Appunti delle lezioni di matematica attuariale delle assicurazioni sulla vita

Claudio Pacati

Facoltà di Economia "R.M. Goodwin"
Università degli Studi di Siena

email: pacati@unisi.it

anno accademico 2012–13

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Capitolo 1

Le operazioni di assicurazione e la teoria dell'utilità

1.1 Introduzione

In questo capitolo si discutono alcuni aspetti di base della teoria delle assicurazioni. In particolare, si formalizza e si studia l'operazione di assicurazione nell'ambito della teoria dell'utilità attesa, che è l'ambiente naturale per definire, interpretare e giustificare economicamente alcuni concetti fondamentali della teoria e della pratica assicurativa: il premio equo, il premio puro, il caricamento di sicurezza e la base tecnica del I ordine.

Si tratta di un capitolo "motivazionale" e per questo si privilegia la semplicità espositiva alla generalità e all'approfondimento. Molti dei concetti qui introdotti vengono ripresi e sviluppati nei capitoli successivi.

1.2 L'operazione di assicurazione

Nella sua forma più elementare, un contratto di assicurazione è un accordo fra due parti, nel quale l'*assicurato* trasferisce all'*assicuratore* un *danno aleatorio* che può verificarsi in futuro, in cambio di un *premio* che paga alla data di stipula. Il premio è il prezzo che l'assicurato paga per l'eliminazione del rischio che si verifichi il danno.

In questa sede converrà considerare solo il caso uniperiodale, con alcune ipotesi semplificatrici. L'analisi verrà condotta inoltre solo dal punto di vista dell'assicuratore. Si assuma pertanto che

(a) il contratto abbia inizio al tempo $t = 0$, con il pagamento del premio P, e termine al tempo $s = 1$, con il rimborso del danno;

(b) l'assicuratore

  (b1) abbia un capitale proprio certo $c > 0$;

(b2) effettui le proprie scelte in modo razionale, in base ad una funzione di utilità (crescente e concava) u, definita in un opportuno intervallo dei numeri reali;[1]

(b3) attribuisca probabilità agli eventi secondo la distribuzione di probabilità $\mathbb{P}$;

(b4) non abbia altri contratti assicurativi in corso;

(b5) investa sul mercato dei capitali nel periodo $[t, s]$ con rendimento I (in generale aleatorio);

(c) il danno D sia una variabile aleatoria, le cui determinazioni si misurino in unità monetarie; per evitare casi poco interessanti, si assuma che D sia non degenere, cioè che sia effettivamente aleatorio, e che

$$\mathbb{P}_t(D \geq 0) = 1 \qquad \text{e} \qquad \mathbb{P}_t(D > 0) > 0 \ , \tag{1.1}$$

dove il suffisso t a $\mathbb{P}$ indica il condizionamento all'informazione disponibile alla data t;

(d) il mercato finanziario sia *perfetto* e, in particolare, privo di opportunità di *arbitraggi non rischiosi* (*ipotesi di assenza di arbitraggio*).

Si osservi che, nel caso D abbia un numero finito di determinazioni distinte con probabilità non nulla (caso finito e discreto), la (1.1) significa che tutte le determinazioni sono non negative e che almeno una è positiva.

Prima della stipula del contratto, l'assicuratore ha una posizione patrimoniale netta che al tempo s avrà valore

$$X = c(1 + I)$$

e risente quindi solo dell'*incertezza finanziaria* del rendimento I. Stipulando il contratto di assicurazione la posizione netta in s cambia e diventa

$$Y = (c + P)(1 + I) - D \ ,$$

che è esposta al rischio finanziario ma soprattutto al *rischio tecnico*, indotto dall'aleatorietà del danno.

Dal punto di vista dell'assicuratore, quindi, l'operazione di assicurazione consiste nello scambiare la posizione futura X con la posizione futura Y. La *condizione di indifferenza* dello scambio è che risulti

$$\mathbb{E}_t[u(Y)] = \mathbb{E}_t[u(X)] \ , \tag{1.2}$$

[1] Come è noto, quest'ipotesi comporta che l'assicuratore sia massimizzatore di profitto e avverso al rischio.

cioè che

$$\mathbb{E}_t\left[u\big((c+P)(1+I)-D\big)\right]=\mathbb{E}_t\left[u\big(c(1+I)\big)\right] \quad , \tag{1.3}$$

essendo $\mathbb{E}_t$ l'aspettativa condizionata all'informazione disponibile al tempo t e calcolata secondo la probabilità $\mathbb{P}$. La (1.3) significa che lo scambio di del premio P (certo) al tempo t contro il danno D (aleatorio) al tempo s non provoca variazioni della posizione finanziaria netta dell'assicuratore in s dal punto di vista dell'utilità attesa in t.

Naturalmente, nel caso nella (1.2) risulti la disuguaglianza "$>$", l'assicuratore percepirà vantaggiosa l'operazione di assicurazione, perché ne deriva un incremento dell'utilità attesa, mentre se dovesse risultare "$<$" la percepirà svantaggiosa.

Si noti che la (1.2) è strutturalmente diversa dalla *condizione di equità* dello scambio

$$\mathbb{E}_t(Y)=\mathbb{E}_t(X) \quad , \tag{1.4}$$

cioè

$$\mathbb{E}_t\left[(c+P)(1+I)-D\right]=\mathbb{E}_t\left[c(1+I)\right] \quad , \tag{1.5}$$

che equivale a

$$P=\frac{\mathbb{E}_t(D)}{1+\mathbb{E}_t(I)} \quad .$$

La (1.2), diversamente dalla (1.4), include infatti nella valutazione l'avversione al rischio dell'assicuratore.[2]

La condizione di indifferenza (1.3) dipende sia dall'incertezza finanziaria di I che da quella tecnica di D e, quindi, dalla distribuzione di probabilità congiunta delle due variabili aleatorie. Per evitare di appesantire l'esposizione con ipotesi che caratterizzino la relazione fra le due fonti di incertezza nel caso dei contratti assicurativi, conviene semplificare l'ipotesi (b5) e assumere d'ora in poi e per il resto del capitolo che l'assicuratore

(b5′) investa sul mercato dei capitali nel periodo $[t,s]$ con rendimento certo $i\geq 0$.

[2]Naturalmente, nel caso limite di u lineare (o affine), per la linearità dell'operatore $\mathbb{E}_t$ la (1.2) si semplifica e diventa la (1.4). Questo è essenzialmente il ben noto risultato che un individuo (massimizzatore di profitto) ha funzione di utilità lineare se e solo se è indifferente al rischio.

Naturalmente, per l'ipotesi (d) di assenza di arbitraggio, i coincide con il rendimento di mercato in t del titolo a cedola nulla privo di rischio di default che scade in s.[3]

D'ora in poi indicheremo con P il premio che soddisfa la condizione di indifferenza (1.3), che nell'ipotesi (b5′) diventa

$$\mathbb{E}_t\left[u\big((c+P)(1+i)-D\big)\right] = u\big(c(1+i)\big) \quad . \tag{1.6}$$

Si noti che ora la posizione iniziale X diviene certa mentre la posizione Y risente solo dell'incertezza del danno.

Con E indicheremo invece il premio che soddisfa la (1.5), che ora diventa

$$\mathbb{E}_t\left[(c+E)(1+i)-D\right] = c(1+I) \quad , \tag{1.7}$$

che equivale alla

$$E = \frac{\mathbb{E}_t(D)}{1+i} \quad . \tag{1.8}$$

In queste ipotesi è facile verificare che, per l'assicuratore, la condizione di indifferenza è più forte della condizione di equità, nel senso che *un contratto equo è svantaggioso*. Se infatti vale la condizione di equità (1.7) si ottiene che

$$u\left(\mathbb{E}_t\left[(c+E)(1+i)-D\right]\right) = u\big(c(1+i)\big) \quad ; \tag{1.9}$$

per la disuguaglianza di Jensen[4] si ha che

$$\mathbb{E}_t\left[u\big((c+E)(1+i)-D\big)\right] < u\left(\mathbb{E}_t\left[(c+E)(1+i)-D\right]\right) \tag{1.10}$$

e quindi si può concludere che

$$\mathbb{E}_t\left[u\big((c+E)(1+i)-D\big)\right] < u\big(c(1+i)\big) \quad ,$$

cioè che *l'equità dell'operazione ne comporta la svantaggiosità per l'assicuratore*. In altri termini, l'assicuratore che praticasse il premio equo (1.8)

[3]Si noti che la semplificazione (b5′) dell'ipotesi (b5) non consiste nel sostituire il rendimento aleatorio I con la sua aspettativa $\mathbb{E}_t(I)$: non si può infatti assumere che l'aspettativa di un rendimento rischioso ottenibile sul mercato sia necessariamente uguale al rendimento certo di mercato; anzi, la differenza $\mathbb{E}_t(I) - i$ è una misura dell'extra-rendimento che l'assicuratore pretenderebbe per assumersi il rischio finanziario indotto da I. Si tratta piuttosto di un'ipotesi diversa sulla tipologia di investimento dell'assicuratore per il periodo $[t, s]$.

[4]Disuguaglianza di Jensen. Se $f(x)$ è una funzione (strettamente) concava e X una variabile aleatoria, allora $\mathbb{E}[f(X)] \leq f\big(\mathbb{E}(X)\big)$ e vale l'uguaglianza se e solo se X è degenere (certa). □

proporrebbe al pubblico un contratto per lui svantaggioso, cioè venderebbe "sotto costo".[5]

Esempio 1.1. Si assuma che il danno D possa assumere una sola determinazione positiva $d > 0$ con probabilità $p > 0$ e che sia quindi nullo con probabilità $1 - p$. In questo caso la (1.6) assume la forma

$$p\, u\big((c + P)(1 + i) - d\big) + (1 - p)\, u\big((c + P)(1 + i)\big) = u\big(c(1 + i)\big) \ ,$$

mentre la condizione di equità (1.7) diventa

$$p[(c + E)(1 + i) - d] + (1 - p)(c + P)(1 + i) = c(1 + i)$$

che, semplificando e ponendo $v = (1 + i)^{-1}$, è equivalente a

$$E = pdv \ . \qquad \square$$

La condizione di indifferenza (1.2) e le relazioni che da essa derivano sono espresse nella scala delle utilità. Per riportare i risultati nella scale delle unità monetarie, che è più familiare, si indichi con

$$\mathbb{C}_t(Z) = u^{-1}\left(\mathbb{E}_t[u(Z)]\right)$$

l'*equivalente certo* calcolato al tempo t di una posizione aleatoria Z, dove u^{-1} è la funzione inversa della funzione di utilità u. Infatti, poiché la funzione u è crescente, lo è anche la sua inversa e applicandola alla condizione di indifferenza (1.2) si ottiene

$$\mathbb{C}_t(Y) = \mathbb{C}_t(X) \ ;$$

partendo dalla (1.6) si ottiene la forma più esplicita

$$\mathbb{C}_t\big((c + P)(1 + i) - D\big)v = c$$

che mostra come lo scambio sia indifferente per l'assicuratore se e solo se l'equivalente certo scontato della posizione assicurata è uguale al suo capitale certo. In modo analogo si ottiene che l'operazione è vantaggiosa se e solo se $\mathbb{C}_t\big((c + P)(1 + i) - D\big)v > c$, svantaggiosa se e solo se $\mathbb{C}_t\big((c + P)(1 + i) - D\big)v < c$.

[5] In realtà si può dimostrare un risultato più forte: in opportune ipotesi sul mercato assicurativo (che qui non specificheremo) un assicuratore che pratichi premi equi è destinato a fallire con probabilità 1.

1.3 Il premio equo, il premio puro e il caricamento di sicurezza

Fissato D, la (1.2), che nelle nostre ipotesi diventa la (1.6), può essere utilizzata per determinare il *premio di indifferenza* P, cioè il premio che rende l'operazione indifferente per l'assicuratore. Si è già osservato che il *premio equo* E, definito dalla (1.8), renderebbe svantaggiosa l'operazione per l'assicuratore; quindi il premio di indifferenza, detto anche *premio puro*, deve essere maggiore del premio equo. Infatti, combinando la (1.6) con la (1.9) e applicando la disuguaglianza di Jensen si ottiene che

$$\begin{aligned} u\left(\mathbb{E}_t\left[(c+E)(1+i)-D\right]\right) &= \mathbb{E}_t(\left[u\left(c+P\right)(1+i)-D\right]) \\ &< u\left(\mathbb{E}_t\left[(c+P)(1+i)-D\right]\right) \quad . \end{aligned}$$

Poiché la funzione u è invertibile, applicando la funzione u^{-1} si ha che

$$\mathbb{E}_t\left[(c+E)(1+i)-D\right] < \mathbb{E}_t\left[(c+P)(1+i)-D\right]$$

e quindi, per la linearità dell'aspettativa, che

$$E < P \quad .$$

La differenza

$$L = P - E$$

prende il nome di *caricamento di sicurezza* e quantifica in unità monetarie al tempo t l'avversione dell'assicuratore al rischio insito nell'operazione di assicurazione del danno D. La terminologia deriva dal fatto, già richiamato, che l'assicuratore non può praticare premi equi, altrimenti fallirebbe: deve quindi essere *prudente*, caricando i premi con il caricamento di sicurezza.

Il caricamento di sicurezza si esprime spesso in percentuale del premio puro, come *tasso di caricamento di sicurezza*

$$\ell = \frac{L}{P} \quad .$$

È un *caricamento implicito*, che l'assicuratore non è tenuto a dichiarare all'assicurato, diversamente dal *caricamento per spese*, che invece, nei rami vita, normalmente deve essere esplicitato in polizza.

Per determinare il premio puro, e quindi il caricamento di sicurezza, occorre risolvere la (1.6) rispetto a P. Si osservi che, fissati u, $\mathbb{P}$, c, i e D, la funzione

$$f(x) = \mathbb{E}_t\left[u\big((c+x)(1+i)-D\big)\right] - u\big(c(1+i)\big) \tag{1.11}$$

è continua, monotona crescente e concava. In particolare è invertibile e l'inversa, quando non sia ottenibile esplicitamente, può essere calcolata con metodi numerici (ad esempio, il metodo delle tangenti di Newton) e, per la concavità, in modo semplice e computazionalmente efficiente. Il premio puro è allora la soluzione dell'equazione

$$f(P) = 0 \ , \tag{1.12}$$

cioè $P = f^{-1}(0)$.

Esempi

In questo paragrafo si propongono alcuni esempi che specializzano la trattazione al caso di alcune delle funzioni di utilità più diffuse.

Esempio 1.2. Se si assume che il danno sia quello dell'esempio 1.1 e che la funzione dell'assicuratore sia di tipo esponenziale

$$u(x) = -\mathrm{e}^{-rx} \ , \qquad \text{con } r > 0,$$

il premio puro P si può ricavare in forma chiusa. La (1.11) diventa infatti

$$f(P) = -p\,\mathrm{e}^{-r\big((c+P)(1+i)-d\big)} - (1-p)\,\mathrm{e}^{-r(c+P)(1+i)} + \mathrm{e}^{-rc(1+i)}$$

e l'equazione (1.12) assume la forma

$$-p\,\mathrm{e}^{-r\big((c+P)(1+i)-d\big)} - (1-p)\,\mathrm{e}^{-r(c+P)(1+i)} + \mathrm{e}^{-rc(1+i)} = 0$$

che, con semplici passaggi, si risolve con

$$P = \frac{1}{r}\log\Big[p\,\mathrm{e}^{rd} + (1-p)\Big]\,v \ . \tag{1.13}$$

Poiché la funzione inversa della funzione di utilità esponenziale è

$$u^{-1}(x) = -\frac{1}{r}\log(-x) \ ,$$

il premio puro (1.13) può anche essere scritto nella forma

$$P = -u^{-1}\left(\mathbb{E}_t[u(-D)]\right) v = -\,\mathbb{C}_t(-D)v \ . \tag{1.14}$$

A meno dei due segni meno, che non si semplificano vista la non linearità di u e quindi di $\mathbb{C}$, il premio puro coincide con l'equivalente certo scontato del danno D. Il caricamento di sicurezza assume allora la forma

$$L = P - E = -\,\mathbb{C}_t(-D)v - \mathbb{E}_t(D)v \tag{1.15}$$

che è particolarmente espressiva perché, a meno della solita coppia di segni negativi che non si semplifica, lo esprime come differenza fra l'equivalente certo e l'aspettativa del danno, che differiscono proprio per l'avversione al rischio dell'assicuratore.

La (1.13) mostra che, in questo caso, il premio puro e, quindi, il caricamento di sicurezza non dipendono dal capitale proprio dell'assicuratore, ma solo dal danno e dal tasso di interesse i. Questo fatto, così come le espressioni (1.14) e (1.15), è una proprietà specifica della funzione di utilità esponenziale. □

Esempio numerico 1.3. In riferimento all'esempio 1.2, si consideri il caso $c = 1000$, $i = 5\%$, $r = 1/1000$, $d = 100$, $p = 5\%$. Il premio equo e il premio puro valgono

$$E = \mathbb{E}_t(D)v = pdv = \frac{0.05 \times 100}{1.05} = 4.761905 \ ,$$
$$P = 1000\frac{\log\left[0.05 \times \mathrm{e}^{\frac{100}{1000}} + 0.95\right]}{1.05} = 4.995017 \ .$$

Il caricamento di sicurezza ed il relativo tasso risultano

$$L = P - E = 4.995017 - 4.761905 = 0.233112 \ ,$$
$$\ell = \frac{L}{P} = \frac{0.233112}{4.995017} = 4.67\% \ .$$

Se invece si considera il caso di un danno 5 volte più elevato, cioè se si pone $d = 500$, si ottiene

$$E = \frac{0.05 \times 500}{1.05} = 23.809524 \ ,$$
$$P = 1000\frac{\log\left[0.05 \times \mathrm{e}^{\frac{500}{1000}} + 0.95\right]}{1.05} = 30.401067 \ ,$$
$$L = 30.401067 - 23.809524 = 6.591543 \ ,$$
$$\ell = \frac{6.591543}{30.401067} = 21.68\% \ .$$

Tabella 1.1. Premio equo, premio puro e caricamento di sicurezza al variare del danno in utilità esponenziale

d	E	P	L	ℓ (%)
50	2.380952	2.438357	0.057404	2.35
100	4.761905	4.995017	0.233112	4.67
150	7.142857	7.675381	0.532524	6.94
200	9.523810	10.485059	0.961250	9.17
250	11.904762	13.429883	1.525121	11.36
300	14.285714	16.515905	2.230191	13.50
400	19.047619	23.136893	4.089274	17.67
500	23.809524	30.401067	6.591543	21.68
600	28.571429	38.365288	9.793859	25.53
700	33.333333	47.090324	13.756991	29.21
800	38.095238	56.640899	18.545661	32.74
900	42.857143	67.085685	24.228542	36.12

$c = 1000$, $r = 1/1000$, $p = 5\%$, $i = 5\%$

Il premio equo E è quindi quintuplicato, mentre il premio puro P è aumentato di un fattore maggiore di 6; il caricamento di sicurezza L è aumentato di un fattore quasi 30 e il tasso di caricamento di sicurezza ℓ è quasi quintuplicato.

