Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

Vengono presentate le tecniche di base della statistica inferenziale, cioè quelle metodologie che si basano sulle informazioni contenute in un campione per trarre conclusioni riguardanti la popolazione o il processo di cui il campione costituisce un sottoinsieme estratto o una limitata realizzazione.

Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

Finora abbiamo discusso dell'uso delle distribuzioni di probabilità nella modellazione o nella descrizione dell'output di un processo.

In tutti gli esempi visti, si è ipotizzato che fossero noti i parametri della distribuzione di probabilità e, quindi, i parametri del processo.

Questo è di solito un presupposto molto irrealistico.

Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

Ad esempio, nell'utilizzare la distribuzione binomiale per modellare il numero di unità non conformi trovate nel campionamento da un processo di produzione si è assunto che fosse noto il parametro p della distribuzione binomiale.

L'interpretazione di p è che esso sia la vera frazione di unità non conformi prodotte dal processo.

Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

È impossibile saperlo esattamente in un vero processo di produzione.

Inoltre, se il vero valore di p fosse noto ed relativamente costante nel tempo, si potrebbe sostenere che le procedure formali di monitoraggio e controllo dei processi non sono necessarie, a condizione che p fosse "accettabilmente" piccolo.

Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

In generale, i parametri di un processo sono sconosciuti; inoltre, di solito cambiano nel tempo.

Pertanto, è necessario sviluppare procedure per stimare i parametri delle distribuzioni di probabilità e risolvere altri problemi di inferenza relativi ad essi.

A tal fine sono utili le tecniche statistiche standard di stima dei parametri e verifica delle ipotesi.

Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

Queste tecniche sono alla base di gran parte della metodologia del controllo statistico della qualità.

Nel seguito saranno presentati alcuni dei risultati base dell'inferenza statistica, indicandone l'utilità nei problemi di miglioramento della qualità.

Gli argomenti chiave includono la stima puntuale ed intervallare di medie, varianze e proporzioni e i test di ipotesi su medie, varianze e proporzioni.

Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

Si definisce inferenza statistica il processo che permette di generalizzare i risultati che si ottengono da un campione a tutta la popolazione dalla quale il campione è stato estratto.

Ciò che interessa è soprattutto trarre delle conclusioni sulla popolazione e non sul campione.

Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

L'obiettivo dell'inferenza statistica è di trarre conclusioni o prendere decisioni riguardo una popolazione sulla base di un campione selezionato dalla popolazione.

Spesso, nell'analisi si assume che vengono utilizzati campioni casuali.

La parola "casuale" viene spesso applicata a qualsiasi metodo o selezione di campione che manca di soggettività.

Un campione si definisce casuale di dimensione n se è selezionato in modo tale che le osservazioni siano distribuite in modo indipendente e identico.

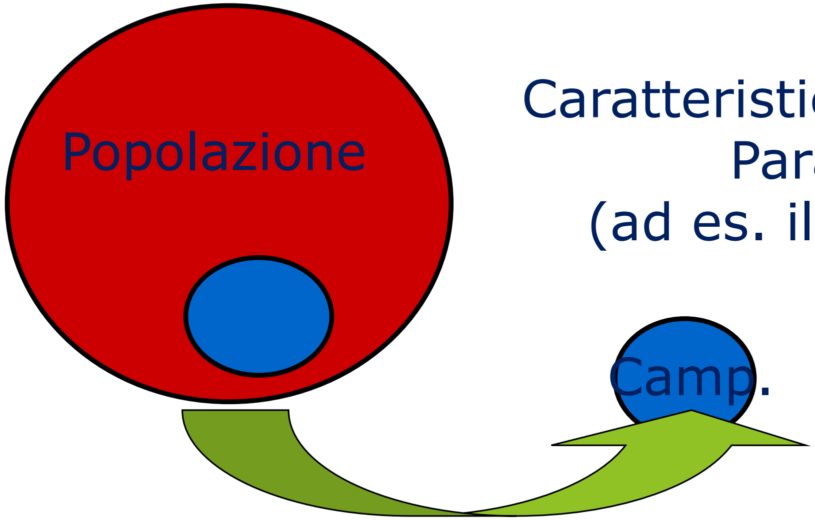
Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

Questa definizione è adatta per campioni casuali prelevati da popolazioni infinite o da popolazioni finite in cui il campionamento viene eseguito con il reinserimento.

