 x_2

2

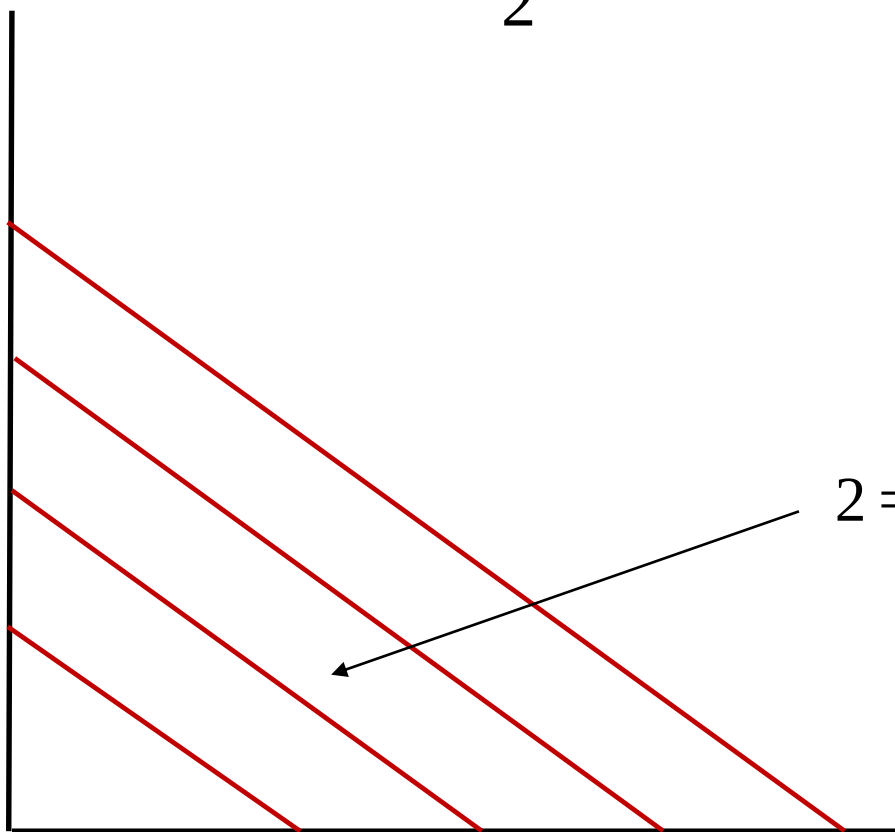
1

2

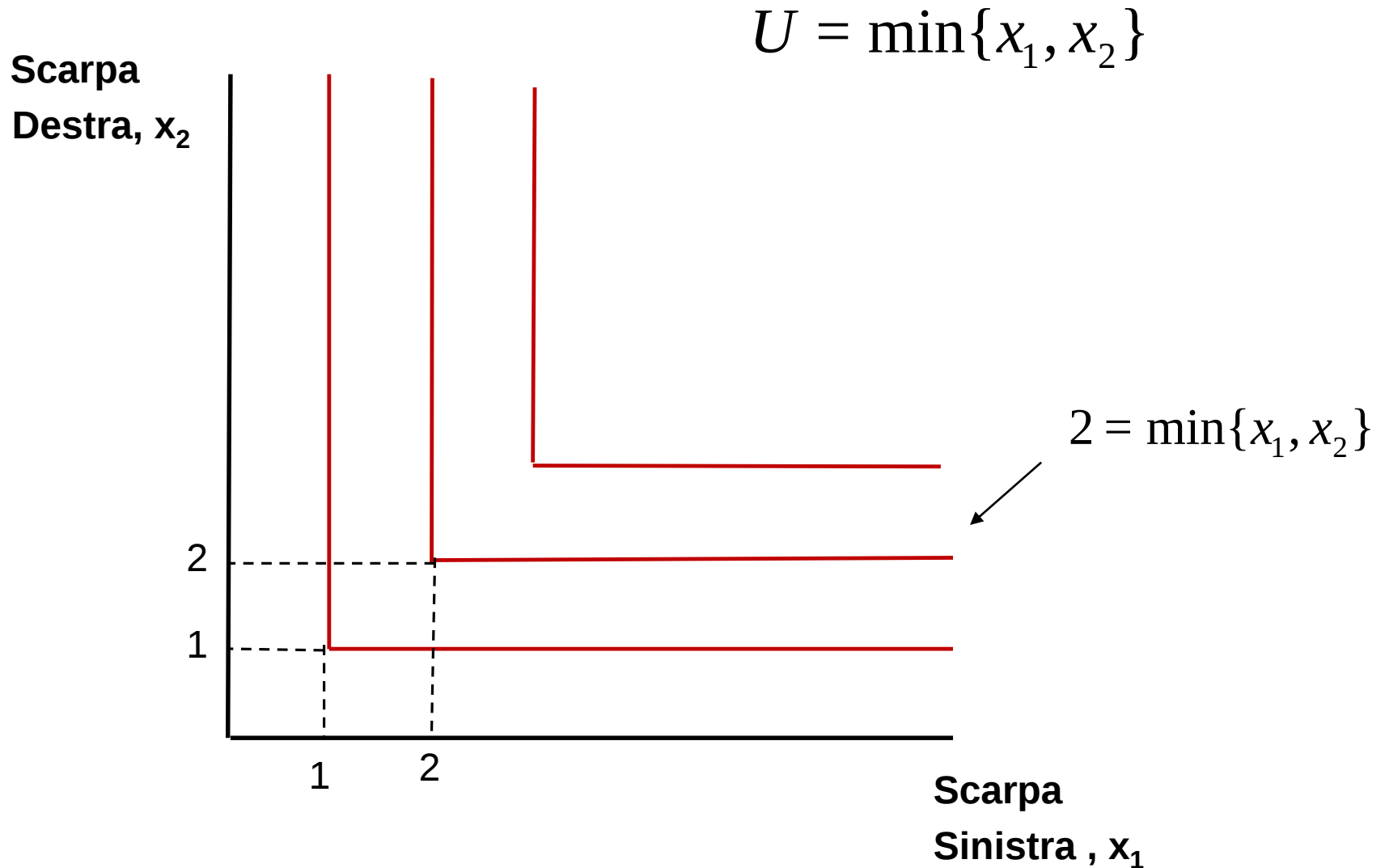
4

$$2 = \frac{1}{2}x_1 + x_2$$

Comprese
Moment, x_1



Funzione di Utilità: perfetti complementi



Funzione di Utilità

Perfetti Sostituti

$$U = ax_1 + bx_2$$

Perfetti Complementi

$$U = \min\{ax_1, bx_2\}$$

Utilità Marginale

- L'**utilità marginale** rispetto a x_1 è la variazione dell'utilità del consumatore derivante dalla disponibilità di una (piccolissima) quantità aggiuntiva del bene 1, in rapporto alla quantità addizionata

$$MU_1 = \frac{\Delta U}{\Delta x_1}$$

- Nel continuo, è la **derivata dell'utilità rispetto ad x_1** :

$$MU_1 = U'_1 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

Utilità Marginale

Esempio:

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = x_2$$

$$MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = x_1$$

Utilità Marginale

Esempio:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{1/2}$$

$$MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{1}{2} x_1^{1/2} x_2^{-1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{1/2}$$

Funzioni di Utilità e MRS

- Variazioni infinitesime Δx_1 fanno variare l'utilità complessiva in misura pari a

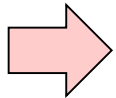
$$\Delta U = MU_1 \Delta x_1$$

- Analogamente, variazioni infinitesime Δx_2 fanno variare l'utilità complessiva in misura pari a

$$\Delta U = MU_2 \Delta x_2$$

Se a seguito di una variazione di x_1 e x_2 si rimane sulla stessa curva di indifferenza allora $\Delta U=0$

$$MU_1 \Delta x_1 + MU_2 \Delta x_2 = 0$$



$$-\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{U'_1}{U'_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = MRS$$

Funzione di Utilità e MRS

Esempio:

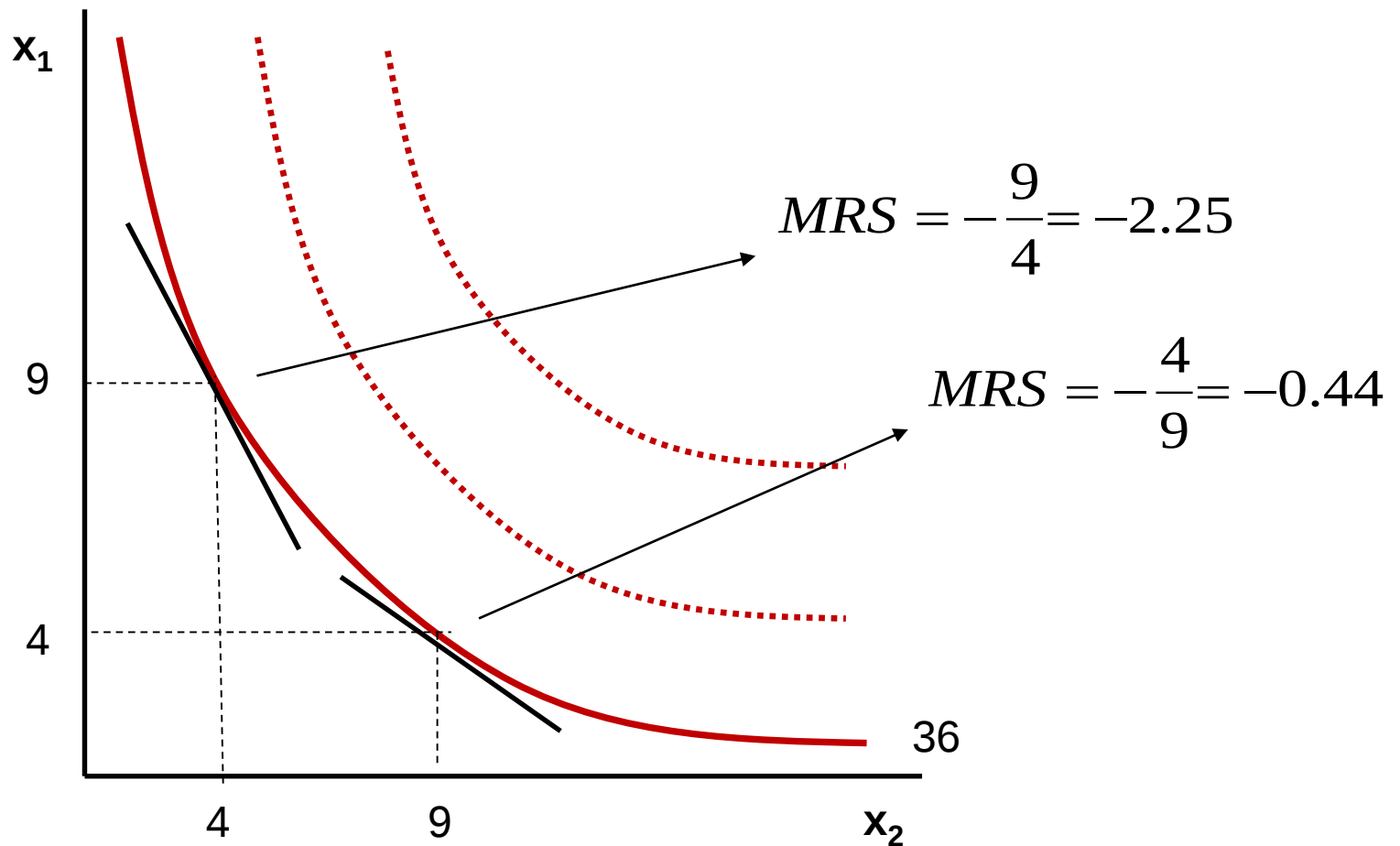
$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = x_2$$

$$MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = x_1$$

$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{x_2}{x_1}$$

Funzione di Utilità e MRS

$$U(x_1, x_2) = x_1 x_2$$



Utilità marginali e MRS con Cobb-Douglas

Es:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{1/2}$$

$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\left[\frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^{1/2} \right] / \left[\frac{1}{2} x_1^{1/2} x_2^{-1/2} \right] = -x_1^{-1} x_2 = -\frac{x_2}{x_1}$$

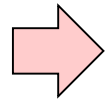
Utilità marginali e MRS con Cobb-Douglas

$$U(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$$

$$MU_1 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = c x_1^{c-1} x_2^d = c \frac{x_1^c x_2^d}{x_1} = c \frac{U(x_1, x_2)}{x_1}$$

Analogamente:

$$MU_2 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = d x_1^c x_2^{d-1} = d \frac{x_1^c x_2^d}{x_2} = d \frac{U(x_1, x_2)}{x_2}$$


$$\boxed{MRS_{x_1 x_2}} = - \frac{U'_1}{U'_2} = - \frac{c}{d} \frac{\frac{U(x_1, x_2)}{x_1}}{\frac{U(x_1, x_2)}{x_2}} = \boxed{- \frac{c}{d} \frac{x_2}{x_1}}$$