Nella tabella 1.1 sono riportati al variare di d il premio equo, il premio puro, il caricamento di sicurezza e il tasso di caricamento. La tabella 1.2 ripropone il calcolo fissando il danno $d = 100$ e facendo variare il coefficiente di avversione (assoluta) al rischio (nel senso di Arrow e Pratt) r o, equivalentemente, il coefficiente di tolleranza del rischio $B = 1/r$. □

Esempio 1.4. Si consideri la situazione dell'esempio 1.2, ma si assuma che l'assicuratore abbia funzione di utilità logaritmica

$$u(x) = \log(x) \ .$$

La (1.12) diventa

$$p \log\big((c+P)(1+i)-d\big) + (1-p) \log\big((c+P)(1+i)\big) - \log\big(c(1+i)\big) = 0$$

e può essere risolta rispetto a P per via numerica. □

Esempio numerico 1.5. Se si considera come nell'esempio numerico 1.3 il caso di $c = 1000$, $i = 5\%$, $d = 100$, $p = 5\%$, ma si fa riferimento all'utilità

Tabella 1.2. Premio equo, premio puro e caricamento di sicurezza al variare della tolleranza del rischio in utilità esponenziale

B	E	P	L	ℓ (%)
500	4.761905	5.242530	0.480625	9.17
750	4.761905	5.075880	0.313975	6.19
1000	4.761905	4.995017	0.233112	4.67
1250	4.761905	4.947270	0.185365	3.75
1500	4.761905	4.915755	0.153850	3.13
1750	4.761905	4.893398	0.131493	2.69
2000	4.761905	4.876713	0.114809	2.35
2500	4.761905	4.853475	0.091571	1.89
3000	4.761905	4.838061	0.076156	1.57
3500	4.761905	4.827088	0.065183	1.35
4000	4.761905	4.818879	0.056974	1.18
4500	4.761905	4.812506	0.050601	1.05
5000	4.761905	4.807415	0.045511	0.95

$c = 1000$, $d = 100$, $p = 5\%$, $i = 5\%$

logaritmica dell'esempio 1.4, il premio puro che si ottiene è $P = 4.990456$ e il caricamento di sicurezza risulta $L = 0.228551$, con $\ell = 4.58\%$. Nel caso di danno 5 volte maggiore si ha $P = 31.448697$, $L = 7.639174$ e $\ell = 24.29\%$, con fattori di incremento rispettivamente di oltre 5, circa 33 e oltre 5. Si noti che se il capitale certo fosse $c = 2000$, il premio puro dei due contratti sarebbe rispettivamente $P = 4.872791$ e $P = 26.958682$, i caricamenti di sicurezza $L = 0.110886$ e $L = 3.1491580$ e i tassi di caricamento $\ell = 2.28\%$ e $\ell = 11.68\%$.

Le tabella 1.3 e 1.4 mostrano come variano premio equo, premio puro e caricamento di sicurezza, la prima al variare del danno e con $c = 1000$, la seconda con $d = 100$ e al variare del capitale certo. Ricordando che per la funzione di utilità logaritmica il coefficiente di avversione al rischio è

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{1}{x} \ ,$$

si ha che $r(c) = 1/c$ e quindi fare crescere il capitale certo corrisponde a fare decrescere l'avversione al rischio e crescere la tolleranza del rischio che, in questo caso, vale $B(c) = 1/r(c) = c$. La tabella 1.4 è pertanto analoga alla tabella 1.2, vista nel caso di utilità esponenziale nell'esempio numerico 1.3. □

Esempio 1.6. Nelle stesse ipotesi degli esempi 1.2 e 1.4 si assuma che la funzione di utilità dell'assicuratore sia di tipo quadratico

$$u(x) = x - \frac{a}{2}x^2 \ , \qquad \text{con } a > 0 \text{ sufficientemente piccolo}^6.$$

La (1.12) diventa

$$p[(c+P)(1+i)-d] - p\frac{a}{2}[(c+P)(1+i)-d]^2 + (1-p)(c+P)(1+i) \\ - (1-p)\frac{a}{2}[(c+P)(1+i)]^2 - c(1+i) + \frac{a}{2}c^2(1+i)^2 = 0 \ ,$$

che è un'equazione di secondo grado in P, la cui unica soluzione accettabile si ottiene con semplici calcoli ed è

$$P = \frac{1 - a[c(1+i) - pd] - \sqrt{[ac(1+i)+1]^2 - p(1-p)a^2d^2}}{a(1+i)} \ . \qquad \square$$

[6] Si ricordi che la funzione di utilità quadratica è definita per $x < 1/a$ e, quindi, a deve essere tale che tutte le grandezze delle quali occorre calcolare l'utilità siano minori di $1/a$.

Tabella 1.3. Premio equo, premio puro e caricamento di sicurezza al variare del danno in utilità logaritmica

d	E	P	L	ℓ (%)
50	2.380952	2.436396	0.055443	2.28
100	4.761905	4.990456	0.228551	4.58
150	7.142857	7.673407	0.530550	6.91
200	9.523810	10.498102	0.974293	9.28
250	11.904762	13.479341	1.574579	11.68
300	14.285714	16.634270	2.348556	14.12
400	19.047619	23.548707	4.501087	19.11
500	23.809524	31.448697	7.639174	24.29
600	28.571429	40.631149	12.059721	29.68
700	33.333333	51.539111	18.205778	35.32
800	38.095238	64.866945	26.771707	41.27
900	42.857143	81.767284	38.910141	47.59

$c = 1000$, $p = 5\%$, $i = 5\%$

Tabella 1.4. Premio equo, premio puro e caricamento di sicurezza al variare della tolleranza del rischio in utilità logaritmica

$B(c) = c$	E	P	L	ℓ (%)
500	4.761905	5.249051	0.487146	9.28
750	4.761905	5.073009	0.311104	6.13
1000	4.761905	4.990456	0.228551	4.58
1250	4.761905	4.942533	0.180629	3.65
1500	4.761905	4.911227	0.149322	3.04
1750	4.761905	4.889170	0.127265	2.60
2000	4.761905	4.872791	0.110886	2.28
2500	4.761905	4.850093	0.088188	1.82
3000	4.761905	4.835108	0.073203	1.51
3500	4.761905	4.824476	0.062572	1.30
4000	4.761905	4.816541	0.054636	1.13
4500	4.761905	4.810392	0.048487	1.01
5000	4.761905	4.805487	0.043583	0.91

$d = 100$, $p = 5\%$, $i = 5\%$

Esempio numerico 1.7. Se si considera l'esempio 1.6 e si pone $a = 1/5000$ e, come negli esempi numerici precedenti, $c = 100$, $p = 5\%$ e $i = 5\%$, al variare della determinazione d del danno si ottengono i premi equi, puri e i caricamenti riportati nella tabella 1.5. Se invece si pone $d = 100$ e si fa variare il capitale c e, conseguentemente, la tolleranza del rischio $B(c)$ che, per l'utilità quadratica, vale

$$B(c) = \frac{1}{a} - c \ ,$$

si ottengono i risultati della tabella 1.6. □

Esempio 1.8. Si consideri un assicuratore con funzione di utilità potenza

$$u(x) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha \ , \qquad \text{con } 0 < \alpha < 1.$$

Tenendo ferme le stesse ipotesi degli esempi precedenti, la (1.12) diventa

$$\frac{p}{\alpha}[(c+P)(1+i) - d]^\alpha + \frac{1-p}{\alpha}[(c+P)(1+i)]^\alpha - \frac{1}{\alpha}[c(1+i)]^\alpha = 0$$

e, come per l'esempio dell'utilità logaritmica, può essere risolta rispetto a P per via numerica.[7] □

Esempio numerico 1.9. Se si considera l'esempio 1.8 e si pone $\alpha = 0.2$ e, nuovamente, $c = 100$, $p = 5\%$ e $i = 5\%$, i risultati della valutazione al variare della determinazione d del danno sono riportati nella tabella 1.7. Per la funzione di utilità potenza la tolleranza del rischio $B(c)$ risulta

$$B(c) = \frac{c}{1-\alpha} \ .$$

Se si pone $d = 100$ e si fa variare il capitale c e, quindi, la tolleranza del rischio $B(c)$, si ottengono i risultati esposti nella tabella 1.8. □

Osservazione 1.1. Nelle tabelle 1.2, 1.4, 1.6 e 1.8 si vede che il premio puro, e quindi il caricamento di sicurezza, decresce con il crescere della tolleranza del rischio dell'assicuratore. Si può dimostrare che questa proprietà vale in generale, qualunque sia la funzione di utilità e qualunque sia il danno D da assicurare.

La dipendenza del premio puro dal capitale proprio c dell'assicuratore non è invece sempre dello stesso tipo: per le funzioni di utilità logaritmica

[7] Del resto è noto che la funzione di utilità logaritmica è il caso limite dell'utilità potenza per $\alpha \to 0^+$.

Tabella 1.5. Premio equo, premio puro e caricamento di sicurezza al variare del danno in utilità quadratica

d	E	P	L	ℓ (%)
50	2.380952	2.395268	0.014316	0.60
100	4.761905	4.819169	0.057264	1.19
150	7.142857	7.271702	0.128845	1.77
200	9.523810	9.752870	0.229061	2.35
250	11.904762	12.262675	0.357913	2.92
300	14.285714	14.801120	0.515406	3.48
400	19.047619	19.963945	0.916326	4.59
500	23.809524	25.241382	1.431858	5.67
600	28.571429	30.633477	2.062048	6.73
700	33.333333	36.140288	2.806954	7.77
800	38.095238	41.761883	3.666645	8.78
900	42.857143	47.498342	4.641199	9.77

$c = 1000$, $a = 1/5000$, $p = 5\%$, $i = 5\%$

Tabella 1.6. Premio equo, premio puro e caricamento di sicurezza al variare della tolleranza del rischio in utilità quadratica

c	$B(c)$	E	P	L	ℓ (%)
4500	500	4.761905	5.585711	0.823806	14.75
4250	750	4.761905	5.182897	0.420993	8.12
4000	1000	4.761905	5.044695	0.282791	5.61
3750	1250	4.761905	4.974812	0.212908	4.28
3500	1500	4.761905	4.932626	0.170721	3.46
3250	1750	4.761905	4.904394	0.142489	2.91
3000	2000	4.761905	4.884174	0.122269	2.50
2500	2500	4.761905	4.857145	0.095240	1.96
2000	3000	4.761905	4.839903	0.077998	1.61
1500	3500	4.761905	4.827946	0.066042	1.37
1000	4000	4.761905	4.819169	0.057264	1.19
500	4500	4.761905	4.812450	0.050546	1.05

$d = 100$, $a = 1/5000$, $p = 5\%$, $i = 5\%$

Tabella 1.7. Premio equo, premio puro e caricamento di sicurezza al variare del danno in utilità potenza

d	E	P	L	ℓ (%)
50	2.380952	2.425178	0.044225	1.82
100	4.761905	4.943660	0.181755	3.68
150	7.142857	7.563442	0.420584	5.56
200	9.523810	10.293611	0.769802	7.48
250	11.904762	13.144560	1.239798	9.43
300	14.285714	16.128246	1.842532	11.42
400	19.047619	22.551582	3.503963	15.54
500	23.809524	29.705871	5.896347	19.85
600	28.571429	37.793052	9.221624	24.40
700	33.333333	47.113643	13.780309	29.25
800	38.095238	58.143216	20.047978	34.48
900	42.857143	71.699536	28.842393	40.23

$c = 1000$, $\alpha = 0.2$, $p = 5\%$, $i = 5\%$

Tabella 1.8. Premio equo, premio puro e caricamento di sicurezza al variare della tolleranza del rischio in utilità potenza

c	$B(c)$	E	P	L	ℓ (%)
400	500	4.761905	5.257824	0.495919	9.43
600	750	4.761905	5.076449	0.314544	6.20
800	1000	4.761905	4.992279	0.230374	4.61
1000	1250	4.761905	4.943660	0.181755	3.68
1200	1500	4.761905	4.911991	0.150086	3.06
1400	1750	4.761905	4.889723	0.127818	2.61
1600	2000	4.761905	4.873209	0.111304	2.28
2000	2500	4.761905	4.850356	0.088451	1.82
2400	3000	4.761905	4.835289	0.073384	1.52
2800	3500	4.761905	4.824608	0.062703	1.30
3200	4000	4.761905	4.816641	0.054737	1.14
3600	4500	4.761905	4.810471	0.048566	1.01
4000	5000	4.761905	4.805551	0.043646	0.91

$d = 100$, $\alpha = 0.2$, $p = 5\%$, $i = 5\%$

e potenza (tabelle 1.4 e 1.8) il premio puro decresce con il capitale proprio, per l'utilità esponenziale (tabella 1.2) è indipendente da (è cioè costante rispetto a) c, mentre nel caso della funzione di utilità quadratica (tabella 1.6) cresce con il capitale proprio. Questi comportamenti dipendono dalla forma che assume la tolleranza del rischio $B(c)$. In utilità esponenziale l'avversione al rischio e quindi la tolleranza del rischio, che ne è il reciproco, sono costanti; proprio per questo, la funzione di utilità esponenziale è anche chiamata funzione di utilità CARA (*Constant Absolute Risk Aversion*). In utilità quadratica l'avversione al rischio è crescente con il capitale e la tolleranza del rischio è decrescente; rientra quindi nella classe delle funzioni di utilità IARA (*Increasing Absolute Risk Aversion*). Le funzioni di utilità logaritmica e potenza sono invece funzioni di utilità DARA (*Decreasing Absolute Risk Aversion*).

Poiché è abbastanza ragionevole assumere che un assicuratore più "grande", cioè con più capitale, abbia anche una tolleranza del rischio maggiore e possa quindi praticare premi puri più bassi, teoricamente le funzioni di utilità di tipo DARA si prestano meglio alla costruzione di modelli di valutazione in ambito assicurativo. Si è tuttavia visto negli esempi di questo paragrafo come in utilità esponenziale (esempio 1.2) o quadratica (esempio 1.6) si abbia una maggiore trattabilità matematica e si possano ottenere formule espressive e calcoli numerici più semplici. Proprio per questo le due funzioni di utilità vengono spesso usate sia nella teoria che nella pratica. Per la funzione di utilità quadratica vi è anche un altro motivo: se si prende una qualsiasi funzione di utilità e la si approssima (nel senso della formula di Taylor) al secondo ordine si ottiene una funzione di utilità quadratica che quindi, nei limiti dell'approssimazione, è il caso "generale" di funzione di utilità. □

1.4 Le basi tecniche del I ordine

Nel paragrafo 1.3 si è visto come per considerare correttamente la propria avversione al rischio l'assicuratore debba rinunciare alla semplicità di calcolo del premio equo. Anzi, spesso non ha a disposizione un'espressione in forma chiusa del premio puro ma deve calcolarlo per via numerica, come negli'esempi numerico 1.5 e 1.9.

Per ovviare a questo inconveniente si ricorre spesso alla logica della *base tecnica del I ordine*, distorcendo la misura di probabilità e il tasso di interesse per incorporarvi l'avversione al rischio dell'assicuratore. Formalmente, si definisce base tecnica del I ordine ogni coppia $(\mathbb{P}^{\mathrm{I}}, i^{\mathrm{I}})$ di misura di probabilità e di tasso di interesse tali che il premio equo calcolato con $(\mathbb{P}^{\mathrm{I}}, i^{\mathrm{I}})$ risulti uguale al premio puro P, cioè tale che

$$\mathbb{E}_t^{\mathrm{I}}(D)(1+i^{\mathrm{I}})^{-1} = P = \mathbb{E}_t(D)(1+i)^{-1} + L \ ,$$

avendo indicato con $\mathbb{E}^{\mathrm{I}}$ l'aspettativa calcolata con la misura di probabilità $\mathbb{P}^{\mathrm{I}}$. Il caricamento di sicurezza viene quindi incorporato nell'aspettativa distorta o nello sconto ad un tasso modificato.

In generale la base tecnica del I ordine non è unica. Il tasso di interesse del I ordine i^{I}, detto anche *tasso tecnico*, è solitamente non negativo e minore-uguale del tasso di mercato i, mentre la distribuzione di probabilità $\mathbb{P}^{\mathrm{I}}$ assegna probabilità maggiori di $\mathbb{P}$ al verificarsi del danno D. Per questo motivo la base tecnica del I ordine viene anche detta *base tecnica prudenziale*.

Si osservi che, nell'ipotesi il rendimento degli attivi I sia aleatorio, per la base tecnica del I ordine vale $\mathbb{E}_t^{\mathrm{I}}(I) = i^{\mathrm{I}}$. Quindi il tasso tecnico asssume il ruolo di *aspettativa prudenziale del rendimento degli attivi*.

Esempio numerico 1.10. Proseguendo l'esempio numerico 1.3, ogni base tecnica del I ordine $(p^{\mathrm{I}}, i^{\mathrm{I}})$ deve soddisfare l'equazione

$$p^{\mathrm{I}} d(1+i^{\mathrm{I}})^{-1} = P \ .$$

Se nel caso $r = 1/1000$ e $d = 100$, per esempio, si sceglie $i^{\mathrm{I}} = i$, la probabilità del I ordine p^{I} è univocamente determinata e risulta

$$p^{\mathrm{I}} = \frac{P(1+i)}{d} = \frac{4.995017 \times 1.05}{100} = 5.2448\% \ .$$

Se invece si pone $p^{\mathrm{I}} = p$, il tasso tecnico i^{I} è univocamente determinato da

$$i^{\mathrm{I}} = \frac{pd}{P} - 1 = \frac{0.05 \times 100}{4.995017} - 1 = 0.0998\% \ .$$

Nel caso di $d = 500$, se si fissa il tasso tecnico i^{I} al livello del tasso di mercato i, si ottiene $p^{\mathrm{I}} = 6.3842\%$. Se invece si fissa la probabilità del I ordine, ad esempio al livello $p^{\mathrm{I}} = 6.2\%$, si ottiene un tasso tecnico $i^{\mathrm{I}} = 1.9701\%$. $\square$

1.5 La riserva matematica

La *riserva matematica* di un contratto di assicurazione è l'importo monetario che l'assicuratore deve immobilizzare a fronte dell'impegno nei confronti dell'assicurato. In base a quanto visto nei paragrafi precedenti, nello schema uniperiodale considerato in questo capitolo essa coincide con il premio puro. Poiché, fissata una base tecnica del I ordine,

$$P = \mathbb{E}_t^{\mathrm{I}}(D)(1 + i^{\mathrm{I}})^{-1} \ ,$$

la riserva matematica è il *valore atteso scontato* della prestazione, calcolato con la base tecnica del I ordine. Nel capitolo 4 si vedrà come si definisce e si calcola la riserva matematica nel caso generale dei contratti assicurativi tradizionali dei rami vita, mentre nel capitolo 6 se ne discuterà l'estensione al caso delle polizze rivalutabili.

Si noti che l'appostamento della riserva matematica non garantisce la solvibilità dell'assicuratore. Essa è infatti determinata in base alla prudenzialità, cioè all'avversione al rischio, dell'assicuratore. Il regolamentatore tipicamente richiede un'ulteriore immobilizzazione di capitale per garantire la solvibilità del contratto, il *margine di solvibilità* o *Solvency Capital Requirement* (SCR).

Capitolo 2

Il modello probabilistico per la durata della vita umana

2.1 La durata della vita umana

2.1.1 La variabile aleatoria T_0

Si consideri fissato un individuo e si indichi con T_0 la *durata della sua vita* espressa in anni, cioè l'età dell'individuo alla data di decesso; è una variabile aleatoria che assume valori reali e, per evitare casi poco interessanti, si assumerà che sia positiva, che è equivalente all'assunzione che l'individuo sia effettivamente nato vivo.

Anche se è ragionevole assumere che la variabile aleatoria T_0 sia superiormente limitata, cioè che l'individuo prima o poi muoia, a volte vengono utilizzati dei modelli probabilistici in cui non si pone limite alla durata della vita umana[1]. Per questo motivo indicheremo con $\omega = \sup T_0$, lasciando aperta la possibilità che sia $\omega < +\infty$ o che sia $\omega = +\infty$. In entrambi i casi l'individuo potrà essere in vita ad età minori di ω, mentre, nel caso $\omega < +\infty$, non potrà raggiungere età maggiori di ω, alle quali sarà quindi sicuramente morto. Nel caso $\omega < +\infty$, inoltre, assumeremo per comodità che l'individuo non possa raggiungere l'età ω.[2] Quindi, in entrambi i casi, si ha $T_0 < \omega$ e quindi $T_0 \in (0, \omega)$.

Si indichi, per $x \in [0, \omega)$, con $F_0(x) = \mathbb{P}(T_0 \leq x)$ la *funzione di ripartizione* della variabile aleatoria T_0, che esprime la probabilità che l'individuo raggiunga al più l'età x, cioè che muoia entro il suo x-esimo anno di vita.