Nel campionamento senza reinserimento da una popolazione finita di N unità, un campione di n unità è un campione casuale se ciascuno dei possibili campioni ha la stessa probabilità di essere scelto.

Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

Per fare inferenza statistica si utilizzano le informazioni raccolte su un campione per conoscere parametri <u>incogniti</u> della popolazione.



Caratteristiche della popolazione = Parametri incogniti (ad es. il numero di pezzi non conformi)

Estrazione casuale

Statistiche campionarie basate sulle osservazioni del campione

Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

L'inferenza statistica utilizza quantità calcolate sulle osservazioni del campione.

Il Parametro è una costante non nota della popolazione, grandezza caratteristica oggetto di inferenza (media, varianza e proporzione della popolazione).

Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

Una Statistica è definita come qualsiasi funzione delle osservazioni campionarie utilizzata per stimare il parametro incognito (media, varianza e proporzione campionarie).

Ad esempio, la media del campione $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

La varianza campionaria $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

La deviazione standard campionaria $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

Se si conosce la distribuzione di probabilità della popolazione da cui è stato prelevato il campione, è possibile spesso determinare la distribuzione di probabilità di varie statistiche calcolate dai dati del campione.

La distribuzione di probabilità di una statistica è chiamata distribuzione di campionamento.

Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

Nel controllo statistico della qualità, la distribuzione della probabilità viene utilizzata per descrivere o modellare alcune caratteristiche critiche per la qualità, come una dimensione critica di un prodotto o frazione difettosa di un processo.

Pertanto, si è interessati a fare inferenza sui parametri delle distribuzioni di probabilità.

Poiché i parametri sono generalmente sconosciuti, sono necessarie procedure per stimarli dai dati campionari.

Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

Si definisce stimatore di un parametro sconosciuto una statistica che corrisponde al parametro.

Un particolare valore numerico di uno stimatore, calcolato a partire da dati campionari, prende il nome di <u>stima</u>.

Inferenze riguardanti la qualità dei processi produttivi

Le tecniche di inferenza statistica possono essere classificate in due grandi categorie: stima dei parametri e verifica delle ipotesi.

Stima puntuale

Stimare significa attribuire un valore plausibile a un parametro incognito.

Quando un parametro della popolazione è stimato attraverso un singolo valore tale valore viene chiamato stima puntuale del parametro.

Stima puntuale: esempio

Un’azienda deve tenere sotto controllo la qualità del processo di produzione di un macchinario che produce pezzi di una certa lunghezza.

Se si tenessero sotto controllo tutti i pezzi prodotti e se ne calcolasse la lunghezza si potrebbe ottenere senza difficoltà la lunghezza media (parametro).

Stima puntuale: esempio

Se non si possono misurare le lunghezze di tutti i pezzi prodotti, ma solo quelle relative ad un campione casuale di pezzi di numerosità n, allora si può calcolare solo la lunghezza media del campione di pezzi (statistica).

In tal caso la lunghezza media della popolazione di pezzi è ignota.

Stimatore

Dato che il parametro non è noto, si vogliono trarre delle conclusioni su di esso sulla base di un campione estratto dalla popolazione.

Si definisce stimatore del parametro θ ogni statistica, funzione dei dati campionari.

Il valore assunto dallo stimatore in corrispondenza di un particolare campione osservato è la stima del parametro di interesse.

Proprietà di uno stimatore

Uno stimatore puntale dovrebbe :

- essere non distorto, cioè il valore atteso dello stimatore puntuale dovrebbe coincide con il parametro da stimare
- avere varianza minima, cioè la varianza dello stimatore non dovrebbe essere superiore di quella di qualunque altro stimatore non distorto ottenuto a pari numerosità.

Stima intervallare

Anche utilizzando uno stimatore con proprietà ottimali, per effetto del caso la stima puntuale sulla base di un campione può essere molto diversa dal valore vero del parametro.

Di solito si preferisce stimare un intervallo di valori entro i quali si ritiene sia compreso il parametro incognito.

