

Esercitazione 1 - cap. 3 - Soluzione esercizi

giovedì 9 marzo 2023 15.15

ESERCIZIO 1: CALCOLO CURVA CONTRATTI IN GENERALE

Si immagini di avere due consumatori, a e b, con la seguente funzione di utilità:

$$U^i = x^{0.5}y^{0.5}, i = a, b$$

Derivare la curva dei contratti CC. Risposta.

Il SMS per ogni consumatore è dato da $SMS_{xy}^i = \frac{y}{x}$.

$$CC: SMS^a = SMS^b \Rightarrow \frac{y_a}{x_a} = \frac{y_b}{x_b}$$

Usando le dotazioni aggregate (grandezza scatola di Edgeworth) si ha: $y = y_a + y_b; x = x_a + x_b \Rightarrow$

Sostituendo in CC da eguaglianza SMS:

$$y_a = \frac{x_a(y - y_a)}{x - x_a} \Rightarrow y_a(x - x_a) = x_a(y - y_a) \Rightarrow y_a x = x_a y \Rightarrow y_a = \frac{y}{x} x_a.$$

A seconda delle dotazioni y e x si ha curva CC.

ESERCIZIO 2: Edgeworth e allocazione pareto efficiente nel consumo. Si immagini due consumatori A e B abbiano le seguenti funzioni di utilità

$$U^A = XY, U^B = y + 2X$$

Le dotazioni iniziali sono: $\omega_x^a = 1, \omega_y^a = \frac{1}{2}; \omega_x^b = 1, \omega_y^b = \frac{3}{2}$.

Nota con ω_z^i indichiamo le dotazioni iniziali dell'agente i del bene z.

Si assuma il prezzo del bene x come numerario, $p_x = 1$.

1) Derivare la curva dei contratti.

$$SMS^a = SMS^b \Rightarrow \frac{y^a}{x^a} = 2 \Rightarrow y^a = 2x^a$$

2) Derivare le scelte ottime dei due consumatori.

Le dotazioni complessive sono $\omega_x^a + \omega_x^b = \omega_x = 2; \omega_y^a + \omega_y^b = \omega_y = 2$

a. Consumatore A: vincolo di bilancio determinato da valore di mercato delle sue dotazioni

i. Vincolo di bilancio: $M^a = p_x x^a + p_y y^a$.

Qual è il reddito M^a ? $M^a = \text{dotazioni} * \text{prezzi}$, ovvero quanto denaro avrebbe il consumatore A se vendesse le sue dotazioni al prezzo di mercato?

$$\text{Quindi, } M^a = p_x \omega_x^a + p_y \omega_y^a = p_x 1 + p_y * \frac{1}{2}$$

Il vincolo di bilancio del consumatore A è quindi:

$$M^a = p_x \omega_x^a + p_y \omega_y^a = p_x 1 + p_y * \frac{1}{2} = x^a + p_y y^a. \text{ Usando } p_x = 1, \text{ abbiamo}$$

$$1 + p_y * \frac{1}{2} = x^a + p_y y^a \Rightarrow \text{Vincolo A: } 1 - x^a = p_y \left(y^a - \frac{1}{2} \right)$$

b. Consumatore B: $M^b = p_x \omega_x^b + p_y \omega_y^b \Rightarrow 1 + \frac{3}{2} p_y = x^b + p_y y^b \Rightarrow$

$$\text{Vincolo di B: } 1 - x^b = p_y \left(y^b - \frac{3}{2} \right)$$

c. Scelta ottima di B: $SMS^b = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow 2 = \frac{1}{p_y} \Rightarrow p_y = \frac{1}{2}$

d. Scelta ottima di A:

i. Step 1: SMS=rapporto dei prezzi.

$$SMS = \frac{y^a}{x^a} = \frac{1}{p_y} \Rightarrow y^a = \frac{x^a}{p_y};$$

ii. Step 2: sostituire condizione in step 1 nel vincolo di A.