[1] Naturalmente nei modelli senza limite superiore si assegnano probabilità assolutamente trascurabili al raggiungimento di età “esagerate”

[2] Quest'ultima ipotesi equivale ad assumere che non esista il $\max T_0$; viene introdotta unicamente per comodità di notazione e può essere rimossa a patto di complicare leggermente alcune parti dell'esposizione e alcune notazioni, senza alterare però i risultati.

La *funzione di sopravvivenza* è la funzione di ripartizione complementare

$$S(x) = \mathbb{P}(T_0 > x) = 1 - F_0(x)$$

ed esprime quindi la probabilità che l'individuo non muoia nei primi x anni di vita, cioè che sia in vita all'età x.

La funzione $F_0(x)$ è monotona non decrescente mentre la funzione $S(x)$ è monotona non crescente e risulta

$$F_0(0) = 0 \ , \qquad \lim_{x \to \omega^-} F_0(x) = 1 \ ,$$
$$S(0) = 1 \ , \qquad \lim_{x \to \omega^-} S(x) = 0 \ .$$

La tabella 2.1 propone un esempio di funzione di sopravvivenza "tipica", riportandone alcuni valori; la figura 2.1 la illustra graficamente, assieme alla corrispondente la funzione di ripartizione.

2.1.2 La variabile aleatoria T_x

Si fissi un istante di valutazione t ("oggi") e si consideri un individuo che, al tempo t, sia in vita ed abbia età $x \geq 0$ anni. Si indichi con

$$T_x = T_0 - x$$

la durata residua della sua vita. È una variabile aleatoria che assume le sue determinazioni nell'intervallo $(0, \omega_x)$, dove

$$\omega_x = \begin{cases} \omega - x & \text{se } \omega < +\infty, \\ +\infty & \text{se } \omega = +\infty, \end{cases}$$

è il limite superiore alla durata residua della vita dell'individuo di età x alla data di valutazione.

Osservazione 2.1. Assumeremo che la variabile aleatoria T_x sia definita solo se l'individuo sia in vita ed abbia età x alla data di valutazione, cioè quando $T_0 > x$, lasciandola non definita nel caso, peraltro poco interessante, che $T_0 \leq x$. □

Alla data di valutazione la funzione di ripartizione della variabile aleatoria T_x, definita per $k \in [0, \omega_x)$, è

$$F_x(k) = \mathbb{P}_t(T_x \leq k) \tag{2.1}$$

Tabella 2.1. Esempio di funzione di sopravvivenza (alcuni valori)

x	$S(x)$	x	$S(x)$	x	$S(x)$
0	1.000000	40	0.958458	70	0.696813
1	0.999292	41	0.956239	71	0.673684
2	0.998581	42	0.953860	72	0.649057
3	0.997867	43	0.951305	73	0.622927
4	0.997149	44	0.948557	74	0.595309
5	0.996428	45	0.945597	75	0.566244
20	0.984726	50	0.926795	80	0.402976
21	0.983840	51	0.922042	81	0.368024
22	0.982932	52	0.916882	82	0.332931
23	0.982000	53	0.911278	83	0.298042
24	0.981041	54	0.905187	84	0.263735
25	0.980051	55	0.898567	85	0.230407
30	0.974534	60	0.855744	90	0.091805
31	0.973286	61	0.844836	91	0.071797
32	0.971979	62	0.833000	92	0.054717
33	0.970605	63	0.820169	93	0.040528
34	0.969158	64	0.806274	94	0.029085
35	0.967630	65	0.791245	95	0.020158

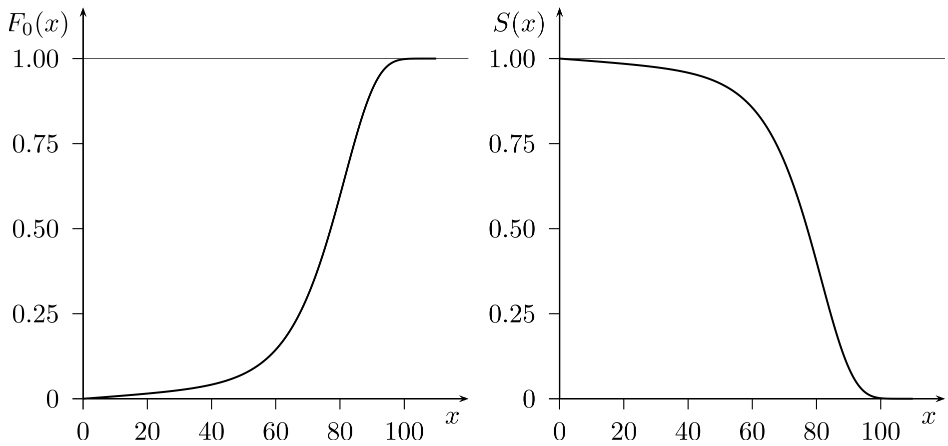


Figura 2.1. Esempio di funzione di ripartizione della durata della vita umana e della relativa funzione di sopravvivenza

$$= \mathbb{P}(T_0 \le x + k \,|\, T_0 > x) \ . \tag{2.2}$$

Misura la probabilità che l'individuo raggiunga al più l'età $x + t$, condizionata all'informazione disponibile alla data di valutazione, cioè all'evento che abbia raggiunto l'età x. Per tenere conto dell'informazione $T_0 > x$ si è usata nella (2.1) la probabilità condizionata $\mathbb{P}_t$, mentre nella (2.2), che usa il linguaggio della probabilità non condizionata $\mathbb{P}$, occorre esplicitare il condizionamento a quell'evento.

Usando la definizione di probabilità condizionata[3] si può esprimere la funzione di ripartizione F_x tramite la funzione di ripartizione F_0 o tramite la funzione di sopravvivenza S:

$$\begin{aligned} F_x(k) &= \frac{\mathbb{P}(x < T_0 \le x + k)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} \\ &= \frac{F_0(x + k) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} && (2.3) \\ &= \frac{S(x) - S(x + k)}{S(x)} && (2.4) \\ &= 1 - \frac{S(x + k)}{S(x)} \ . && (2.5) \end{aligned}$$

Le relazioni (2.3), (2.4) e (2.5) mostrano che la distribuzione di probabilità della durata residua della vita di un individuo di età corrente x è completamente nota quando si conosce una delle seguenti:
– la funzione di ripartizione $F_x(k)$ per $k \in [0, \omega_x)$;
– la funzione di ripartizione $F_0(k)$ per $k \in [x, \omega)$;
– la funzione di sopravvivenza $S(k)$ per $k \in [x, \omega)$.

2.2 Le notazioni attuariali standard

Nella matematica attuariale sono in uso da molti anni e in tutto il mondo alcune notazioni standard per indicare le probabilità di sopravvivenza e di morte; nonostante siano un po' pesanti e, per certi versi, un po' datate, ci atterremo all'uso standard.

[3] PROBABILITÀ CONDIZIONATA. Dati due eventi A e B con $\mathbb{P}(B) \neq 0$, la probabilità di A condizionata a B è

$$\mathbb{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \ . \qquad \square$$

2.2.1 Le probabilità di vita e di morte

Sia $k \in [0, \omega_x)$; le probabilità di sopravvivenza dopo k anni e di morte entro k anni dell'individuo di età x alla data di valutazione si indicano con

$$ {}_kp_x = \mathbb{P}_t(T_x > k) = 1 - F_x(k) = \frac{S(x+k)}{S(x)} \quad , \tag{2.6} $$

$$ {}_kq_x = \mathbb{P}_t(T_x \leq k) = 1 - {}_kp_x = 1 - \frac{S(x+k)}{S(x)} \quad . \tag{2.7} $$

Si usa la convenzione di omettere l'indice sinistro nel caso di $k = 1$ e si scrive semplicemente

$$ q_x = {}_1q_x \qquad \text{e} \qquad p_x = {}_1p_x \quad . $$

Dalle proprietà della funzione di ripartizione, agli estremi del dominio della variabile k risulta

$$ {}_0p_x = 1 \quad , \qquad \lim_{k \to \omega_x} {}_kp_x = 0 \quad , $$
$$ {}_0q_x = 0 \quad , \qquad \lim_{k \to \omega_x} {}_kq_x = 1 \quad . $$

Il comportamento di ${}_kp_x$ e ${}_kq_x$ all'estremo ω_x esprime il fatto che il nostro individuo morirà al più tardi fra ω_x anni.

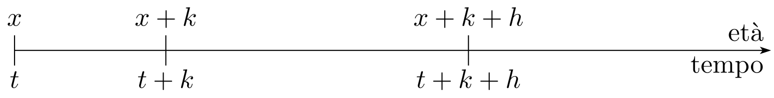
Esempio numerico 2.1. Se si assume che, alla data odierna di valutazione, l'individuo abbia età $x = 30$ anni e si assume che la sua funzione di sopravvivenza sia quella riportata nella tabella 2.1, si ha che

$$ {}_5p_{30} = \mathbb{P}_t(T_{30} > 5\ \ ) = \frac{S(35)}{S(30)} = \frac{0.967630}{0.974534} = 99.2916\% \quad , $$
$$ {}_{10}p_{30} = \mathbb{P}_t(T_{30} > 10) = \frac{S(40)}{S(30)} = \frac{0.958458}{0.974534} = 98.3504\% \quad , $$
$$ {}_{20}p_{30} = \mathbb{P}_t(T_{30} > 20) = \frac{S(50)}{S(30)} = \frac{0.926795}{0.974534} = 95.1014\% \quad , $$
$$ {}_{30}p_{30} = \mathbb{P}_t(T_{30} > 30) = \frac{S(60)}{S(30)} = \frac{0.855744}{0.974534} = 87.8106\% \quad , $$
$$ {}_{50}p_{30} = \mathbb{P}_t(T_{30} > 50) = \frac{S(80)}{S(30)} = \frac{0.402976}{0.974534} = 41.3507\% \quad , $$
$$ {}_{60}p_{30} = \mathbb{P}_t(T_{30} > 60) = \frac{S(90)}{S(30)} = \frac{0.091805}{0.974534} = \ \ 9.4204\% \quad . $$

□

2.2.2 La probabilità di morte differita

La probabilità di morte ${}_hq_x$ è la probabilità che l'individuo muoia in un intervallo di tempo di durata h anni che parte dalla data di valutazione. Nella trattazione delle polizze vita occorrerà considerare anche la probabilità che l'individuo muoia in un intervallo di tempo di durata h anni, ma con inizio dopo k anni dalla data di valutazione, come illustrato dallo schema dei temi e delle età:



Si chiama *probabilità di morte differita* e si indica con

$$ {}_{k|h}q_x = \mathbb{P}_t(k < T_x \leq k+h) = \mathbb{P}(x+k < T_0 \leq x+k+h \,|\, T_0 > x) \ . $$

La sbarretta verticale nell'indice sinistro separa l'entità del differimento k dalla durata h del periodo di riferimento per il calcolo la probabilità. Usando le proprietà della funzione di ripartizione F_x e la (2.5), risulta

$$ \begin{aligned} {}_{k|h}q_x &= F_x(k+h) - F_x(k) \\ &= 1 - \frac{S(x+k+h)}{S(x)} - \left[1 - \frac{S(x+k)}{S(x)}\right] \\ &= \frac{S(x+k) - S(x+k+h)}{S(x)} \ . \end{aligned} $$

Si noti che, per definizione,

$$ {}_{0|h}q_x = {}_hq_x \ . \tag{2.8} $$

Valgono inoltre le seguenti identità notevoli:

$$ {}_{k|h}q_x = {}_kp_x - {}_{k+h}p_x \ , \tag{2.9} $$

$$ {}_{k|h}q_x = {}_{k+h}q_x - {}_kq_x \tag{2.10} $$

di verifica pressocché immediata. La (2.9) può essere interpretata osservando che se l'individuo dovesse morire tra $t+k$ e $t+k+h$, allora dovrà essere stato vivo in $t+k$ e morto (non vivo) in $t+k+h$; la (2.10) discende dalla (2.9) passando alle probabilità complementari.

Esempio numerico 2.2. Nelle stesse ipotesi dell'esempio numerico 2.1, si ha che

$$
{}_{15}q_{30} = \frac{S(30) - S(45)}{S(30)} = \frac{0.974534 - 0.945597}{0.974534} = 2.9693\% \ ,
$$

mentre

$$
{}_{5|10}q_{30} = \frac{S(35) - S(45)}{S(30)} = \frac{0.967630 - 0.945597}{0.974534} = 2.2609\% \ .
$$

Per la (2.10) la differenza fra i due valori è

$$
{}_{15}q_{30} - {}_{5|10}q_{30} = {}_{5}q_{30}
$$

e infatti

$$
{}_{5}q_{30} = 1 - {}_{5}p_{30} = 1 - 99.2916\% = 0.7084\% \ ,
$$

avendo già calcolato ${}_{5}p_{30}$ nell'esempio numerico 2.1. □

Nel caso particolare di durate intere, applicando ripetutamente le (2.9) e (2.10) e la condizione iniziale (2.8), si ottengono le identità notevoli per k intero

$$
{}_{k}q_{x} = \sum_{h=1}^{k} {}_{h-1|1}q_{x} \ , \tag{2.11}
$$

$$
1 = {}_{k}p_{x} + \sum_{h=1}^{k} {}_{h-1|1}q_{x} \ . \tag{2.12}
$$

La (2.11) esprime che se l'individuo dovesse morire entro i prossimi k anni, allora morirà necessariamente in uno degli anni compresi fra il primo e k-esimo; la (2.12) esprime simmetricamente che o l'individuo sarà in vita allo scadere del k-esimo anno, o sarà morto in uno degli anni intermedi.

Esempio numerico 2.3. Si consideri un individuo di età $x = 40$ anni, con funzione di sopravvivenza quella riportata nella tabella 2.1. Risulta che

$$
{}_{5}q_{40} = \frac{S(40) - S(45)}{S(40)} = \frac{0.958458 - 0.945597}{0.958458} = 1.341820\% \ ,
$$

e che

$$
{}_{0|1}q_{40} = \frac{S(40) - S(41)}{S(40)} = \frac{0.958458 - 0.956239}{0.958458} = 0.231541\% \ ,
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{1|1}q_{40} &= \frac{S(41)-S(42)}{S(40)} = \frac{0.956239-0.953860}{0.958458} = 0.248192\% \ , \\
{}_{2|1}q_{40} &= \frac{S(42)-S(43)}{S(40)} = \frac{0.953860-0.951305}{0.958458} = 0.266522\% \ , \\
{}_{3|1}q_{40} &= \frac{S(43)-S(44)}{S(40)} = \frac{0.951305-0.948557}{0.958458} = 0.286691\% \ , \\
{}_{4|1}q_{40} &= \frac{S(44)-S(45)}{S(40)} = \frac{0.948557-0.945597}{0.958458} = 0.308873\% \ ,
\end{aligned}
$$

Sommando le cinque probabilità di morte differite, che sono riferite a ciascuno degli anni interi del quinquennio considerato, si verifica immediatamente che $\sum_{h=1}^{5} {}_{h-1|1}q_{40} = {}_5q_{40}$, cioè che vale la (2.11). □

Se si assume che anche ω_x sia intero, si hanno infine le relazioni notevoli fra probabilità di sopravvivenza e di morte differita

$$
\sum_{h=k+1}^{\omega_x} {}_{h-1|1}q_x = {}_kp_x \ , \tag{2.13}
$$

$$
\sum_{h=1}^{\omega_x} {}_{h-1|1}q_x = 1 \ . \tag{2.14}
$$

La (2.13) dipende dal fatto che se l'individuo sarà in vita fra k anni, allora morirà necessariamente in uno degli anni interi che seguono il k-esimo; la (2.14) è il caso particolare della (2.13) per $k = 0$.

2.2.3 Le probabilità condizionate alla sopravvivenza a una data futura

In riferimento al solito individuo di età x alla data di valutazione t, si consideri la probabilità di sopravvivenza dopo $k+h$ anni, condizionata alla sopravvivenza dopo i primi k anni

$$
{}_hp_{x+k} = \mathbb{P}_t(T_x > k+h \,|\, T_x > k) \ . \tag{2.15}
$$

Per la definizione di probabilità condizionata si ha che

$$
\begin{aligned}
{}_hp_{x+k} &= \frac{\mathbb{P}_t(\{T_x > k+h\} \cap \{T_x > k\})}{\mathbb{P}_t(T_x > k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}_t(T_x > k+h)}{\mathbb{P}_t(T_x > k)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{{}_{k+h}p_x}{{}_k p_x} \tag{2.16}$$

$$= \frac{\dfrac{S(x+k+h)}{S(x)}}{\dfrac{S(x+k)}{S(x)}}$$

$$= \frac{S(x+k+h)}{S(x+k)} \tag{2.17}$$

La (2.16) mostra la relazione che c'è fra la probabilità condizionata ${}_h p_{x+k}$ e la probabilità ${}_{k+h}p_x$ che si riferisce allo stesso evento ma non è condizionata o, meglio, è condizionata al fatto che l'individuo abbia età x alla data di valutazione. L'effetto del condizionamento $T_x > k$ può essere visto anche nel confronto della (2.17) con la

$${}_{k+h}p_x = \frac{S(x+k+h)}{S(x)} \quad ,$$

che è la (2.6) scritta per la durata $h+k$: hanno lo stesso numeratore perché si riferiscono allo stesso evento e il diverso condizionamento si riflette nella differenza fra i denominatori.

In modo complementare si ha probabilità di morte entro $k+h$, condizionata alla sopravvivenza dopo i primi k anni:

$$\begin{aligned} {}_h q_{x+k} &= \mathbb{P}_t(T_x \leq k+h \,|\, T_x > k) && (2.18)\\ &= 1 - \mathbb{P}_t(T_x > k+h \,|\, T_x > k) \\ &= 1 - {}_h p_{x+k} \\ &= \frac{S(x+k) - S(x+k+h)}{S(x+k)} \quad . && (2.19) \end{aligned}$$

Per via del condizionamento si tratta della probabilità di morte nel periodo $(t+k, t+k+h]$ ed è quindi significativo il confronto con la probabilità di morte differita

$${}_{k|h}q_x = \frac{S(x+k) - S(x+k+h)}{S(x)} \quad ,$$

che esprime la probabilità di morte nello stesso periodo, ma senza condizionare alla sopravvivenza in $t+k$. Come per il confronto fra le probabilità di vita, il diverso condizionamento agisce sul denominatore, lasciando invariato il numeratore. È inoltre immediato ottenere la relazione

$${}_h q_{x+k} = \frac{{}_{k|h}q_x}{{}_k p_x} \quad , \tag{2.20}$$

che quantifica la differenza fra le due probabilità.