Una stima compresa tra due limiti:

- riflette meglio l’incertezza legata all’inferenza
- incorpora direttamente l’informazione sul grado di precisione

Stima intervallare

Una stima intervallare di un parametro è l'intervallo tra due statistiche che include il valore vero del parametro con un'assegnata probabilità (generalmente fissato al 90%, 95% o 99%).

Per costruire la stima intervallare del parametro θ al livello di probabilità 1- α , sulla base delle osservazioni campionarie, si stimano due valori, L_1 e L_2 (gli estremi dell'intervallo) in maniera tale che

$$P(L_1 \leq \theta \leq L_2) = 1 - \alpha$$

L_1 e L_2 sono statistiche campionarie, cioè variano al variare dei campioni.

Stima intervallare

Si fissa 1- α =0,95

Si ipotizza di estrarre successivamente più campioni indipendenti dalla stessa popolazione e si costruiscono le corrispondenti stime intervallari.

Per 95 campioni su 100 θ è compreso nell'intervallo stimato.

Il campione estratto però potrebbe anche essere uno di quella frazione α (il 5%) per la quale l'intervallo non cattura il valore incognito θ.

Stima intervallare

In pratica si ha a disposizione un solo campione.

Come si fa a sapere se il campione estratto è tra quelli del 95% o del 5%?

Non si può dire con certezza se è uno dei 'fortunati 95%' il cui intervallo comprende il valore del parametro, ma si è fiduciosi al 95% (si ha una probabilità del 95%) che lo sia.

Test statistici

Un’ipotesi statistica è un’affermazione o una congettura riguardante i valori di un parametro della popolazione.

Sottoporre a test (o verifica) un’ipotesi significa valutarne la plausibilità alla luce delle informazioni campionarie.

Test statistici

Si considera una coppia di ipotesi (sistema di due ipotesi):

- ipotesi nulla (H_0)
- ipotesi alternativa (H_1)

L'ipotesi nulla H_0 coincide con lo stato attuale delle cose o con l'attuale convinzione riguardo ad un valore assunto da un parametro.

L'ipotesi alternativa H_1 è specificata come ipotesi opposta e complementare a H_0.

Test statistici

Una parte importante di qualsiasi problema di verifica delle ipotesi è la determinazione dei valori dei parametri specificati nelle ipotesi nulla e alternativa.

In generale, questo viene fatto in tre modi.

Test statistici

- I valori possono derivare da evidenze o conoscenze passate. Ciò accade frequentemente nel controllo statistico della qualità, dove vengono utilizzate le informazioni passate per specificare i valori di un parametro corrispondente a uno stato di controllo, e quindi periodicamente viene testata l'ipotesi che il valore del parametro non sia cambiato.

Test statistici

- I valori possono derivare da qualche teoria o modello del processo.
- I valori scelti per il parametro possono essere il risultato di specifiche contrattuali o di progettazione, una situazione che si verifica frequentemente.

Le procedure di verifica statistica delle ipotesi possono essere utilizzate per verificare la conformità dei parametri di processo ai loro valori specificati o per aiutare a modificare il processo fino ad ottenere i valori desiderati.

Test statistici

Per verificare un'ipotesi, si seleziona un campione casuale dalla popolazione studiata, si calcola una statistica test appropriata e quindi si rifiuta o non si rifiuta l'ipotesi nulla.

Test statistici

Accettare un'ipotesi non significa aver dimostrato che l'ipotesi sia vera, perché la conclusione si basa solo su un campione di osservazioni.

Se si accetta H_0, si può solo concludere che non c'è evidenza empirica sufficientemente contraria all'ipotesi stessa.

I dati campionari non forniscono una prova del fatto che il processo sia fuori controllo.

Se si rifiuta H_0 e si accetta H_1 vuol dire che l'ipotesi alternativa, alla luce dei dati campionari, è più verosimile dell'ipotesi nulla.

Test statistici

Per ogni tipo di verifica delle ipotesi può essere calcolata una statistica test appropriata, atta a misurare di quanto si è avvicinato il valore campionario all'ipotesi nulla.