Usando il vincolo di A:

$$1 - x^a = p_y \left(\frac{x^a}{p_y} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow 1 - x^a = x^a - \frac{1}{2} p_y \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} p_y = 2x^a \Rightarrow$$

$$x^a = \frac{2 + p_y}{4}; y^a = \frac{2 + p_y}{4p_y};$$

$$\text{Usando } p_y = \frac{1}{2} \text{ da scelta consumatore B; } x^a = \frac{5}{8}; y^a = \frac{10}{8}$$

e. **SCELTE OTTIME FINALI:** $x^b = \omega_x - x^a = 2 - \frac{5}{8} = \frac{11}{8}; y^b = \omega_y - y^a = 2 - \frac{10}{8} = \frac{6}{8}$

3) Le soluzioni sono Pareto-efficienti?

a. Da contract curve in 1: $y^a = 2x^a$; sostituendo le soluzioni ottime di A si ha che è così perchè $10/8 = 2 * 5/8$

b. Le allocazioni del competitive equilibrium sono quindi: $x^a = \frac{5}{8}; y^a = \frac{10}{8}; x^b = \frac{11}{8}; y^b = \frac{6}{8}$

4) Si immagini governo voglia un'altra allocazione differente: $A = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2} \right), B \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2} \right)$. E' un'allocazione paretiana di competitive equilibrium?

a. Check se è su curva contratti. L'allocazione desiderata dal governo sarebbe $x_a = \frac{3}{4}, y_a = \frac{3}{2}$.

Da CC x A: $y_a = 2x_a$, quindi ok perchè effettivamente $3/2 = 2 * 3/4$. E' un'allocazione pareto-efficiente.

b. E' realizzabile (feasible)? Per A no, perchè il suo reddito non è sufficiente a comprare le quantità richieste.

Al prezzo di equilibrio di $p_y = \frac{1}{2}$, la sua dotazione iniziale e le scelte ottime implicano che il reddito è

$$M^a = 1 + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{5}{8} + \frac{10}{8} * \frac{1}{2} = \frac{5}{4}. \text{ La dotazione che vorrebbe il governo vale per il consumatore A}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} * \frac{3}{2} = \frac{6}{4} > \frac{5}{4}$$

Quindi per comprare la dotazione richiesta dal governo, il consumatore dovrebbe risorse maggiori di quelle che ha.

c. Anche se in allocazione proposta utilità di entrambi consumatori sarebbero maggiori di quelle iniziali e quelle di scelta ottima, non sono ammissibili

5) Si immagini che il governo annunci un prezzo di $p_y = \frac{1}{4}$. Raggiungerebbe l'allocazione nuova?

No, non sulla curva contratti. Al nuovo prezzo, condizione ottimo varrebbe per A ma non per B. Per B ai nuovi prezzi si ha $SMS = 2 < 4$, e quindi domanderebbe più y.

ESERCIZIO 3: allocazioni efficienti nella produzione.

Si immagini di avere due imprese a e b con le seguenti funzioni di produzione

Impresa A: $q_a = k_a + l_a$; Impresa b: $q_b = k_b^{\frac{1}{2}} l_b^{\frac{1}{2}}$

Dotazioni iniziali: $\omega_k^a = 6, \omega_l^a = 8; \omega_k^b = 4; \omega_l^b = 2$.

1) Allocazione iniziale è Pareto efficiente? No.

a. MRTS: $MRTS_{k,l}^a = 1, MRTS_{k,l}^b = \frac{MP_k}{MP_l} = \frac{l_b}{k_b}$

In dotazioni iniziali: $MRTS^a = 1 > MRTS^b = \frac{1}{2}$

2) Trovare l'allocazione paretiana k e l, assumendo che il tasso di interesse $r = 1$.

a. La condizione per trovare la scelta ottima di K e L è data dalla minimizzazione dei costi dell'impresa che implica che

$$MRTS = \frac{r}{w}$$

Quindi: $MRTS^a = \frac{1}{w} \Rightarrow w = 1; MRTS^b = \frac{l_b}{k_b} = \frac{1}{w} \Rightarrow$ Usando $w = 1 \Rightarrow l_b = k_b$

Nelle dotazioni iniziali $CT^b = r\omega_k^b + w\omega_l^b = 4 + 2 = 6$. Quindi $6 = rk_b + l_b w = l_b + l_b \Rightarrow l_b = k_b = 3$

$\omega_k = \omega_k^a + \omega_k^b = 10; \omega_l = \omega_l^a + \omega_l^b = 10; k_a = \omega_k - k_b = 7; l_a = \omega_l - l_b = 7$.

Quindi l'allocazione finale è: $l_b = k_b = 3; l_a = k_a = 7$.

3) Dimostrare che l'allocazione è un miglioramento paretiano

a. In dotazioni iniziali: $Q^0 = q_a + q_b = 14 + 2 * 2^{0.5}$;

b. In dotazioni equilibrio: $Q^F = 14 + 3 = 17 > Q^0$