Osservazione 2.2. Le probabilità condizionate (2.15) e (2.18) sono riferite ad un individuo che alla data t ha età x anni e non ad un individuo che in t ha età $x+k$. Il segno "+" nell'indice destro dei simboli ${}_hp_{x+k}$ e ${}_hq_{x+k}$, è purtroppo infelice ma standard. Va interpretato non come simbolo di somma ma come un separatore tra l'età corrente e la durata del primo periodo, che fornisce il condizionamento. Ha quindi un ruolo simile al segno "|" nell'indice sinistro delle probabilità di morte differita. □

Esempio numerico 2.4. Si consideri un individuo di età corrente $x = 25$ anni, caratterizzato dalla funzione di sopravvivenza della tabella 2.1. Si ponga $k = 10$ anni e $h = 15$ anni. Risulta

$$\begin{aligned}
{}_{10}p_{25} &= \frac{S(35)}{S(25)} = \frac{0.967630}{0.980051} = 98.7326\% \ , \\
{}_{25}p_{25} &= \frac{S(50)}{S(25)} = \frac{0.926795}{0.980051} = 94.5660\% \ , \\
{}_{15}p_{25+10} &= \frac{S(50)}{S(35)} = \frac{0.926795}{0.967630} = 95.7799\%
\end{aligned}$$

e, come prescritto dalla (2.16), si verifica che

$${}_{25}p_{25} = 94.5660\% = 98.7326\% \times 95.7799\% = {}_{10}p_{25} \cdot {}_{15}p_{25+10} \ .$$

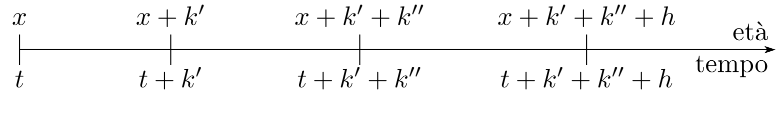
Analogamente

$$\begin{aligned}
{}_{10|15}q_{25} &= \frac{S(35)-S(50)}{S(25)} = \frac{0.967630-0.926795}{0.980051} = 4.16659\% \ , \\
{}_{15}q_{25+10} &= 1 - {}_{15}p_{25+10} = 4.22007\%
\end{aligned}$$

e, coerentemente con la (2.20), si ha

$${}_{10|15}q_{25} = 4.16659\% = 98.7326\% \times 4.22007\% = {}_{10}p_{25} \cdot {}_{15}q_{25+10} \ .$$ □

Si può naturalmente considerare anche la probabilità di morte condizionata alla sopravvivenza dopo k' anni, differita di ulteriori k'' anni e relativa ad un periodo di h anni. Lo schema delle età e dei tempi è:



Questa probabilità si indica con

$$_{k''|h}q_{x+k'}$$

e si verifica immediatamente che

$$_{k''|h}q_{x+k'} = \frac{_{k'+k''|h}q_x}{_{k'}p_x} \quad . \tag{2.21}$$

La relazione (2.21) è una relazione fra la probabilità di morte differita e la probabilità di morte differita e condizionata ed estende la (2.20), che ne è un caso particolare per $k' = k$ e $k'' = 0$.

Se si assume che k sia una durata intera, la (2.16) può essere applicata iterativamente su intervalli temporali unitari per ottenere la

$$_kp_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+k-1} = \prod_{\ell=1}^{k} p_{x+\ell-1} \tag{2.22}$$

e, passando alle probabilità complementari di morte, la

$$_kq_x = 1-(1-q_x)\cdot(1-q_{x+1})\cdots(1-q_{x+k-1}) = 1-\prod_{\ell=1}^{k}(1-q_{x+\ell-1}) \quad . \tag{2.23}$$

2.3 Le ipotesi del modello probabilistico tradizionale

Il modello probabilistico è stato sviluppato fino ad ora in riferimento ad

- una fissata data di valutazione t
- un fissato individuo, di età x alla data di valutazione.

In teoria occorrerebbe quindi avere a disposizione una diversa funzione di sopravvivenza per ogni distinto individuo che si intende considerare, ma questo è inconcepibile nella pratica: una compagnia di assicurazioni ha tipicamente da alcune decine di migliaia a svariate centinaia di migliaia di assicurati. Un'estensione universalmente accettata è quella di considerare collettivi omogenei (per esempio per sesso) di coetanei ed assegnargli un'unica funzione di sopravvivenza, tipicamente stimata con tecniche statistiche.

Possono tuttavia esserci difficoltà anche in questo approccio, come accade in Italia dove non sono disponibili statistiche su base generazionale. Per questo motivo si ricorre spesso ad una ulteriore approssimazione e si usa una stessa funzione di sopravvivenza “media” per individui (o collettivi) di età diversa alla data di valutazione. Per illustrare le conseguenze di quest'ipotesi, si considerino due individui di età x e $y = x + k$ alla data di valutazione t, con $k > 0$. Se si indicano con S^x e S^y le funzioni di sopravvivenza dei due individui, la probabilità del primo di essere in vita in $t + k + h$, condizionata alla sua sopravvivenza dopo i primi k anni è

$$
{}_h p_{x+k} = \frac{S^x(x+k+h)}{S^x(x+k)} \quad ,
$$

mentre la probabilità del secondo di essere in vita in $t + h$ è

$$
{}_h p_y = \frac{S^y(y+h)}{S^y(y)} = \frac{S^y(x+k+h)}{S^y(x+k)} \quad .
$$

Le due espressioni differiscono unicamente per la diversa funzione di sopravvivenza, che è quella specifica di ciascuno dei due individui.[4] Se invece si usa un'unica funzione di sopravvivenza per entrambi, allora $S^x = S^y$ e le due probabilità coincidono. In particolare ciò comporta che la distribuzione di probabilità della durata residua della vita (e quindi le probabilità di vita, di morte, di morte differita, ...) dell'individuo con età maggiore coincide con la distribuzione di probabilità della durata di vita dell'individuo più giovane, condizionata al fatto che egli risulti in vita all'età $x + k$.

Osservazione 2.3. In presenza di quest'ipotesi, il simbolo “+” nell'indice destro della probabilità ${}_h p_{x+k}$ riacquista il significato algebrico. □

Le distribuzioni di probabilità che abbiamo fino a qui considerato sono tutte legate ad una data di valutazione t. Sorge spesso la necessità di considerare la distribuzione di probabilità della durata della vita di un individuo ad una data futura s. Naturalmente, alla data t, la distribuzione di probabilità $\mathbb{P}_s$ è aleatoria, perché dipende da eventi che possono accadere in $[t, s]$ e che possono modificare le opinioni probabilistiche sulla durata della vita dell'individuo in particolare o di una collettività in generale. Se però si assume che queste non mutino, e quest'ipotesi adotta costantemente per le basi tecniche del I ordine, allora la distribuzione di probabilità della durata della vita al tempo s dipende solo dall'età dell'individuo a quella data ed è determinata dalla stessa funzione di sopravvivenza. In particolare la probabilità ${}_h p_{x+k}$, che nell'ipotesi di un'unica funzione di sopravvivenza

[4] Si ricordi l'osservazione 2.2 sul significato del simbolo “+” nell'indice destro di ${}_h p_{x+k}$.

per tutte le generazioni, assumeva i due significati coincidenti di probabilità alla data t per l'individuo di età $x + k$ e di probabilità condizionata alla data t per l'individuo di età x, assuma ora il terzo significato di probabilità alla data s per l'individuo di età x alla data t.

2.4 Tavole di sopravvivenza

Spesso la funzione di sopravvivenza viene assegnata per valori interi di x; viene cioè tabulata per $x = 0, 1, \ldots, \omega$, naturalmente con $S(0) = 1$ e $S(\omega) = 0$. Per questioni di migliore leggibilità, viene inoltre moltiplicata per una potenza di dieci, solitamente 100 000, detta *radice della tavola*, per consentirne una migliore leggibilità. Il risultato è quello che si chiama una *tavola di sopravvivenza*, che può essere relativa ad una generazione (*tavola generazionale*) o all'intera popolazione, eventualmente distinguendo tra maschi e femmine, a seconda dell'ipotesi di utilizzo (e delle modalità di costruzione).

Si osservi che, nelle formule, i dati della tavola possono essere sostituiti alla funzione di sopravvivenza nonostante il fattore moltiplicativo. La funzione di sopravvivenza compare infatti sempre in rapporti e pertanto il fattore moltiplicativo si semplifica.

Capitolo 3

Le polizze tradizionali non rivalutabili

3.1 La legge di equivalenza intertemporale finanziario-attuariale

Nell'approccio attuariale tradizionale italiano si considera una legge di equivalenza intertemporale basata su

– una *legge esponenziale* con tasso annuo $i \geq 0$ fissato (*tasso tecnico*, *ipotesi finanziaria*);
– un modello probabilistico basato su un'unica *funzione di sopravvivenza* S fissata e usata per tutte le età e per tutte le date di valutazione (*ipotesi demografica*)

La coppia (i, S), che determina completamente la legge di equivalenza intertemporale, viene chiamata *base tecnica*.

Fissata una base tecnica (i, S), un istante di valutazione t, un importo X_s pagabile in $s \geq t$ e legato alla durata della vita di un individuo, il *valore attuale attuariale* $V(t, X_s)$ è il valore in t di X_s calcolato secondo la base tecnica (i, S):

$$V(t, X_s) = \mathbb{E}_t(X_s) v^{s-t} \ ,$$

dove $v = (1 + i)^{-1}$ è il fattore di sconto annuo della legge esponenziale di tasso annuo i.

Osservazione 3.1. In base a quanto visto nel paragrafo 1.3, se (i, S) è una base tecnica del I ordine il valore $V(t, X_s)$ calcolato secondo (i, S) è il premio (unico) puro in t del contratto che paga X_s in s. Se invece l'ipotesi demografica riflette le opinioni probabilistiche dell'assicuratore e la legge esponenziale di tasso annuo i è allineata con la legge di equivalenza finanziaria in vigore sul mercato al tempo t, il valore coincide con il premio (unico) equo. □

3.2 Classificazione in base alla tipologia di prestazioni

Fissata una base tecnica (i, S), si consideri un individuo di età x anni che stipula una polizza al tempo $t = 0$.

3.2.1 Prestazioni di capitale

Capitale differito

La prestazione di *capitale differito* (CD) con durata n anni prevede il pagamento di un capitale assicurato C dopo n anni, a condizione che l'assicurato sia in vita a quella data. La durata n viene chiamata anche *differimento*.

La prestazione aleatoria pagata dalla polizza al tempo n è quindi

$$Y_n = \begin{cases} C & \text{se l'assicurato sarà in vita in } n \text{, cioè se } T_x > n, \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

l'aleatorietà della prestazione riguarda il pagamento o meno della prestazione che, se verrà pagata, sarà comunque C.

Se si indica con $\mathbb{1}_{\{T_x>n\}}$ la funzione indicatrice[1] dell'evento $\{T_x > n\}$, la prestazione contrattualmente prevista può essere scritta nella forma

$$Y_n = C\mathbb{1}_{\{T_x>n\}} \ .$$

e può essere pertanto vista come un contratto di tipo zero-coupon, con pagamento aleatorio.

Nel modello tradizionale il valore all'emissione della prestazione risulta essere

$$\begin{aligned} V(0, Y_n) &= C V(0, \mathbb{1}_{\{T_x>n\}}) = C\,\mathbb{E}_0\left(\mathbb{1}_{\{T_x>n\}}\right) v^n = C\,\mathbb{P}_0(T_x > n) v^n \\ &= C\,{}_np_x\, v^n \ . \end{aligned}$$

Viene spesso usata la notazione

$$ {}_n\mathrm{E}_x = {}_np_x\, v^n \tag{3.1}$$

per indicare il valore di una prestazione di capitale differito unitario dopo n anni riferito ad una testa di età corrente x. In base a questa notazione si ha quindi

$$V(0, Y_n) = C\,{}_n\mathrm{E}_x \ .$$

[1] La funzione indicatrice dell'evento A è una variabile aleatoria che varrà 1 se A risulterà vero, 0 altrimenti; risulta inoltre che $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

Temporanea caso morte

Una polizza *temporanea caso morte* (TCM) di durata n anni prevede il pagamento di un capitale assicurato C alla data del decesso dell'assicurato, qualora questo si verifichi entro n anni dalla stipula.

La prestazione assicurata è quindi prevista alla data T_x, può essere scritta nella forma

$$Y_{T_x} = \begin{cases} C & \text{se } T_x \leq n, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed è quindi caratterizzata da una data di pagamento aleatoria, oltre che dall'aleatorietà del pagamento stesso, che potrebbe non esserci se l'assicurato sarà in vita alla scadenza.

Tradizionalmente si assume per semplicità che il pagamento non avvenga alla data di decesso dell'assicurato, ma alla fine dell'anno di ricorrenza anniversaria nel quale il decesso si sia verificato. Poiché si è posto a $t = 0$ la data di emissione della polizza, ciò significa che i pagamenti possano verificarsi solo a tempio interi e, poiché si può scomporre l'evento $\{T_x \leq n\}$ nell'unione disgiunta

$$\{T_x \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{k-1 < T_x \leq k\} \quad ,$$

la prestazione contrattuale può essere allora descritta come un vettore di pagamenti aleatori $\boldsymbol{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ ai tempi $\boldsymbol{t} = \{1, 2, \ldots, n\}$, dove per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} Y_k &= \begin{cases} C & \text{se } k-1 < T_x \leq k, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ &= C\, \mathbb{1}_{\{k-1 < T_x \leq k\}} \quad . \end{aligned}$$

Con questa semplificazione il valore alla stipula dello zero-coupon della scomposizione in scadenza in k è dato da

$$V(0, Y_k) = CV(0, \mathbb{1}_{\{k-1<T_x \leq k\}}) = C\, \mathbb{P}_0(k-1 < T_x \leq k) v^k = C\, {}_{k-1|1}q_x\, v^k \quad .$$

Il valore delle prestazioni complessivamente previste dalla polizza è quindi

$$V(0, \boldsymbol{Y}) = \sum_{k=1}^{n} V(0, Y_k) = C \sum_{k=1}^{n} {}_{k-1|1}q_x\, v^k \quad .$$

Viene spesso usata la notazione

$$
{}_n\mathrm{A}_x = \sum_{k=1}^{n} {}_{k-1|1}q_x \, v^k \tag{3.2}
$$

per indicare il valore della prestazione temporanea caso morte con capitale assicurato unitario. Si noti che se $i = 0$ risulta ${}_n\mathrm{A}_x = {}_nq_x$.

Temporanea caso morte con capitale assicurato variabile. Una variante della TCM è la TCM con capitale assicurato variabile in modo prefissato. Per ogni anno k è definito contrattualmente uno specifico capitale assicurato C_k e la prestazione prevista per il tempo k è

$$
Y_k = C_k \mathbb{1}_{\{k-1<T_x\leq k\}} \quad .
$$

Il valore alla stipula della prestazione è quindi

$$
V(0, \boldsymbol{Y}) = \sum_{k=1}^{n} C_k \, {}_{k-1|1}q_x \, v^k \quad .
$$

Un esempio tipico è quello di polizza con capitale assicurato decrescente linearmente: fissato il capitale assicurato C_1, si ha

$$
\begin{aligned}
C_2 &= C_1 - \frac{1}{n}C_1 \quad = \frac{n-1}{n}C_1 \quad , \\
C_3 &= C_2 - \frac{1}{n}C_1 \quad = \frac{n-2}{n}C_1 \quad , \\
&\dots \\
C_n &= C_{n-1} - \frac{1}{n}C_1 = \frac{1}{n}C_1 \quad .
\end{aligned}
$$

Un altro esempio tipico, diffuso soprattutto nelle compagnie di bancassicurazione, è quello dove il capitale assicurato decresce come il debito residuo di un mutuo sottoscritto dall'assicurato. In questo caso, normalmente, il *beneficiario* della prestazione è il mutuante, che tipicamente impacchetta la polizza assieme al mutuo in un unico prodotto, per tutelarsi contro il rischio che la morte del mutuatario possa interrompere l'ammortamento del debito.

Vita intera

Una polizza di *vita intera* (VI) è il caso limite della polizza temporanea caso morte, con durata $n = \omega_x$. L'aleatorietà del contratto riguarda quindi solo la data di pagamento: l'assicuratore dovrà comunque pagare, prima o poi, il capitale assicurato. Si possono ripetere tutte le considerazioni svolte nel paragrafo precedente e la notazione in uso per il valore di una vita intera con capitale assicurato unitario è

$$\mathrm{A}_x = \sum_{k=1}^{\omega_x} {}_{k-1|1}q_x \, v^k \quad . \tag{3.3}$$

Osservazione 3.2. Nel caso $i = 0$ risulta

$$\mathrm{A}_x = \sum_{k=1}^{\omega_x} {}_{k-1|1}q_x = 1 \tag{3.4}$$

e il valore della vita intera non dipende dall'ipotesi demografica e coincide con il capitale assicurato. □

Osservazione 3.3. Se la base tecnica demografica prevede che $\omega_x = +\infty$, il termine destro della (3.3) è una serie numerica a termini non negativi. Poiché il termine generale della serie è ${}_{k-1|1}q_x \, v^k \leq {}_{k-1|1}q_x$ e poiché nel caso $i = 0$ si ha $\mathrm{A}_x = 1$, la serie converge ad una somma minore o uguale a 1. Il valore della vita intera dipende quindi, per $i \neq 0$, sia dal tasso tecnico che dalla base tecnica demografica. □

Mista

Una polizza *mista* di durata n anni paga il capitale assicurato C sia in caso di vita a scadenza che alla data del decesso, se questo avviene entro la scadenza. Può pertanto essere vista come un portafoglio di due polizze: una capitale differito e un temporanea caso morte con lo stesso capitale assicurato. Unendo i risultati ottenuti nelle sezioni dedicate alle due componenti possiamo descrivere le prestazioni della polizza mista come un vettore $\boldsymbol{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ ai tempi $\boldsymbol{t} = \{1, 2, \ldots, n\}$, dove per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$ si ha

$$Y_k = \begin{cases} C & \text{se } k-1 < T_x \leq k \text{ (prestazione caso morte in } k) \\ C & \text{se } k = n \text{ e } T_x > n \text{ (prestazione caso vita a scadenza),} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

il cui valore è la somma dei valori delle due componenti:

$$V(0,\boldsymbol{Y}) = C\left({}_n\mathrm{E}_x + {}_n\mathrm{A}_x\right) \quad .$$

Come nel caso della vita intera, anche nella polizza mista l'aleatorietà del contratto riguarda la data di pagamento della prestazione e non l'importo: l'assicuratore ha la certezza di dovere corrispondere la prestazione ma non se alla scadenza (caso vita) o prima (caso premorienza).

Osservazione 3.4. Nel caso di tasso tecnico nullo $i = 0$ si ha che

$${}_n\mathrm{E}_x + {}_n\mathrm{A}_x = 1$$

e il valore della mista non dipende dalla base demografica e coincide con il capitale assicurato. □

Polizza mista con capitale assicurato vita e morte differenti. Una variante della polizza mista è la polizza mista con capitale assicurato caso vita C^{v} diverso dal capitale assicurato caso morte C^{m}. Il vettore delle prestazioni contrattualmente previste per questa polizza è

$$Y_k = \begin{cases} C^{\mathrm{m}} & \text{se } k-1 < T_x \leq k, \\ C^{\mathrm{v}} & \text{se } k = n \text{ e } T_x > n, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e il valore della polizza è

$$V(0,\boldsymbol{Y}) = C^{\mathrm{v}}{}_n\mathrm{E}_x + C^{\mathrm{m}}{}_n\mathrm{A}_x \quad .$$

Naturalmente si possono operare le scomposizioni

$$V(0,\boldsymbol{Y}) = C^{\mathrm{v}}\left({}_n\mathrm{E}_x + {}_n\mathrm{A}_x\right) + \left(C^{\mathrm{m}} - C^{\mathrm{v}}\right){}_n\mathrm{A}_x \tag{3.5}$$

e

$$V(0,\boldsymbol{Y}) = C^{\mathrm{m}}\left({}_n\mathrm{E}_x + {}_n\mathrm{A}_x\right) + \left(C^{\mathrm{v}} - C^{\mathrm{m}}\right){}_n\mathrm{E}_x \quad . \tag{3.6}$$

La scomposizione (3.5), che è interessante soprattutto nel caso $C^{\mathrm{m}} > C^{\mathrm{v}}$, sottintende la scomposizione del contratto in un portafoglio di una mista normale, con capitale assicurato C^{v}, e una TCM, con capitale assicurato $C^{\mathrm{m}} - C^{\mathrm{v}}$. La (3.6), significativa soprattutto nel caso $C^{\mathrm{v}} > C^{\mathrm{m}}$, sottintende invece la scomposizione in una mista normale, con capitale assicurato C^{m}, più un capitale differito, con capitale assicurato $C^{\mathrm{v}} - C^{\mathrm{m}}$.

Capitalizzazione

Un contratto di capitalizzazione di durata n prevede che al contraente venga pagato a scadenza un capitale C con certezza, indipendentemente quindi dalla durata della sua (o di altrui) vita. Tecnicamente non è quindi un contratto di assicurazione. Non lo è nemmeno giuridicamente, anche se la normativa lo prevede come una forma contrattuale che per essere commercializzata ha bisogno di una particolare autorizzazione, che è inclusa nella più restrittiva autorizzazione a vendere contratti di assicurazione del ramo vita.