L'appropriata distribuzione della statistica test è suddivisa in due regioni (o aree):

- regione A di Accettazione
- regione R di Rifiuto (o critica)

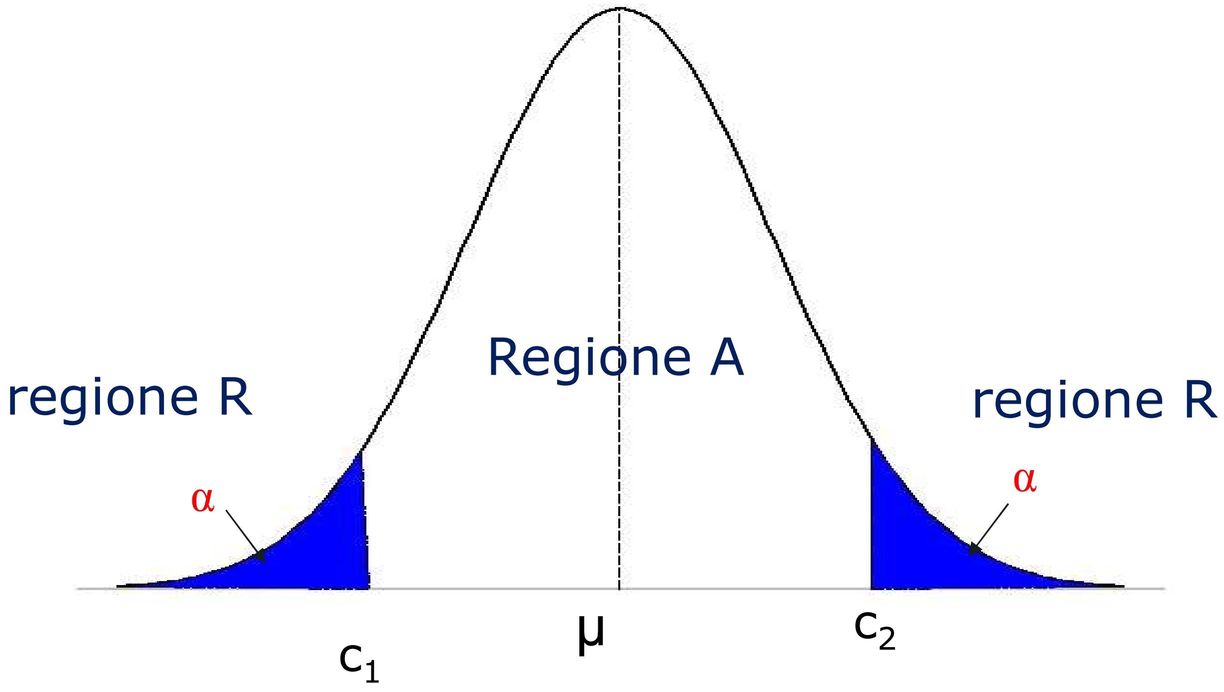
Test statistici

Se il valore campionario cade nella regione A, si accetta H_0

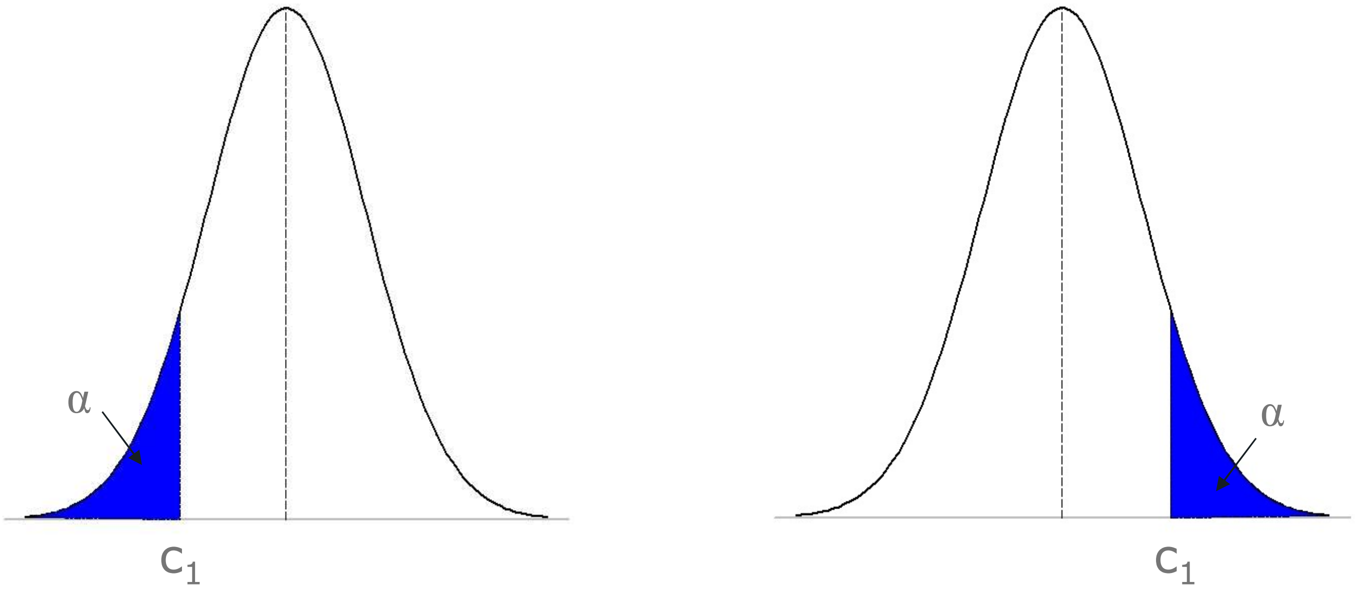
Se il valore campionario cade nella regione R, si rifiuta H_0 a favore di H_1