Il valore alla data di stipula del contratto è ovviamente

$$V(0, C_n) = C v^n \quad .$$

Termine fisso

La prestazione di una polizza a *termine fisso* è simile alla prestazione di una polizza mista, con l'unica differenza che la prestazione caso morte, anziché essere pagata alla data del decesso dell'assicurato, viene pagata alla scadenza n della polizza. Se facciamo riferimento ad una polizza con capitale assicurato caso vita C^{v} e capitale assicurato caso morte C^{m}, il contratto prevede un'unica prestazione Y_n al tempo n, definita da

$$\begin{aligned} Y_n &= \begin{cases} C^{\mathrm{v}} & \text{se } T_x > n, \\ C^{\mathrm{m}} & \text{se } T_x \leq n \end{cases} \\ &= C^{\mathrm{v}} \mathbb{1}_{\{T_x > n\}} + C^{\mathrm{m}} \mathbb{1}_{\{T_x \leq n\}} \quad . \end{aligned}$$

Vi è quindi incertezza nell'importo della prestazione, che però verrà corrisposta con certezza alla scadenza.

Poiché

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left(\mathbb{1}_{\{T_x > n\}} \right) &= \mathbb{P}_0(T_x > n) = {}_n p_x = 1 - {}_n q_x \quad , \\ \mathbb{E}_0 \left(\mathbb{1}_{\{T_x \leq n\}} \right) &= \mathbb{P}_0(T_x \leq n) = {}_n q_x = 1 - {}_n p_x \quad , \end{aligned}$$

il valore della prestazione è

$$V(0, Y_n) = C^{\mathrm{v}} \, {}_n p_x \, v^n + C^{\mathrm{m}} \, {}_n q_x \, v^n$$

e può essere scritto nella forma

$$V(0, Y_n) = C^{\mathrm{m}} \, v^n + (C^{\mathrm{v}} - C^{\mathrm{m}}) \, {}_n \mathrm{E}_x \quad ,$$

che fa riferimento alla scomposizione della termine fisso in un portafoglio di una capitalizzazione, con capitale a scadenza C^{m}, più un capitale differito che integra (algebricamente) la prestazione nel caso di vita a scadenza. Naturalmente si può alternativamente operare la scomposizione del valore

$$V(0, Y_n) = C^{\mathrm{v}} v^n + (C^{\mathrm{m}} - C^{\mathrm{v}})_n q_x \, v^n \ ,$$

che fa riferimento alla scomposizione della termine fisso in una capitalizzazione che paga C^{v} più un contratto che prevede l'integrazione (in senso algebrico) di $C^{\mathrm{m}} - C^{\mathrm{v}}$ a scadenza in caso di premorienza. Naturalmente, nel caso $C^{\mathrm{v}} = C^{\mathrm{m}}$ la prestazione "degenera" nella prestazione di capitalizzazione.

3.2.2 Prestazioni di rendita vitalizia

Una *rendita vitalizia* è una prestazione che prevede il pagamento periodico di un importo monetario a patto che l'assicurato sia in vita; non è prevista nessuna prestazione in caso di decesso dell'assicurato. Nel seguito faremo riferimento soltanto al caso di periodicità annuale e rata costante R.[2]

Una rendita vitalizia può essere *temporanea*, quando la prestazione si esaurisce dopo un certo numero di anni. Come nel caso delle *rendite certe* (non subordinate alla durata della vita dell'assicurato), le rendite vitalizie possono essere *anticipate*, quando ciascuna rata è pagata all'inizio dell'anno di riferimento, o *posticipate*, quando la rata è pagata a fine anno.

Rendita vitalizia immediata

La rendita vitalizia è *immediata* quando inizia alla data di stipula. Indicheremo con Y_k il pagamento contrattualmente previsto al tempo k.

Rendita vitalizia immediata posticipata. Risulta che per ogni $k > 0$

$$Y_k = R \, \mathbb{1}_{\{T_x > k\}} \tag{3.7}$$

e il valore alla stipula è quindi

$$V(0, \boldsymbol{Y}) = R \, \mathrm{a}_x \ ,$$

[2]Le *rendite vitalizie frazionate*, nelle quali la rata viene pagata con periodicità subannuale, sono in realtà più frequenti nella pratica assicurativa italiana, ma possono essere trattate in modo simile a quanto verrà fatto per il caso annuale; le rendite con rata variabile deterministicamente sono invece poco frequenti, mentre il caso di rata rivalutabile verrà trattato in seguito.

dove

$$\mathrm{a}_x = \sum_{k=1}^{\omega_x} {}_k p_x \, v^k \quad . \tag{3.8}$$

Rendita vitalizia immediata anticipata. In questo caso le rate sono pagate a inizio anno. La prestazione al tempo $k > 0$ è ancora espressa dalla (3.7) e si aggiunge la prestazione (certa) alla stipula $Y_0 = R$. Il valore della rendita è

$$V(0, \boldsymbol{Y}) = R\, \ddot{\mathrm{a}}_x \quad ,$$

dove

$$\ddot{\mathrm{a}}_x = \sum_{k=0}^{\omega_x} {}_k p_x \, v^k = 1 + \mathrm{a}_x \quad . \tag{3.9}$$

Rendite temporanee. Se n è la *durata* in anni della rendita vitalizia immediata, nel caso posticipato si ha

$$Y_k = \begin{cases} R\, \mathbb{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } 0 < k \le n, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e il valore è

$$V(0, \boldsymbol{Y}) = R\, {}_n\mathrm{a}_x \quad ,$$

dove

$${}_n\mathrm{a}_x = \sum_{k=1}^{n} v^k \, {}_k p_x \quad . \tag{3.10}$$

Nel caso anticipato si ha invece

$$Y_k = \begin{cases} R\, \mathbb{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } 0 \le k < n, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$V(0, \boldsymbol{Y}) = R\, {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x \quad ,$$

$${}_n\ddot{\mathrm{a}}_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \, v^k = 1 + {}_n\mathrm{a}_x - {}_n p_x \, v^n \quad . \tag{3.11}$$

Rendite vitalizie differite

Se il contratto prevede che la rendita vitalizia sia erogata dopo un differimento di m anni si ha la prestazione di *rendita vitalizia differita*, che può essere temporanea o meno, anticipata o posticipata. Sono quindi previste due fasi contrattuali: il *periodo di differimento*, durante il quale non vengono erogate prestazioni, e il *periodo di pagamento della rendita* che, dal punto di vista dell'assicurato, è detto anche *periodo di godimento della rendita*.

Se si pone

$$ {}_{m|}\mathrm{a}_x = \sum_{k=m+1}^{\omega_x} {}_k p_x \, v^k \quad , \tag{3.12} $$

$$ {}_{m|n}\mathrm{a}_x = \sum_{k=m+1}^{m+n} {}_k p_x \, v^k \quad , \tag{3.13} $$

$$ {}_{m|}\ddot{\mathrm{a}}_x = \sum_{k=m}^{\omega_x} {}_k p_x \, v^k = {}_m p_x \, v^m + {}_{m|}\mathrm{a}_x = {}_m\mathrm{E}_x + {}_{m|}\mathrm{a}_x \quad , \tag{3.14} $$

$$ \begin{aligned} {}_{m|n}\ddot{\mathrm{a}}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_k p_x \, v^k &= {}_m p_x \, v^m + {}_{m|n}\mathrm{a}_x - {}_{m+n}p_x \, v^{m+n} \\ &= {}_m\mathrm{E}_x + {}_{m|n}\mathrm{a}_x - {}_{m+n}\mathrm{E}_x \quad , \end{aligned} \tag{3.15} $$

il valore alla stipula delle varie tipologie di rendita vitalizia differita risulta

$$ V(0,\boldsymbol{Y}) = \begin{cases} R \, {}_{m|}\mathrm{a}_x & \text{nel caso posticipato,} \\ R \, {}_{m|n}\mathrm{a}_x & \text{nel caso posticipato temporaneo di durata } n, \\ R \, {}_{m|}\ddot{\mathrm{a}}_x & \text{nel caso anticipato,} \\ R \, {}_{m|n}\ddot{\mathrm{a}}_x & \text{nel caso anticipato temporaneo di durata } n. \end{cases} $$

Ci sono delle relazioni notevoli che collegano i simboli attuariali “a” differiti con i loro corrispondenti immediati e che dipendono dalla proprietà di scindibilità della legge esponenziale e dalla relazione (2.16) fra la probabilità di sopravvivenza condizionata e non condizionata, illustrata nel paragrafo 2.2.3 del capitolo 2. La proprietà di scindibilità comporta infatti che per ogni $k \geq m$ si ha

$$ v^k = v^m \, v^{m-k} \quad , $$

mentre per la (2.16)

$$ {}_k p_x = {}_m p_x \, {}_{k-m} p_{x+m} \quad . $$

Combinando le due proprietà si ha, per esempio, che la (3.12) può essere scritta nella forma

$$ {}_{m|}\mathrm{a}_x = \sum_{k=m+1}^{\omega_x} {}_m p_x \, {}_{k-m}p_{x+m} \, v^m \, v^{m-k} = {}_m p_x \, v^m \sum_{k=m+1}^{\omega_x} {}_{k-m}p_{x+m} \, v^{k-m} $$

e, ricordando la (3.1) e operando il cambiamento di indice $h = k - m$ nella somma, si ha che

$$ {}_{m|}\mathrm{a}_x = {}_m\mathrm{E}_x \sum_{h=1}^{\omega_x} {}_h p_{x+m} \, v^h = {}_m\mathrm{E}_x \, \mathrm{a}_{x+m} \quad , \quad . \tag{3.16} $$

Il valore a_{x+m}, essendo calcolato con probabilità condizionate, va inteso come valore della rendita vitalizia immediata al termine del differimento, condizionato alla sopravvivenza dell'individuo a quella data e il simbolo "+" del suo indice va inteso come non come somma ma come separatore dell'età corrente con la durata del differimento (cfr. l'osservazione 2.2 nel paragrafo 2.2.3 del capitolo 2). Nell'approccio tradizionale, tuttavia, si assume un'unica legge di sopravvivenza per tutti gli individui e per tutte le date di valutazione: la probabilità condizionata al termine del differimento coincide con la probabilità che verrà effettivamente calcolate a quella data e con la probabilità attuale calcolata per una testa di età $x + m$. La (3.16) diventa quindi, in quest'ipotesi, una relazione fra il valore attuale della rendita differita e il valore (effettivo) al termine del differimento, che coincide con il valore attuale di una rendita immediata scritta su una testa di età $x + m$.

Anche per le altre forme di rendita differita valgono relazioni notevoli analoghe:

$$ \begin{aligned} {}_{m|n}\mathrm{a}_x &= {}_m\mathrm{E}_x \, {}_n\mathrm{a}_{x+m} \quad , \\ {}_{m|}\ddot{\mathrm{a}}_x &= {}_m\mathrm{E}_x \, \ddot{\mathrm{a}}_{x+m} \quad , \\ {}_{m|n}\ddot{\mathrm{a}}_x &= {}_m\mathrm{E}_x \, {}_n\ddot{\mathrm{a}}_{x+m} \quad . \end{aligned} $$

3.2.3 Altre prestazioni

Oltre alle tipologie di prestazioni già discusse, le polizze vite presenti nella pratica commerciale italiana possono avere altre prestazioni, delle quali daremo solo alcuni cenni.

- Spesso i prodotti assicurativi comprendono delle *prestazioni complementari* che coprono rischi non propriamente vita. Tra queste ci sono:

- prestazioni complementari in caso di eventi legati alla *salute dell'assicurato* quali, ad esempio, la sopraggiunta invalidità permanente o la perdita dell'autosufficienza;
- assicurazioni complementari per *morte accidentale* (ACMA) e da *incidente stradale* (ACMAIS); un esempio diffuso è la polizza mista con ACMAIS, dove la prestazione caso morte viene raddoppiata in caso di morte accidentale e triplicata nel caso la morte accidentale sia dovuta a cause legate alla circolazione di autoveicoli;
- prestazioni legate al rendimento scolastico dell'assicurato, come nel caso della mista con *bonus scolastico*, dove la prestazione caso vita è indicizzata al voto di maturità dell'assicurato (naturalmente la polizza viene venduta a studenti non ancora diplomati).

• Normalmente all'assicurato viene data la facoltà di *riscattare* il contratto, risolvendolo e incassando anticipatamente la prestazione, che viene però abbattuta di una *penale di riscatto*. Da un punto di vista teorico si tratta di un'*opzione americana* con sottostante la prestazione stessa, anche se nella pratica non viene valutata come tale: l'esperienza mostra che non è possibile fare l'ipotesi che l'assicurato la eserciterà *razionalmente*, ma sarà piuttosto condizionato da esigenze indotte alle sue scelte di consumo.[3]

• Nelle polizze che prevedono una prestazione in caso di vita a scadenza è spesso incorporata l'opzione di potere convertire l'importo della prestazione a scadenza in una rendita vitalizia, a condizioni contrattualmente stabilite alla data di stipula del contratto (*opzione di conversione in rendita*). Simmetricamente, nelle polizze di rendita differita, è normalmente concessa all'assicurato l'opzione, da esercitarsi al termine del differimento, di convertire la rendita in un capitale immediatamente esigibile e contrattualmente fissato alla stipula del contratto (*opzione di conversione in capitale*). Come nel caso dell'opzione di riscatto, la valutazione di queste opzioni non può essere condotta in ipotesi di esercizio razionale.

[3]Nella valutazione delle opzioni americane, oltre all'ipotesi di mercati perfetti e privi di opportunità di arbitraggi non rischiosi, si fa l'ipotesi aggiuntiva di *esercizio razionale*, cioè che il detentore dell'opzione eserciti l'opzione al meglio e indipendentemente da situazioni personali. Si può dimostrare che l'ipotesi di esercizio razionale comporta che l'opzione verrà esercitata immediatamente non appena il *valore intrinseco* della stessa (pagamento contrattualmente previsto in caso di esercizio) risulti maggiore o uguale al *valore di prosecuzione* (valore di mercato dell'opzione residua in caso di non esercizio). Questo risultato fornisce la chiave per la valutazione delle opzioni americane.

- Un'altra opzione spesso inserita nei contratti che prevedono una prestazione in caso di vita a scadenza è il *differimento automatico di scadenza* (DAS). Anche questa è un'opzione che l'assicurato può esercitare in caso di vita alla scadenza contrattuale e prevede che la prosecuzione del contratto alle stesse condizioni, tacitamente rinnovabile di anno in anno finché l'assicurato non decida di incassare la prestazione.[4]

- Hanno una certa diffusione le polizze di *rendita vitalizia reversibile*, immediate o differite. Sono polizze in cui vi sono più assicurati (solitamente due) e la rendita vitalizia che viene pagata al primo assicurato è reversibile (in tutto o in parte) al secondo, se sarà in vita al decesso del primo. Si tratta pertanto di una polizza che è legata alle durate della vita di più teste.

3.3 Classificazione in base alla tipologia di premio

3.3.1 Polizze a premio unico

In una polizza a *premio unico* l'assicurato corrisponde all'assicuratore all'atto della stipula un premio in cambio delle prestazioni che percepirà nei tempi e nei modi previsti dalla tipologia contrattuale. In base alle considerazioni svolte nel paragrafo 1.3, il premio unico praticato dall'assicuratore, detto *premio di tariffa*, non può essere inferiore al premio unico puro, che già comprende il caricamento di sicurezza (*caricamento implicito*). Normalmente è strettamente maggiore e la maggiorazione rispetto al premio puro è il *caricamento esplicito*.

Se si fissa, al tempo zero di stipula una base tecnica del primo ordine (i, S), un flusso di prestazioni $\boldsymbol{Y}$ e l'età dell'assicurato x e si indica con U il premio unico puro e con T il premio unico di tariffa, dovrà risultare

$$T \geq U = V(0, \boldsymbol{Y})$$

e il caricamento esplicito (o *caricamento totale*) è

$$H = T - U \geq 0 \ ,$$

[4] Questa opzione ha senso in pratica solo nelle *polizze rivalutabili*, che discuteremo in seguito, dove le prestazioni vengono rivalutate annualmente e quindi, esercitando l'opzione, l'assicurato decide di differire la prestazione ad una data futura, dove verrà corrisposta maggiorata della rivalutazione.

Spesso si percentualizza il caricamento H rispetto al premio di tariffa T, ottenendo il *tasso di caricamento*

$$h = \frac{H}{T}$$

che risulta ovviamente non negativo e minore di 1. Il premio unico di tariffa è allora dato da

$$T = U + hT \quad ,$$

cioè da

$$T = \frac{U}{1-h} \quad . \tag{3.17}$$

Nella pratica assicurativa il caricamento esplicito H è chiamato *caricamento per spese* e l'idea è che l'assicuratore deve caricare il premio puro con il caricamento H per recuperare le spese che subisce durante la vita del contratto. La terminologia incorpora però spesso una certa dose di "ipocrisia", in quanto il caricamento H viene spesso calibrato in modo sovrabbondante, almeno nelle intenzioni dell'assicuratore, rispetto alle spese previste e incorpora quindi una parte di utile.

Tradizionalmente il caricamento totale viene scomposto in tre componenti non negative

$$H = G + A + I \quad , \tag{3.18}$$

dove G è la componente che compensa le *spese di gestione* della polizza, A le *spese di acquisizione* del contratto e I le *spese di incasso* del premio. Le prime sono le spese che l'assicuratore subisce negli anni di durata del contratto per la gestione amministrativa della polizza. Le spese di acquisizione sono la provvigione che l'assicuratore versa all'agente che ha procurato il contratto. Le spese di incasso del premio coprono le spese sostenute dalla rete di vendita per l'incasso del premio.[5]

Esempio 3.1. In un contratto di capitalizzazione con capitale a scadenza C e durata n il premio unico puro è $U = Cv^n$. Equivalentemente il capitale a scadenza è $C = U(1+i)^n$ e da quest'ultima relazione deriva il nome della forma contrattuale: la prestazione a scadenza è il premio unico puro capitalizzato. □

[5] Per le polizze a premio unico solitamente $I = 0$ perché il premio è versato all'atto dell'acquisizione del contratto; per le polizze a premio annuo si hanno invece caricamenti per spese di incasso positivi.

Esempio 3.2. In una polizza di capitale differito con capitale assicurato C, durata n ed età dell'assicurato x il premio unico puro è $U = C\,{}_n\mathrm{E}_x$. Equivalentemente

$$C = \frac{U}{{}_n\mathrm{E}_x} = \frac{U(1+i)^n}{{}_np_x} \geq U(i+1)^n$$

e la disuguaglianza è stretta se ${}_np_x < 1$, come accade di solito. □

3.3.2 Polizze a premio annuo

Il contratto può prevedere che il premio, anziché essere versato in unica soluzione alla stipula del contratto, possa essere rateizzato in rate annuali[6] anticipate, il cui pagamento è subordinato all'essere in vita dell'assicurato. In una *polizza a premio annuo* quindi, l'assicurato scambia una rendita vitalizia anticipata con le prestazioni previste dalla forma contrattuale e che sono a carico dell'assicuratore; normalmente il premio annuo è costante[7] e nel seguito faremo riferimento solo a questo caso. La rendita vitalizia dei premi è inoltre normalmente temporanea, con durata coincidente con la durata del contratto; possono aversi tuttavia casi di *durata pagamento premi* minore della durata contrattuale e questo capita tipicamente nelle vita intera.

Si assuma fissata la base tecnica del I ordine (i, S), il flusso $\boldsymbol{Y}$ delle prestazioni e l'età x dell'assicurato al tempo zero di stipula. In riferimento al caso di premio annuo costante e durata pagamento premi n, l'importo X_k che l'assicurato deve corrispondere all'assicuratore al tempo $k \geq 0$ è

$$X_k = \begin{cases} P\,\mathbb{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } k < n, \\ 0 & \text{se } k \geq n, \end{cases}$$

dove P è livello costante del premio annuo. Lo scambio del flusso $\boldsymbol{X} = \{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ dei premi con il flusso $\boldsymbol{Y}$ delle prestazioni è in equilibrio attuariale se e solo se

$$V(0, \boldsymbol{X}) = V(0, \boldsymbol{Y}) \ .$$

[6] Il caso di rata annuale è quello di riferimento, ma la rateizzazione può essere operata anche con rate di periodicità inferiore all'anno.

[7] Nella pratica assicurativa italiana vi sono esempi poco frequenti di *polizze a premio annuo crescente* in progressione geometrica, mentre il caso delle polizze a *premio annuo rivalutabile* può aversi nelle polizze rivalutabili che saranno discusse in seguito.

Poiché $V(0, \boldsymbol{Y}) = U$ e $V(0, \boldsymbol{X}) = P\, {}_n\ddot{a}_x$, la condizione di equilibrio diventa

$$P = \frac{U}{{}_n\ddot{a}_x} \ , \tag{3.19}$$

che è la formula di rateizzazione del premio unico U in n annualità vitalizie anticipate di importo P.

Il premio annuo calcolato in base alla (3.19) è naturalmente il *premio annuo puro*. Come nelle polizze a premio unico, il premio annuo effettivamente corrisposto dall'assicurato è il *premio annuo di tariffa* Π, ottenuto aggiungendo al premio annuo puro il caricamento per spese. Indicando nuovamente il tasso di caricamento totale con h, il premio annuo di tariffa risulta

$$\Pi = \frac{P}{1-h} \ . \tag{3.20}$$

Confrontando la (3.20) con la (3.17) e tenendo presente la (3.19) si ottiene che il premio annuo di tariffa Π è la rateizzazione del premio unico di tariffa T:

$$\Pi = \frac{T}{{}_n\ddot{a}_x} \ . \tag{3.21}$$

Nelle polizze a premio annuo l'assicurato ha tipicamente la facoltà di *riduzione della polizza*, che è un'opzione di trasformazione del contratto da premio annuo a premio unico: l'assicurato che si avvale questa facoltà interrompe il versamento dei premi, l'assicuratore riduce conseguentemente le prestazioni (secondo le modalità previste dal contratto e tipicamente applicando una *penale di riduzione*) e la polizza prosegue come se fosse stata orginariamente stipulata a premio unico e con le prestazioni ridotte.

Anche nelle polizze a premio annuo il caricamento totale $H = \Pi - P$ che grava sul premio annuo è la somma delle tre componenti imputabili alle spese di gestione, di acquisizione e di incasso.[8]

In particolare, il caricamento per spese di acquisizione serve per recuperare la provvigione di acquisizione, che tipicamente l'assicuratore versa all'agente alla data di stipula (provvigione precontata) e poi recupera durante la vita della polizza. Se infatti S è la provvigione di acquisizione, il caricamento per corrispondente A che grava su ciascuno degli n premi annui è calibrato in modo che $S = A\, {}_n\ddot{a}_x$ o, meglio, in modo che $S \leq A\, {}_n\ddot{a}_x$.

[8]Nel caso di frazionamento del premio annuo in rate subannuali, nella pratica assicurativa italiana vengono ulteriormente caricati gli *interessi di frazionamento*.

Il caricamento per spese di incasso è invece la parte del premio che viene trattenuta dalla rete di vendita e che può essere interpretata come una commissione che incentiva la rete a "seguire" negli anni la polizza e "vigilare" sull'effettivo versamento dei premi, cercando di "dissuadere" l'assicurato che volesse avvalersi dell'opzione di riduzione.

Tutte le forme contrattuali presenti nella pratica possono essere a premio unico o a premio annuo, con l'eccezione delle capitalizzazioni, per le quali il caso a premio annuo non è previsto.

3.3.3 Polizze a premio unico ricorrente

In una polizza a premio annuo l'assicuratore costituisce l'intero capitale assicurato alla stipula del contratto, nonostante l'assicurato versi a quella data solo la prima annualità di premio. In una polizza a *premio unico ricorrente*, invece, il capitale assicurato si costituisce progressivamente con il versamento dei premi. Lo schema contrattuale prevede il versamento di una successione di un certo numero di premi anticipati, ciascuno dei quali attiva una linea di assicurazione con un suo capitale assicurato. Il modo più semplice di considerare una polizza a premio unico ricorrente è pertanto quello di vederla come un *portafoglio di polizze a premio unico* della stessa tipologia, con la prima a pronti e le altre a termine. Siano Π_0, Π_1, ..., Π_{n-1} gli n premi unici ricorrenti di tariffa previsti dal contratto, pagabili rispettivamente ai tempi 0, 1, ..., $n-1$. Sia h_ℓ il tasso di caricamento totale del premio Π_ℓ. Se $\boldsymbol{Y}_\ell$ è il vettore di prestazioni della ℓ-esima linea, attivato con il versamento del premio ℓ-esimo, allora per ogni ℓ il premio unico ricorrente puro è

$$\Pi_\ell(1-h_\ell) = P_\ell = V(\ell, \boldsymbol{Y}_\ell) \ .$$

Nella pratica assicurativa, per semplicità contrattuale, il premio unico ricorrente di tariffa è normalmente costante.

Esempio 3.3. Un contratto di capitalizzazione a premio unico ricorrente Π (costante), tasso di caricamento h (costante) e durata di n anni, prevede il versamento di n premi ai tempi 0, 1, ..., $n-1$. Alla stipula si ha il versamento del primo premio, cui corrisponde il premio puro

$$P = \Pi(1-h)$$

e il capitale a scadenza

$$C_{0,n} = P(1+i)^n = \Pi(1-h)(1+i)^n \ .$$

Con il versamento del secondo premio al tempo 1 si attiva la seconda linea, che ha lo stesso premio puro e capitale a scadenza

$$C_{1,n} = P(1+i)^{n-1} = \Pi(1-h)(1+i)^{n-1} \ .$$

Così continuando, per ogni $\ell < n$ si attiva una linea con capitale a scadenza

$$C_{\ell,n} = P(1+i)^{n-\ell} = \Pi(1-h)(1+i)^{n-\ell} \ .$$

Alla scadenza contrattuale la prestazione complessiva è la somma delle prestazioni attivate con ciascuna linea:

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{n-1} C_{\ell,n} &= \Pi(1-h)\sum_{\ell=0}^{n-1}(1+i)^{n-\ell} \\ &= \Pi(1-h)(1+i)^n\sum_{\ell=0}^{n-1}(1+i)^{-\ell} \\ &= \Pi(1-h)\frac{(1+i)^n-1}{1-v} \ .\end{aligned}$$

Si osservi che il premio puro è costante ma, se $i > 0$, il capitale a scadenza attivato è decrescente con ℓ. □

Esempio 3.4. In una polizza di capitale differito a premio unico ricorrente Π (costante), tasso di caricamento h (costante) e durata n anni, il premio puro di ciascuna linea è sempre lo stesso e vale

$$P = \Pi(1-h) \ .$$

Il capitale assicurato della linea ℓ è

$$C_{\ell,n} = \frac{P}{{}_{n-\ell}\mathrm{E}_{x+\ell}} = \frac{\Pi(1-h)}{{}_{n-\ell}\mathrm{E}_{x+\ell}}$$

ed è quindi funzione di ℓ. □

Esempio 3.5. Anche in una polizza mista a premio unico ricorrente Π (costante), tasso di caricamento h (costante) e durata n anni il premio puro è costante: $P = \Pi(1-h)$. Il capitale assicurato attivato con la linea ℓ è

$$C_{\ell,n} = \frac{P}{{}_{n-\ell}\mathrm{E}_{x+\ell} + {}_{n-\ell}\mathrm{A}_{x+\ell}} = \frac{\Pi(1-h)}{{}_{n-\ell}\mathrm{E}_{x+\ell} + {}_{n-\ell}\mathrm{A}_{x+\ell}} \ .$$

La prestazione in caso di morte alla data k (che avviene prima del versamento del premio previsto in k, che è subordinato alla sopravvivenza dell'assicurato in k) è quella costituita con le k linee attivate fino a quella data:

$$Y_k = \sum_{\ell=0}^{k-1} C_{\ell,n} \ .$$

Il capitale assicurato caso vita a scadenza è la somma dei capitali assicurati costituiti con il versamento di tutti i premi

$$C_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{\ell,n}$$

e, rispetto alla polizza mista a premio annuo con lo stesso capitale assicurato caso vita, la prestazione caso morte in $k < n$ è minore. □

Nella pratica bancassicurativa le polizze a premio unico ricorrente sono più diffuse di quelle a premio annuo, perché sono più semplici da spiegare e da promuovere ai clienti degli sportelli bancari. Spesso vengono commercializzate senza penali di interruzione pagamento premi né di riscatto e, nel caso rivalutabile che verrà studiato in seguito, vengono presentate al cliente come un'alternativa all'investimento in un fondo comune.

3.3.4 La controassicurazione

La *controassicurazione* è una tipologia di prestazione caso morte che è collegata ai premi che l'assicurato versa. È abbinata tipicamente a polizze di capitale differito o di rendita differita e prevede che, in caso di decesso dell'assicurato durante il periodo di differimento, l'assicuratore restituisca i premi (compreso il caricamento) versatigli fino a quella data.

Polizze a premio unico con controassicurazione

In una polizza a premio unico la controassicurazione coincide con la prestazione temporanea caso morte, con capitale assicurato il premio unico di tariffa T. Se $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}}$ è il flusso delle prestazioni previste per il caso vita, n è la durata della copertura caso morte e h il tasso di caricamento totale, il premio unico puro U e il premio unico di tariffa T soddisfano il sistema

$$\begin{cases} U = V(0, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}}) + T \, {}_n\mathrm{A}_x \\ T = \dfrac{U}{1-h} \end{cases}$$

che ha per soluzione

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{V(0,\boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}})(1-h)}{1-h-{}_n\mathrm{A}_x} \quad , \\
T &= \frac{V(0,\boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}})}{1-h-{}_n\mathrm{A}_x} \quad .
\end{aligned}
$$

Esempio 3.6. Una polizza di capitale differito con controassicurazione a premio unico, con capitale assicurato C e differimento n coincide con una polizza mista di durata n anni, con capitale assicurato caso vita $C^{\mathrm{v}} = C$ e caso morte $C^{\mathrm{m}} = T$. Si ha quindi

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{C\,{}_n\mathrm{E}_x(1-h)}{1-h-{}_n\mathrm{A}_x} \quad , \\
T &= \frac{C\,{}_n\mathrm{E}_x}{1-h-{}_n\mathrm{A}_x} \quad .
\end{aligned}
$$

□

Esempio 3.7. Una polizza di rendita differita posticipata con controassicurazione a premio unico, rata della rendita R e differimento n è un portafoglio composto da una rendita differita e da una temporanea caso morte con capitale assicurato $C^{\mathrm{m}} = T$. La copertura caso morte è tipicamente contrattualmente prevista per il solo periodo di differimento e il premio unico puro e il premio unico di tariffa sono pertanto quindi

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{R\,{}_{n|}\mathrm{a}_x(1-h)}{1-h-{}_n\mathrm{A}_x} \quad , \\
T &= \frac{R\,{}_{n|}\mathrm{a}_x}{1-h-{}_n\mathrm{A}_x} \quad .
\end{aligned}
$$

□

Polizze a premio annuo con controassicurazione

In una polizza premio annuo la controassicurazione è una prestazione temporanea caso morte con capitale assicurato crescente. Per semplicità assumeremo che il contratto preveda che il premio annuo sia costante; la crescita della prestazione caso morte è allora in progressione aritmetica. Se infatti Π è il premio annuo di tariffa, la prestazione per il caso morte nel primo anno è $C_1^{\mathrm{m}} = \Pi$, nel secondo è $C_2^{\mathrm{m}} = 2\Pi$ e così via. Consideriamo per semplicità il caso di una polizza con durata pagamento premi coincidente con la durata n della polizza (del differimento nel caso di polizze di rendita differita). Il pagamento in caso morte al tempo $k \le n$ è quindi $C_k^{\mathrm{m}} = k\Pi$; sia $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}}$ il flusso delle prestazioni previste per il caso vita e h il tasso di caricamento totale. Il premio unico puro U e il premio unico di tariffa T soddisfano il sistema

$$\begin{cases} U = V(0, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}}) + \Pi \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \; {}_{k-1|1}q_x \, v^k \\ T = \dfrac{U}{1-h} \end{cases} \tag{3.22}$$

Usando il simbolo

$$ {}_n\mathrm{IA}_x = \sum_{k=1}^{n} k \; {}_{k-1|1}q_x \, v^k \tag{3.23}$$

e ricordando la (3.21), la soluzione del sistema (3.22) è

$$U = \frac{V(0, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}}) \, {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x \, (1-h)}{(1-h) \, {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ ,$$

$$T = \frac{V(0, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}}) \, {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x}{(1-h) \, {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ .$$

Il premio annuo puro e il premio annuo di tariffa sono quindi

$$P = \frac{U}{{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} = \frac{V(0, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}})(1-h)}{(1-h) \, {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ ,$$

$$\Pi = \frac{T}{{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} = \frac{V(0, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}})}{(1-h) \, {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ .$$

Esempio 3.8. In riferimento alle notazioni dell'esempio 3.6, se la polizza di capitale differito è a premio annuo, risulta

$$P = \frac{C \, {}_n\mathrm{E}_x \, (1-h)}{(1-h) \, {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ ,$$

$$\Pi = \frac{C \, {}_n\mathrm{E}_x}{(1-h) \, {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ . \qquad \square$$

Esempio 3.9. In riferimento alle notazioni dell'esempio 3.7, se la rendita differita è a premio annuo, i premi sono

$$P = \frac{R \, {}_{n|}\mathrm{a}_x \, (1-h)}{(1-h) \, {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ ,$$

$$\Pi = \frac{R \, {}_{n|}\mathrm{a}_x}{(1-h) \, {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ . \qquad \square$$

Polizze a premio unico ricorrente con controassicurazione

Nelle polizze a premio unico ricorrente la controassicurazione agisce su ogni linea del contratto e le logiche sono quindi le stesse delle polizze a premio unico.

Esempio 3.10. Una polizza di capitale differito con controassicurazione a premio unico ricorrente coincide con una polizza mista a premio unico ricorrente, con capitale assicurato caso morte (di ogni linea) il premio unico ricorrente di tariffa. □

Capitolo 4

La riserva matematica

4.1 Introduzione

La polizza, come si è visto, viene costruita in modo da essere in equilibrio attuariale alla data di stipula $t = 0$ e rispetto alla base tecnica del I ordine: se $\boldsymbol{X}$ è il flusso dei premi puri e $\boldsymbol{Y}$ il flusso delle prestazioni, risulta

$$V(0, \boldsymbol{X}) = V(0, \boldsymbol{Y}) \ .$$

L'equilibrio non permane però nel corso della durata del contratto.

Per le polizze a premio unico questo fatto è chiaro: ad un istante $t > 0$ che precede la scadenza della polizza l'unico premio previsto è già stato pagato, mentre, se il contratto non si è già concluso (ad esempio per la morte dell'assicurato), sono ancora previste prestazioni.

Il disequilibrio ad istanti successivi alla stipula sussiste anche nel caso di polizze a premio annuo.

Esempio 4.1. Si consideri una polizza mista a premio annuo, per una durata di n anni, tasso tecnico i, capitale assicurato C, stipulata da un assicurato di età x. Il flusso dei premi contrattualmente previsti è

$$X_k = \begin{cases} P\, \mathbb{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $P = C({}_n\mathrm{E}_x + {}_n\mathrm{A}_x)/{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x$ è il premio annuo puro.

Il flusso delle prestazioni $\boldsymbol{Y}$ è

$$Y_k = \begin{cases} C\, \mathbb{1}_{\{k-1 < T_x \le k\}} & \text{se } k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1, \\ C\, \mathbb{1}_{\{k-1 < T_x \le k\}} + C\, \mathbb{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } k = n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $t \le n$ un istante generico, che per semplicità assumeremo intero. Si assuma inoltre che all'istante t il contratto sia ancora in essere, cioè che l'assicurato sia ancora in vita. Se $0 \le t \le n-1$, all'istante t sono stati pagati t premi degli n previsti dal contratto.[1] Il flusso di premi residui è quindi una rendita vitalizia anticipata con rata P, durata $n-t$ e testa assicurata di età $x+t$. Se invece $t > n-1$, non ci sono più premi residui. Se si indica con $V(t, \boldsymbol{X})$ il valore dei premi residui in t, si ha quindi che

$$V(t, \boldsymbol{X}) = \begin{cases} P\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+1} & \text{se } t \le n-1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Alla stessa data t le prestazioni residue della polizza sono Y_{t+1}, Y_{t+2}, $\ldots$, Y_n e il flusso delle prestazioni residue coincide con il flusso di prestazioni di una polizza mista di durata con durata $n-t$, capitale assicurato C e testa assicurata di età $x+t$. Indicando con $V(t, \boldsymbol{Y})$ il valore delle prestazioni residue in t, si ha che

$$V(t, \boldsymbol{Y}) = C({}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} + {}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t}) \ .$$

Se $n > 1$ (per $n = 1$ la polizza è in realtà a premio unico) e $t > 0$ si può verificare che risulta sistematicamente $V(t, \boldsymbol{X}) < V(t, \boldsymbol{Y})$. $\square$

4.2 La riserva matematica

Si consideri al tempo $t > 0$, che per semplicità assumeremo intero, una polizza ancora in essere, stipulata al tempo zero da una testa di età x anni. Sia $\boldsymbol{X}$ il vettore dei premi previsti e $\boldsymbol{Y}$ il vettore delle prestazioni previste. La *riserva matematica (ai premi puri)* della polizza al tempo t, nell'ipotesi che questa sia ancora in-essere a quella data, è

$${}_tV_x = V(t, \boldsymbol{Y}) - V(t, \boldsymbol{X}) \ , \tag{4.1}$$

cioè il valore delle prestazioni residue in t meno il valore dei premi puri residui in t, calcolati entrambi secondo la base tecnica del I ordine.

La riserva matematica definita secondo la (4.1) è spesso chiamata *riserva matematica prospettiva*, in quanto è calcolata sulla base dei premi e delle prestazioni future rispetto alla data di valutazione. Per convenzione, nel calcolo della riserva matematica, si considerano già liquidate in t

[1] Poiché i premi annui sono anticipati, si immagina che il premio sia dovuto in t^+, cioè "un istante dopo t".

le eventuali prestazioni posticipate e non ancora liquidati l'eventuale premio in scadenza (che è anticipato) e le eventuali prestazione anticipate. La *riserva matematica completa* (detta anche *riserva di bilancio*), è invece calcolato "dopo tutto", considerando cioè liquidati tutti i premi e le prestazioni dovute in t.

La (4.1) definisce la riserva matematica come differenza fra la *riserva prestazioni* $V(t, \boldsymbol{Y})$ e la *riserva premi (puri)* $V(t, \boldsymbol{X})$. La riserva prestazioni può essere ulteriormente scomposta nella somma della *riserva prestazioni caso vita* $V(t, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}})$ con la *riserva prestazioni caso morte* $V(t, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{m}})$.

Si osservi che, per costruzione, alla data di stipula la riserva matematica risulta nulla, mentre la riserva di bilancio coincide con il premio puro (il premio unico o il primo premio annuo) versato dall'assicurato.