La regione di rifiuto comprende valori della statistica test che hanno una probabilità molto bassa di verificarsi se H_0 è vera (sono quei valori che ci aspetteremmo di osservare nel caso in cui H_0 fosse falsa).

Test statistico bilaterale



Test statistico unilaterale



In un test unilaterale c'è un unico valore soglia che lascia alla sua destra o alla sua sinistra un'area pari a α (livello di significatività)

Test statistici

Per stabilire il criterio di decisione, ovvero la regione di rifiuto di H_0, si usa ragionare sulla probabilità di commettere un errore.

Gli errori possono essere di 2 tipi:

a) ERRORE DEL PRIMO TIPO, ovvero rifiutare l'ipotesi H_0, quando essa è vera

b) ERRORE DEL SECONDO TIPO, ovvero non rifiutare l'ipotesi H_0, quando essa è falsa.

Test statistici

Le probabilità di questi due tipi di errori sono indicate come:

$$\alpha = P\{errore\ di\ I\ tipo\} = P\{rigettare\ H_0 | H_0\ \text{è}\ vera\}$$

$$\beta = P\{errore\ di\ II\ tipo\} = P\{non\ rigettare\ H_0 | H_0\ \text{è}\ falsa\}$$

A volte è più conveniente lavorare con la potenza di un test statistico, dove

$$Potenza = 1 - \beta = P\{rigettare\ H_0 | H_0\ \text{è}\ falsa\}$$

Test statistici

Pertanto, il potere è la probabilità di rifiutare correttamente H_0.

Nel controllo di qualità, a volte α viene chiamato rischio del produttore, perché indica la probabilità che un buon lotto venga rifiutato o la probabilità che un processo che produce valori accettabili di una particolare caratteristica di qualità venga rifiutato in quanto non soddisfacente.

Invece, a volte β viene chiamato rischio del consumatore perché indica la probabilità di accettare un lotto di scarsa qualità o di consentire a un processo che sta funzionando in modo insoddisfacente rispetto ad alcune caratteristiche di qualità di continuare a funzionare.

Test statistici

La procedura generale nel test di ipotesi è di specificare un valore della probabilità di errore di I tipo e quindi di progettare una procedura di prova in modo da ottenere un piccolo valore della probabilità di errore di tipo II.

Pertanto, è possibile controllare o scegliere direttamente il rischio α.

Poiché è possibile controllare la probabilità di commettere un errore di tipo I, il rifiuto dell'ipotesi nulla è considerata una conclusione forte.

Test statistici

Il rischio β è generalmente una funzione della dimensione del campione e di quanto sia diverso il valore reale del parametro dal valore ipotizzato, quindi è controllato indirettamente.

Più grandi sono le dimensioni del campione utilizzate nel test, minore è il rischio β.