Esempio 4.2. In un contratto di capitalizzazione a premio unico U, con durata n anni, tasso tecnico i e capitale $C = U(1+i)^n$ si ha

$$ {}_0V_x = 0 \qquad\qquad {}_0V_x^+ = U = C\,(1+i)^{-n} \ , $$

mentre per $0 < t \leq n$ risulta

$$ {}_tV_x = C\,(1+i)^{-(n-t)} = {}_tV_x^+ \ . $$

□

Esempio 4.3. In una polizza mista a premio unico, con durata n anni, tasso tecnico i, capitale assicurato C ed età dell'assicurato alla stipula x, si ha

$$ {}_0V_x = 0 \qquad\qquad {}_0V_x^+ = U = C\,({}_n\mathrm{E}_x + {}_n\mathrm{A}_x) \ , $$

mentre per $0 < t \leq n$, se la polizza è ancora in vigore, cioè se l'assicurato non è deceduto, risulta

$$ {}_tV_x = C\,({}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} + {}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t}) = {}_tV_x^+ \ . $$

Naturalmente, la riserva prestazioni caso vita in t è $C\,{}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t}$, mentre la riserva prestazioni caso morte alla stessa data è $C\,{}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t}$. □

Esempio 4.4. In una polizza di rendita vitalizia differita posticipata a premio annuo, con differimento n anni, tasso tecnico i, rata della rendita assicurata R ed età dell'assicurato alla stipula x, si ha

$$ {}_0V_x = 0 \qquad\qquad {}_0V_x^+ = P = \frac{R\,{}_{n|}\mathrm{a}_x}{{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} \ ; $$

per $0 < t < n$, durante il differimento, se l'assicurato non è deceduto, risulta

$$ {}_tV_x = R\,{}_{n-t|}\mathrm{a}_{x+t} - P\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t} \qquad\qquad {}_tV_x^+ = {}_tV_x + P \ ; $$

per $t \geq n$, durante il periodo di godimento della rendita, sempre nell'ipotesi che l'assicurato sia ancora in vita, si ha infine

$$ {}_tV_x = R\,\mathrm{a}_{x+t} = {}_tV_x^+ \ . $$

Durante il periodo di differimento la riserva prestazioni è $R\,{}_{n-t|}\mathrm{a}_{x+t}$ e la riserva premi è $P\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}$. Nel periodo di godimento della rendita la riserva premi è nulla e la riserva prestazioni coincide con la riserva matematica. Poiché non sono previste prestazioni caso morte, la relativa riserva è nulla e la riserva prestazioni caso vita coincide con la riserva prestazioni. □

Esempio 4.5. Si consideri una polizza a premio annuo di capitale differito C per n anni con controassicurazione, tasso tecnico i ed età alla stipula x; sia P il premio annuo puro e Π il premio annuo di tariffa.

Se al tempo $0 < t < n$ la l'assicurato è ancora in vita, la riserva premi (puri) è

$$ V(t, \boldsymbol{X}) = P\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t} \ , $$

la riserva prestazioni caso vita è

$$ V(t, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}}) = C\,{}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} \ , $$

la riserva prestazioni caso morte è

$$ V(t, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{m}}) = \sum_{k=t+1}^{n} k\Pi\,{}_{k-t-1|1}q_{x+t}\,(1+i)^{-(k-t)} \ , $$

che, con il cambiamento di variabile $j = k-t$, può essere scritta nella forma

$$ \begin{aligned} V(t, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{m}}) &= \sum_{j=1}^{n-t}(t+j)\Pi\,{}_{j-1|1}q_{x+t}\,(1+i)^{-j} \\ &= t\Pi\sum_{j=1}^{n-t}{}_{j-1|1}q_{x+t}\,(1+i)^{-j} + \Pi\sum_{j=1}^{n-t} j\,{}_{j-1|1}q_{x+t}\,(1+i)^{-j} \\ &= \Pi\,(t\,{}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t} + {}_{n-t}\mathrm{IA}_{x+t}) \ . \end{aligned} $$

La riserva matematica è quindi

$$ {}_tV_x = C\,{}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} + \Pi\,(t\,{}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t} + {}_{n-t}\mathrm{IA}_{x+t}) - P\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t} \ . $$ □

Osservazione 4.1. Se si assume di effettuare le valutazioni alla data di emissione $t = 0$ della polizza, la riserva matematica ad una data futura $t > 0$ è definita nell'ipotesi che la polizza sia ancora in vigore a quella data. È quindi un valore *condizionato* a quell'ipotesi. Tranne che in casi particolari, come i contratti di capitalizzazione e le polizze a termine fisso, quest'ipotesi coincide con l'ipotesi che l'assicurato sia ancora in vita in t, cioè che $T_x > t$. □

Osservazione 4.2. Si noti l'analogia concettuale fra la riserva matematica di una polizza e il debito residuo di un mutuo: è in entrambi i casi il valore (netto) del contratto residuo. □

Osservazione 4.3. Tutte le polizze vita sono normalmente costruite in modo tale che, durante la loro vita contrattuale, la riserva matematica non diventi negativa. L'assicuratore costruisce cioè il contratto in modo tale da essere, nel senso della base tecnica del I ordine, sempre debitore e mai creditore nei confronti dell'assicurato. □

Osservazione 4.4. La riserva matematica o, meglio, la riserva matematica completa, è una grandezza bilancistica: essendo il valore netto dell'impegno residuo (netto) nei confronti dell'assicurato, l'assicuratore deve metterla a bilancio, investendola in attivi a copertura dell'impegno. □

4.3 Uno schema contrattuale generale

Nella trattazione che segue, per non dovere ripetere i risultati per le varie tipologie contrattuali, faremo riferimento ad un contratto generico, che chiameremo *polizza generica*, che prevede:

- premi (anticipati) pagabili in caso vita: alla scadenza intera k il premio pagabile in caso vita sarà indicato con P_k.
- prestazioni caso morte (posticipate): alla scadenza intera k la prestazione pagabile in caso di morte a quella data sarà indicata con C_k^{m};
- prestazioni caso vita anticipate: alla scadenza intera k la prestazione anticipata pagabile in caso di vita a quella data sarà indicata con C_k^{va};
- prestazioni caso vita posticipate: alla scadenza intera k la prestazione posticipata pagabile in caso di vita a quella data sarà indicata con C_k^{vp}.

Supporremo infine che, nel caso di morte dell'assicurato nell'anno $(k-1,k]$ (per k intero), il contratto si concluda con il pagamento della prestazione caso morte C_k^{m} al tempo k .

Le polizze a premio unico rientrano nello schema ponendo $P_0 = U$ e $P_k = 0$ per $k > 0$. Le polizze che prevedono n premi annui (anticipati) costanti P rientrano nello schema ponendo $P_k = P$ per $0 \leq k \leq n-1$ e $P_k = 0$ per $k \geq n$.

La distinzione fra prestazioni caso vita anticipate e posticipate è necessaria per ricomprendere nello schema le prestazioni di rendita (immediata o differita), che può essere anticipata o posticipata. Per le polizze che prevedono una prestazione di capitale differito in caso di vita alla scadenza n si assumerà convenzionalmente che tale prestazione sia di tipo anticipato: si può infatti interpretare come una prestazione che copre il "danno" costituito dall'essere in vita l'assicurato nel periodo $[n, T_x)$ ed è pagata all'inizio del periodo.

Lo schema contrattuale delineato è sufficientemente generale da comprendere tutte le tipologie contrattuali descritte nel capitolo 3, con l'eccezione dei contratti di capitalizzazione (che non sono polizze vita) e delle polizze a termine fisso, del resto poco frequenti. I risultati che otterremo saranno quindi validi per tutte le tipologie contrattuali, con le eccezioni appena esposte.

Se si considera una polizza generica stipulata al tempo zero da una testa di età x, ancora in essere al tempo t, la riserva matematica ${}_tV_x$ è calcolata considerando già liquidata la prestazione caso vita posticipata C_t^{vp} e non ancora pagati né il premio P_t né la prestazione caso vita anticipata C_t^{va}. La relazione tra riserva matematica e riserva di bilancio è quindi

$$ {}_tV_x^+ = {}_tV_x + P_t - C_t^{\mathrm{va}} \ . \tag{4.2} $$

Si noti che il "completamento" della riserva prevede il premio P_t vada sommato (e non sottratto), perché nel calcolo della riserva matematica si sottrae la riserva premi che comprende anche P_t. Per un motivo simmetrico nella (4.2) la prestazione C_t^{va} va sottratta (e non sommata), perché nel calcolo della riserva matematica tale prestazione si considera non ancora pagata e quindi compare nella riserva prestazioni con il segno positivo.

4.4 L'equazione di Fouret

Teorema 4.5 (equazione di Fouret). Se si considera al tempo t una polizza generica in essere a quella data, stipulata al tempo zero da una testa di età

x e con tasso tecnico i, vale la relazione

$$
{}_tV_x + P_t - C_t^{\mathrm{va}} = {}_{t+1}V_x\, p_{x+t}\, v + C_{t+1}^{\mathrm{m}}\, q_{x+t}\, v + C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\, p_{x+t}\, v \quad , \tag{4.3}
$$

dove, come al solito, $v = (1+i)^{-1}$.

Dimostrazione. Considerando separatamente le prestazioni caso morte, caso vita posticipate, caso vita anticipate e i premi (anticipati) e tendendo presente le convenzioni sul calcolo della riserva matematica in t, si ha che

$$
\begin{aligned}
{}_tV_x = &\sum_{k>0} C_{t+k}^{\mathrm{m}}\; {}_{k-1|1}q_{x+t}\, v^k + \sum_{k>0} C_{t+k}^{\mathrm{vp}}\; {}_k p_{x+t}\, v^k \\
&+ \sum_{k\geq 0} C_{t+k}^{\mathrm{va}}\; {}_k p_{x+t}\, v^k - \sum_{k\geq 0} P_{t+k}\; {}_k p_{x+t}\, v^k \quad .
\end{aligned}
$$

Se scorporiamo il primo addendo di ciascuna delle quattro somme ($k = 1$ nelle prime due e $k = 0$ nelle seconde due) otteniamo

$$
\begin{aligned}
{}_tV_x = &\; C_{t+1}^{\mathrm{m}}\; {}_{0|1}q_{x+t}\, v + C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\; {}_1 p_{x+t}\, v + C_t^{\mathrm{va}} - P_t \\
&+ \sum_{k>1} C_{t+k}^{\mathrm{m}}\; {}_{k-1|1}q_{x+t}\, v^k + \sum_{k>1} C_{t+k}^{\mathrm{vp}}\; {}_k p_{x+t}\, v^k \\
&+ \sum_{k\geq 1} C_{t+k}^{\mathrm{va}}\; {}_k p_{x+t}\, v^k - \sum_{k\geq 1} P_{t+k}\; {}_k p_{x+t}\, v^k \quad .
\end{aligned}
$$

Osservando che, in base alle relazioni (2.16) e (2.20) del capitolo 2

$$
\begin{aligned}
{}_k p_{x+t} &= p_{x+t}\; {}_{k-1}p_{x+t+1} && \text{per } k \geq 1, \\
{}_{k-1|1}q_{x+t} &= p_{x+t}\; {}_{k-2|1}q_{x+t+1} && \text{per } k > 1,
\end{aligned}
$$

nelle quattro somme si può raccogliere il fattore comune $p_{x+t}\, v$, ottenendo

$$
\begin{aligned}
{}_tV_x = &\; C_{t+1}^{\mathrm{m}}\; {}_{0|1}q_{x+t}\, v + C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\; {}_1 p_{x+t}\, v + C_t^{\mathrm{va}} - P_t \\
&+ \Bigg(\sum_{k>1} C_{t+k}^{\mathrm{m}}\; {}_{k-2|1}q_{x+t+1}\, v^{k-1} + \sum_{k>1} C_{t+k}^{\mathrm{vp}}\; {}_{k-1}p_{x+t+1}\, v^{k-1} \\
&\quad + \sum_{k\geq 1} C_{t+k}^{\mathrm{va}}\; {}_{k-1}p_{x+t+1}\, v^{k-1} - \sum_{k\geq 1} P_{t+k}\; {}_{k-1}p_{x+t+1}\, v^{k-1} \Bigg)\, p_{x+t}\, v \quad .
\end{aligned}
$$

Operando nelle somme il cambiamento di variabile $j = k-1$ (e quindi $k > 1$ diventa $j > 0$, $k \geq 1$ diventa $j > 0$ e $t+k$ diventa $t+1+j$) e ricordando che ${}_{0|1}q_{x+t} = q_{x+t}$ e che ${}_{1}p_{x+t} = p_{x+t}$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
{}_tV_x &= C^{\mathrm{m}}_{t+1}\, q_{x+t}\, v + C^{\mathrm{vp}}_{t+1}\, p_{x+t}\, v + C^{\mathrm{va}}_{t} - P_t \\
&\quad + \left(\sum_{j>0} C^{\mathrm{m}}_{t+1+j}\; {}_{j-1|1}q_{x+t+1}\, v^j + \sum_{j>0} C^{\mathrm{vp}}_{t+1+j}\; {}_{j}p_{x+t+1}\, v^j \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j\geq 0} C^{\mathrm{va}}_{t+1+j}\; {}_{j}p_{x+t+1}\, v^j - \sum_{j\geq 0} P_{t+1+j}\; {}_{j}p_{x+t+1}\, v^j \right) p_{x+t}\, v \quad .
\end{aligned}
$$

L'espressione nella parentesi tonda del membro destro è la riserva matematica in $t+1$; riarrangiando i termini dell'equazione si ottiene la tesi. □

L'equazione di Fouret stabilisce una relazione ricorrente tra la riserva matematica in t e quella in $t+1$. Se la si scrive risolta rispetto a ${}_{t+1}V_x$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
{}_{t+1}V_x &= \frac{{}_tV_x + P_t - C^{\mathrm{va}}_{t} - C^{\mathrm{m}}_{t+1}\, q_{x+t}\, v - C^{\mathrm{vp}}_{t+1}\, p_{x+t}\, v}{p_{x+t}\, v} \\
&= \frac{{}_tV_x + P_t - C^{\mathrm{va}}_{t}}{p_{x+t}\, v} - C^{\mathrm{m}}_{t+1}\, \frac{1 - p_{x+t}}{p_{x+t}} - C^{\mathrm{vp}}_{t+1}
\end{aligned}
$$

e questa relazione può essere usata per il calcolo ricorrente della riserva, a partire dalla condizione iniziale ${}_0V_x = 0$.

Si osservi che, usando la (4.2), l'equazione di Fouret può essere scritta nella forma

$$
{}_tV^{+}_x = {}_{t+1}V_x\, p_{x+t}\, v + C^{\mathrm{m}}_{t+1}\, q_{x+t}\, v + C^{\mathrm{vp}}_{t+1}\, p_{x+t}\, v \quad .
$$

Esempio 4.6. Per una polizza di capitale differito C a premio annuo, con durata del differimento n, età dell'assicurato alla stipula x, tasso tecnico i e premio annuo $P = C\; {}_n\mathrm{E}_x / {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x$, l'equazione di Fouret assume la forma

$$
{}_tV_x + P = {}_{t+1}V_x\, p_{x+t}\, v
$$

per ogni $t = 0, 1, \ldots, n-1$; per $t = n$ si ottiene invece

$$
{}_tV_x - C = 0 \quad .
$$

□

Esempio 4.7. Per una polizza mista a premio annuo, con capitale assicurato C, durata n, età dell'assicurato alla stipula x, tasso tecnico i e premio annuo puro $P = C\, \left({}_n\mathrm{E}_x + {}_n\mathrm{A}_x\right) / {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x$, l'equazione di Fouret assume la forma

$$
{}_tV_x + P = {}_{t+1}V_x\, p_{x+t}\, v + C\, q_{x+t}\, v
$$

per ogni $t = 0, 1, \ldots, n-1$; per $t = n$ diventa

$$ {}_tV_x - C = 0 \ . \qquad \square $$

Esempio 4.8. Si consideri una polizza di rendita vitalizia differita posticipata con controassicurazione a premio annuo, con rata della rendita R, durata del differimento n, età dell'assicurato alla stipula x, tasso tecnico i e premio annuo puro P e di tariffa Π. Durante il differimento ($t < n$) l'equazione di Fouret assume la forma

$$ {}_tV_x + P = {}_{t+1}V_x \, p_{x+t} \, v + (t+1)\Pi \, q_{x+t} \, v \ . $$

Nel periodo di godimento della rendita ($t \geq n$) si ha invece

$$ {}_tV_x = {}_{t+1}V_x \, p_{x+t} \, v + R \, p_{x+t} \, v \ . $$

Se, ferme restando le rimanenti condizioni contrattuali, la rendita assicurata fosse anticipata anziché posticipata, la forma dell'equazione durante il differimento rimarrebbe invariata (ma i valori numerici di P e Π sarebbero diversi a parità di rata R). Nel periodo di godimento della rendita ($t \geq n$) si avrebbe invece

$$ {}_nV_x - R = {}_{t+1}V_x \, p_{x+t} \, v \ . \qquad \square $$

4.5 Premio di rischio e premio di risparmio

Si consideri una polizza generica. Se si risolve l'equazione di Fouret (4.3) rispetto al premio P_t, si sostituisce $p_{x+t} = 1 - q_{x+t}$ e si riarrangiano i termini:

$$ \begin{aligned} P_t &= {}_{t+1}V_x \, p_{x+t} \, v + C^{\mathrm{m}}_{t+1} \, q_{x+t} \, v + C^{\mathrm{vp}}_{t+1} \, p_{x+t} \, v + C^{\mathrm{va}}_t - {}_tV_x \\ &= C^{\mathrm{m}}_{t+1} \, q_{x+t} \, v + {}_{t+1}V_x \, (1 - q_{x+t}) \, v - {}_tV_x + C^{\mathrm{va}}_t + C^{\mathrm{vp}}_{t+1} \, (1 - q_{x+t}) \, v \\ &= \left(C^{\mathrm{m}}_{t+1} - C^{\mathrm{vp}}_{t+1} - {}_{t+1}V_x \right) q_{x+t} \, v + \left({}_{t+1}V_x \, v - {}_tV_x + C^{\mathrm{vp}}_{t+1} \, v + C^{\mathrm{va}}_t \right) \end{aligned} $$

si ottiene una scomposizione notevole del premio P_t. Se si pone

$$ P^{\mathrm{R}}_t = \left(C^{\mathrm{m}}_{t+1} - C^{\mathrm{vp}}_{t+1} - {}_{t+1}V_x \right) q_{x+t} \, v \tag{4.4} $$

e

$$ P^{\mathrm{S}}_t = {}_{t+1}V_x \, v - {}_tV_x + C^{\mathrm{vp}}_{t+1} \, v + C^{\mathrm{va}}_t \tag{4.5} $$

si ha che

$$P_t = P_t^{\mathrm{R}} + P_t^{\mathrm{S}} \ . \tag{4.6}$$

Il primo addendo della scomposizione (4.6) è il *premio di rischio* P_t^{R}. È uguale al *capitale sotto rischio* $C_{t+1}^{\mathrm{m}} - C_{t+1}^{\mathrm{vp}} - {}_{t+1}V_x$ probabilizzato e scontato. Nel caso l'assicurato deceda nell'anno $t+1$, l'assicuratore dovrà corrispondere la prestazione caso morte C_{t+1}^{m} e non pagherà la prestazione caso vita posticipata C_{t+1}^{vp}; poiché avrà a disposizione la riserva ${}_{t+1}V_x$, se questa sarà minore della prestazione netta $C_{t+1}^{\mathrm{m}} - C_{t+1}^{\mathrm{vp}}$ egli subirà una perdita pari al capitale sotto rischio. Naturalmente, nel caso opposto di riserva maggiore della prestazione netta, il capitale sotto rischio è negativo e l'assicuratore avrà un guadagno anziché una perdita. Il premio di rischio è quindi il valore attuale attuariale in t della perdita che l'assicuratore subirà per il caso morte nell'anno $(t, t+1]$. La (4.4) quantifica quindi la parte del premio P_t che copre (in aspettativa) la perdita dell'assicuratore per il caso morte nell'anno $t+1$.

Il secondo addendo della scomposizione è il *premio di risparmio* P_t^{S}. È quello che rimane del premio P_t dopo che è stata scorporata la componente di rischio; va a finanziare la prestazione anticipata caso vita in t, la prestazione posticipata caso vita in $t+1$ e quelle (vita e morte) successive.

La scomposizione (4.6) è particolarmente significativa per polizze a premio annuo, ma può essere effettuata anche per polizze a premio unico. In tale caso, essendo nulli i premi successivi al primo, si avrà che premio di rischio e premio di risparmio sono uguali in valore assoluto ma di segno opposto.

La notazione usata per indicare il premio di rischio e il premio di risparmio è quella della tradizione attuariale; gli apici "R" e "S" sono le iniziali di "Risiko" (ted.: rischio) e "sparen" (ted.: risparmiare).