La probabilità di errore di tipo II è spesso difficile da controllare a causa della mancanza di flessibilità nella scelta della dimensione del campione e perché la differenza tra il valore del parametro reale e il valore ipotizzato è sconosciuta nella maggior parte dei casi, quindi il non riuscire a respingere H_0 è una conclusione debole.

Test statistico: Esempio

Una macchina produce barre di acciaio a sezione circolare il cui diametro ottimale dovrebbe essere 10 millimetri.

Le barre effettivamente prodotte, che si suppongono tra loro indipendenti, hanno un diametro aleatorio con distribuzione normale di media μ_0 = 10mm e scarto σ = 3mm.

Come si può verificare il corretto funzionamento della macchina basandosi su un campione di ampiezza finita?

Test statistico: Esempio

Un possibile strumento è il controllo o la verifica d'ipotesi.

Nel controllo statistico di qualità le ipotesi formulate hanno un preciso significato.

$H_0 : \mu = 10$ la macchina funziona correttamente

$H_1 : \mu \neq 10$ la macchina non funziona correttamente

Test statistico: Esempio

Per procedere al controllo:

a) si estrae un campione casuale di ampiezza n dalla popolazione

b) si rilevano le n misure della caratteristica di qualità di interesse

c) si calcola un’opportuna statistica test

d) sulla base del valore che tale statistica assume si deciderà se rifiutare o non rifiutare l’ipotesi H_0.

Test statistico: Esempio

Si è in presenza di un'ipotesi su una media μ con varianza nota.
Occorre definire la statistica test:

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad \bar{X} \text{ è } la\ media\ campionaria$$

Se si estrae un campione di ampiezza n = 5 e le misure dei 5 diametri sono: 11, 9, 12, 11, 10

La media del campione risulta: (11+9+12+11+10)/5= 10.6

Test statistico: Esempio

Il valore della statistica test:

$$Z_0 = \frac{10.6-10}{3/\sqrt{5}} = 0.447$$

Se per esempio si fissa un valore di $\alpha = 0.002$ la regione di non rifiuto per H_0 è

$Z\,\alpha_{/2} = -\,3.09$ $\qquad$ $Z\,\alpha_{/2} = 3.09$

In questo caso non si rifiuta H_0 in quanto $0,447 < 3.09$.

Test statistici: Approccio del p-value

Il modo tradizionale di riportare i risultati di un test di ipotesi è di affermare che l'ipotesi nulla è stata o non è stata respinta a un valore o livello di significatività specificato.

Questo è spesso chiamato test ad un livello di significatività fissa.

Ad esempio, nel precedente esempio, si può dire che $H_0 : \mu = 10$ non è stata rifiutata al livello di significatività 0,002.

Test statistici: Approccio del p-value

Questa affermazione di conclusioni è spesso inadeguata, poiché non fornisce all'analista alcuna idea se il valore calcolato della statistica del test stia appena nella regione del rifiuto o molto lontano in questa regione.

Inoltre, in questo modo si impone un livello predefinito di significatività anche per altri utilizzatori delle informazioni.

Questo approccio potrebbe non essere soddisfacente, poiché alcuni decisori potrebbero essere a disagio con i rischi implicati da α=0.002.

Test statistici: Approccio del p-value

Per evitare queste difficoltà, nella pratica si utilizza ampiamente l'approccio del P-value.

Il P-value è la probabilità che la statistica test assuma un valore che è almeno estremo del valore osservato della statistica quando l'ipotesi nulla è vera.

Pertanto, un P-value fornisce molte informazioni sul peso delle evidenze contrarie a H_0 e quindi un decisore può trarre una conclusione a qualsiasi livello di significatività specificato.

Test statistici: Approccio del p-value

Il p-value è il più piccolo livello di significatività che conduce al rifiuto di H_0.

È consuetudine definire la statistica test (e i dati) significativi quando l'ipotesi nulla è respinta; pertanto, si potrebbe pensare al p-value come al livello più piccolo in cui i dati sono significativi.

Una volta che il p-value è noto, il decisore può determinare da solo quanto sono significativi i dati senza un livello presunto di significatività.

Test statistici: Approccio del p-value

In pratica, calcolato il valore di p-value e scelto un livello di significatività α adeguato al problema:

Si rifiuta H_0 se p-value $< \alpha$

Si accetta H_0 se p-value $> \alpha$