Esempio 4.9. In una polizza temporanea caso morte a premio annuo (puro) P, con capitale assicurato C, durata n anni, tasso tecnico i ed età alla stipula x, il premio di rischio e il premio di risparmio al tempo $t \le n-1$ assumono la forma

$$\begin{aligned} P_t^{\mathrm{R}} &= \left(C_{t+1}^{\mathrm{m}} - {}_{t+1}V_x\right) q_{x+t}\, v \\ &= \left[C\left(1 - {}_{n-t-1}\mathrm{A}_{x+t+1}\right) + P\, {}_{n-t-1}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t+1}\right] q_{x+t}\, v \ , \\ P_t^{\mathrm{S}} &= {}_{t+1}V_x\, v - {}_tV_x \\ &= C\left({}_{n-t-1}\mathrm{A}_{x+t+1}\, v - {}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t}\right) - P\left({}_{n-t-1}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t+1}\, v - {}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}\right) \ . \end{aligned}$$

In questa tipologia contrattuale non ci sono capitali caso vita che complicano la logica delle espressioni. Il premio di rischio è il valore attuale attuariale dell'integrazione di riserva che l'assicuratore deve operare al tempo $t+1$ per pagare la prestazione caso morte eventualmente occorsa nell'anno appena trascorso. Il premio di risparmio va a incrementare la riserva in $t+1$ per finanziare le prestazioni successive: a (4.5) può infatti essere scritta nella forma

$$ {}_{t+1}V_x = \left({}_tV_x + P_t^{\mathrm{S}}\right)(1+i) \ . \qquad \square $$

Esempio 4.10. In una polizza mista a premio annuo (puro) P, con capitale assicurato C, durata n anni, tasso tecnico i ed età alla stipula x, il premio di rischio e il premio di risparmio al tempo $t \leq n-1$ assumono la forma

$$ \begin{aligned} P_t^{\mathrm{R}} &= \left(C_{t+1}^{\mathrm{m}} - {}_{t+1}V_x\right) q_{x+t}\, v \\ &= \left[C\left(1 - {}_{n-t-1}\mathrm{E}_{x+t+1\,n-t-1}\mathrm{A}_{x+t+1}\right) + P\, {}_{n-t-1}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t+1}\right] q_{x+t}\, v \ , \\ P_t^{\mathrm{S}} &= {}_{t+1}V_x\, v - {}_tV_x \\ &= C\left({}_{n-t-1}\mathrm{E}_{x+t+1}\, v + {}_{n-t-1}\mathrm{A}_{x+t+1}\, v - {}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} - {}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t}\right) \\ &\quad - P\left({}_{n-t-1}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t+1}\, v - {}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}\right) \ . \end{aligned} $$

Si osservi che per $t = n-1$, la scomposizione dell'ultimo premio annuo fornisce

$$ \begin{aligned} P_{n-1}^{\mathrm{R}} &= \left(C_n^{\mathrm{m}} - {}_nV_x\right) q_{x+n-1}\, v = 0 \ , \\ P_{n-1}^{\mathrm{S}} &= P - P_{n-1}^{\mathrm{R}} \qquad\qquad\quad = P \ , \end{aligned} $$

che mostra come l'ultimo premio annuo sia tutto premio di risparmio. $\square$

Esempio 4.11. In una rendita vitalizia immediata, posticipata e temporanea a premio annuo (puro) P, con rata della rendita R, durata n anni, tasso tecnico i ed età alla stipula x, il premio di rischio e il premio di risparmio al tempo $t \leq n-1$ assumono la forma

$$ \begin{aligned} P_t^{\mathrm{R}} &= \left(-C_{t+1}^{\mathrm{vp}} - {}_{t+1}V_x\right) q_{x+t}\, v \\ &= -\left[R\left(1 + {}_{n-t-1}\mathrm{a}_{x+t+1}\right) - P\, {}_{n-t-1}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t+1}\right] q_{x+t}\, v \ , \\ P_t^{\mathrm{S}} &= {}_{t+1}V_x\, v + C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\, v - {}_tV_x \\ &= R\left({}_{n-t-1}\mathrm{a}_{x+t+1}\, v - {}_{n-t}\mathrm{a}_{x+t}\right) - P\left({}_{n-t-1}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t+1}\, v - {}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}\right). \end{aligned} $$

Il premio di rischio è negativo, perché in caso di morte dell'assicurato in $(t, t+1]$ l'assicuratore ha un profitto al tempo $t+1$, in quanto omette di versare la rata e incamera la riserva. $\square$

4.6 La riserva retrospettiva

Sempre nel caso della polizza generica, se si parte dall'equazione di Fouret scritta nella forma

$$ {}_tV_x + P_t - C_t^{\text{va}} = {}_{t+1}V_x\,(1 - q_{x+t})\,v + C_{t+1}^{\text{m}}\,q_{x+t}\,v + C_{t+1}^{\text{vp}}\,(1 - q_{x+t})\,v \ , $$

poiché nel membro sinistro compare $P_t = P_t^{\text{S}} + P_t^{\text{R}}$ e nel membro destro compare $P_t^{\text{R}} = C_{t+1}^{\text{m}}\,q_{x+t}\,v - C_{t+1}^{\text{vp}}\,q_{x+t}\,v - {}_{t+1}V_x\,q_{x+t}\,v$, semplificando il premio di rischio si ottiene

$$ {}_tV_x + P_t^{\text{S}} - C_t^{\text{va}} = \left({}_{t+1}V_x + C_{t+1}^{\text{vp}}\right)\,v \ , $$

cioè

$$ {}_{t+1}V_x = \left({}_tV_x + P_t^{\text{S}} - C_t^{\text{va}}\right)(1+i) - C_{t+1}^{\text{vp}} \ . \tag{4.7} $$

La (4.7) è un'espressione particolarmente significativa perché mostra come la riserva in $t+1$ si ottenga partendo dalla riserva in t, togliendo la prestazione caso vita anticipata in t, aumentando il risultato del premio di risparmio, capitalizzando il tutto al tasso tecnico e togliendo la prestazione caso vita posticipata in $t+1$. Nell'espressione non compaiono esplicitamente la prestazione caso morte in $t+1$, né le probabilità di sopravvivenza.

Partendo dalla solita condizione iniziale ${}_0V_x = 0$ e applicando ricorsivamente la (4.7) si ottiene

$$ \begin{aligned} {}_0V_x &= 0 \ , \\ {}_1V_x &= \left({}_0V_x + P_0^{\text{S}} - C_0^{\text{va}}\right)(1+i) - C_1^{\text{vp}} \\ &= \left(P_0^{\text{S}} - C_0^{\text{va}}\right)(1+i) - C_1^{\text{vp}} \ , \\ {}_2V_x &= \left({}_1V_x + P_1^{\text{S}} - C_1^{\text{va}}\right)(1+i) - C_2^{\text{vp}} \\ &= \left(P_0^{\text{S}} - C_0^{\text{va}}\right)(1+i)^2 + \left(P_1^{\text{S}} - C_1^{\text{va}}\right)(1+i) - C_1^{\text{vp}}\,(1+i) - C_2^{\text{vp}} \ , \\ {}_3V_x &= \left({}_2V_x + P_2^{\text{S}} - C_2^{\text{va}}\right)(1+i) - C_3^{\text{vp}} \\ &= \sum_{k=0}^{2}\left(P_k^{\text{S}} - C_k^{\text{va}}\right)(1+i)^{3-k} - \sum_{k=0}^{2} C_{k+1}^{\text{vp}}\,(1+i)^{3-k-1} \ , \\ \dots \\ {}_tV_x &= \sum_{k=0}^{t-1}\left(P_k^{\text{S}} - C_k^{\text{va}}\right)(1+i)^{t-k} - \sum_{k=0}^{t-1} C_{k+1}^{\text{vp}}\,(1+i)^{t-k-1} \ . \end{aligned} \tag{4.8} $$

La (4.8) è la soluzione in forma chiusa dell'equazione ricorrente (4.7) e mostra come la riserva in t sia il montante puramente finanziario dei premi di risparmio incassati fino a t (escluso), privati delle prestazioni caso vita anticipate pagate fino alla stessa data, meno il montante puramente finanziario delle prestazioni caso vita posticipate liquidate fino a t (compreso). Mostra quindi come la riserva venga costituita dal montante dei premi di risparmio al tasso tecnico, dal quale vengono però via via prelevate le risorse finanziarie per pagare le prestazioni caso vita. Il risultato è particolarmente significativo per forme contrattuali che non prevedono prestazioni caso vita prima di una certa scadenza (ad esempio polizze di capitale o rendita differita e polizze miste): fino a quella scadenza la riserva matematica è il montante finanziario dei premi di risparmio.

In base a questo risultato risulta chiaro come l'assicuratore debba gestire la polizza. Nell'ipotesi del I ordine egli riesce infatti a investire esattamente al tasso tecnico e paga le prestazioni secondo quanto previsto dalla base demografica del I ordine. In queste ipotesi, quindi, se l'assicuratore ogni anno:

- incassa i premi puri (a inizio anno),
- paga le prestazioni caso vita anticipate (a inizio anno),
- investe quello che rimane fino alla fine dell'anno;
- paga le prestazioni caso morte (a fine anno),
- paga le prestazioni caso vita posticipate (a fine anno),

si ritrova con un valore degli attivi che è esattamente uguale alla riserva matematica, cioè al valore residuo netto del suo impegno verso gli assicurati. È quindi coperto.

Naturalmente non è assolutamente detto che le ipotesi del I ordine si verifichino nella realtà, ma se sono sufficientemente prudenziali l'assicuratore ha una certa garanzia di rimanere coperto.

L'espressione (4.8) viene solitamente chiamata la *riserva retrospettiva.* Per la polizza generica che abbiamo considerato abbiamo visto quindi che la riserva retrospettiva coincide con la riserva prospettiva. Questo fatto non è vero in generale: ci sono forme assicurative nelle quali le due grandezze non coincidono. Si osservi che, per la polizza generica, la differenza fra la forma prospettiva e retrospettiva della riserva è concettualmente analoga alla differenza fra valore montante e valore residuo in una operazione puramente finanziaria: anche in quel caso, se l'operazione finanziaria è equa e la legge di equivalenza finanziaria è la legge esponenziale, le due grandezze coincidono.

4.7 La riserva come variabile aleatoria

Occorre osservare che la riserva matematica ${}_tV_x$ al tempo t è stata definita per polizze ancora in essere alla data t. Per la polizza generica, ciò significa che la riserva matematica è stata definita solo per una polizza in cui l'assicurato sia in vita al tempo t. In particolare, prima del tempo t, la riserva matematica non è nota ma è una variabile aleatoria, che varrà ${}_tV_x$ se l'assicurato sarà in vita al tempo t, zero se sarà morto al tempo t. In forma compatta si può scrivere la riserva matematica in t come ${}_tV_x\,\mathbb{1}_{\{T_x>t\}}$. Di questa variabile aleatoria si può calcolare l'aspettativa: in zero vale ad esempio $\mathbb{E}_0\left[{}_tV_x\,\mathbb{1}_{\{T_x>t\}}\right] = {}_tV_x\,{}_tp_x$.

Capitolo 5

Il valore intrinseco

5.1 Introduzione

La polizza è equa per costruzione, ma rispetto alla base tecnica del I ordine, che è aggravata in modo prudenziale rispetto alle aspettative dell'assicuratore. Egli si aspetta quindi che, nella realtà, si verifichi una rottura dell'equilibrio a suo favore, cioè che il contratto generi *utili.*

In questo capitolo si assume fissata una base demografica del II ordine, che riflette le aspettative dell'assicuratore. Le aspettative e le probabilità calcolate secondo questa base verranno indicate con l'apice "II". Quando sarà opportuno evidenziare la differenza fra aspettative e probabilità del I e del secondo ordine, anche quelle del I ordine potranno avere l'apice "I".

5.2 L'utile

Si consideri al tempo t una polizza generica in essere, stipulata al tempo zero da un assicurato di età x; in particolare si assume che l'assicurato sia in vita al tempo t, cioè che $T_x > t$. Come si è discusso nel capitolo precedente, al tempo t, dopo avere incassato l'eventuale premio P_t e pagata l'eventuale prestazione anticipata caso vita C_t^{va}, l'assicuratore investe la riserva di bilancio ${}_tV_x^+$ della polizza. Il rendimento I_{t+1} degli attivi a copertura nel periodo $(t, t+1]$ è in generale una variabile aleatoria al tempo t e diverrà nota al tempo $t+1$. Alla fine dell'anno, al tempo $t+1$, l'assicuratore

- ha un portafoglio di attivi con valore ${}_tV_x^+(1 + I_{t+1})$,
- deve pagare la prestazione caso morte $C_{t+1}^{\mathrm{m}}\, \mathbb{1}_{\{T_x \le t+1\}}$,
- deve pagare la prestazione caso vita posticipata $C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\, \mathbb{1}_{\{T_x > t+1\}}$,
- deve ricostituire la riserva matematica in $t+1$, cioè ${}_{t+1}V_x\, \mathbb{1}_{\{T_x > t+1\}}$.

Si noti che tutte le grandezze che compaiono nell'elenco sono aleatorie al tempo t e diventeranno note al tempo $t+1$. L'aleatorietà del valore degli attivi è di tipo unicamente finanziario, mentre l'aleatorietà delle altre grandezze è legata solo alla durata della vita dell'assicurato.[1]

Al tempo $t+1$, dopo avere pagato le prestazioni e avere ricostituito la riserva, l'assicuratore si troverà nella posizione finanziaria netta

$$\begin{aligned} U_{t+1} = {}_tV_x^+(1+I_{t+1}) - C_{t+1}^{\mathrm{m}}\,\mathbb{1}_{\{T_x \le t+1\}} - C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\,\mathbb{1}_{\{T_x > t+1\}} \\ - {}_{t+1}V_x\,\mathbb{1}_{\{T_x > t+1\}} \quad . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Se U_{t+1} dovesse rivelarsi positivo, sarà l'importo "avanzato" che l'assicuratore potrà "staccare"; se invece dovesse essere $U_{t+1} < 0$, gli attivi a copertura della polizza non saranno stati sufficienti a pagare le prestazioni dell'anno e a ricostituire la riserva: l'assicuratore dovrà quindi integrare con capitale proprio per onorare gli impegni nei confronti dell'assicurato. La grandezza U_{t+1} è quindi l'*utile* (in senso algebrico: utile effettivo se positivo, disutile se negativo) prodotto dalla polizza nell'anno $(t, t+1]$ e temporalmente collocato al tempo $t+1$.

5.3 La scomposizione dell'utile: la formula di Homans

L'equazione di Fouret (4.3) può essere riscritta nella forma

$$0 = {}_tV_x^+(1+i) - C_{t+1}^{\mathrm{m}}\,q_{x+t} - C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\,p_{x+t} - {}_{t+1}V_x\,p_{x+t} \quad . \tag{5.2}$$

È significativo confrontare la (5.2) con la (5.1). Nel membro destro della (5.2) compaiono le aspettative del I ordine in t delle grandezze aleatorie che compaiono nel membro destro della (5.1):

$$i = \mathbb{E}_t^{\mathrm{I}}(I_{t+1}) \ , \quad q_{x+t} = \mathbb{E}_t^{\mathrm{I}}\left(\mathbb{1}_{\{T_x \le t+1\}}\right) \ , \quad p_{x+t} = \mathbb{E}_t^{\mathrm{I}}\left(\mathbb{1}_{\{T_x > t+1\}}\right) \quad .$$

Il membro destro della (5.2) è pertanto l'aspettativa del I ordine fatta al tempo t del membro destro della (5.1). Quindi anche il membro sinistro della (5.2) è uguale all'aspettativa del I ordine fatta al tempo t del membro sinistro della (5.1), cioè

$$\mathbb{E}_t^{\mathrm{I}}(U_{t+1}) = 0 \ ,$$

[1] Si osservi che anche la riserva che l'assicuratore dovrà effettivamente ricostituire al tempo $t+1$ è aleatoria, perché se l'assicurato dovesse decedere in $(t, t+1]$ il contratto si risolverà con la prestazione caso morte e l'assicuratore non dovrà ricostituire alcuna riserva.

che è un altro modo di esprimere l'equilibrio del contratto al tempo t secondo la base tecnica del I ordine.

Un altro modo interessante di confrontare la (5.1) con la (5.2) è quello di sottrarre membro a membro la seconda dalla prima, ottenendo:

$$\begin{aligned} U_{t+1} = {}& {}_tV_x^+(I_{t+1} - i) \\ & - C_{t+1}^{\mathrm{m}} \left(\mathbb{1}_{\{T_x \le t+1\}} - q_{x+t}\right) \\ & - \left({}_{t+1}V_x + C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\right) \left(\mathbb{1}_{\{T_x > t+1\}} - p_{x+t}\right) \quad . \end{aligned}$$

Ricordando che $\mathbb{1}_{\{T_x>t+1\}} = 1 - \mathbb{1}_{\{T_x \le t+1\}}$, che $p_{x+t} = 1 - q_{x+t}$ e quindi che

$$\mathbb{1}_{\{T_x>t+1\}} - p_{x+t} = -\left(\mathbb{1}_{\{T_x \le t+1\}} - q_{x+t}\right) \quad ,$$

si ottiene una versione della *formula di contribuzione di Homans*

$$U_{t+1} = {}_tV_x^+(I_{t+1} - i) - \left(C_{t+1}^{\mathrm{m}} - C_{t+1}^{\mathrm{vp}} - {}_{t+1}V_x\right) \left(\mathbb{1}_{\{T_x \le t+1\}} - q_{x+t}\right) \quad , \tag{5.3}$$

che scompone l'utile aleatorio in $t+1$ in due componenti, ciascuna che risente di un'unica fonte di incertezza:

- L'*utile finanziario*

  $$U_{t+1}^{\mathrm{f}} = {}_tV_x^+(I_{t+1} - i) \quad , \tag{5.4}$$

  è direttamente proporzionale al sovrarendimento degli attivi rispetto al tasso tecnico, con costante di proporzionalità la riserva di bilancio in t, che rappresenta il capitale gestito dall'assicuratore nell'anno $(t, t+1]$. L'entità (e il segno) dell'utile finanziario dipende quindi dal risultato della gestione degli attivi e dalla massa gestita.
- L'*utile tecnico* (o *utile da mortalità*)

  $$U_{t+1}^{\mathrm{m}} = -\left(C_{t+1}^{\mathrm{m}} - C_{t+1}^{\mathrm{vp}} - {}_{t+1}V_x\right) \left(\mathbb{1}_{\{T_x \le t+1\}} - q_{x+t}\right) \tag{5.5}$$

  è direttamente proporzionale alla sovramortalità che si verificherà rispetto a quella prevista dalla base del I ordine, con costante di proporzionalità l'opposto del capitale sotto rischio nell'anno $(t, t+1]$. L'entità e, soprattutto, il segno dell'utile tecnico dipendono quindi dall'entità e dal segno del capitale sotto rischio e della sovramortalità: con capitale sotto rischio positivo (come è tipicamente il caso in una polizza temporanea caso morte o mista, ad esempio), si ha disutile in caso di sovramortalità rispetto all'aspettativa del I ordine, utile in caso di sottomortalità.

L'aspettativa (del II ordine) in t dell'utile e delle sue componenti è data dalle espressioni

$$\mathbb{E}_t^{\mathrm{II}}(U_{t+1}) = {}_tV_x^+ \left(\mathbb{E}_t^{\mathrm{II}}(I_{t+1}) - i\right) - \left(C_{t+1}^{\mathrm{m}} - C_{t+1}^{\mathrm{vp}} - {}_{t+1}V_x\right)\left(q_{x+t}^{\mathrm{II}} - q_{x+t}^{\mathrm{I}}\right) \quad ,$$

$$\mathbb{E}_t^{\mathrm{II}}(U_{t+1}^{\mathrm{f}}) = {}_tV_x^+ \left(\mathbb{E}_t^{\mathrm{II}}(I_{t+1}) - i\right) \quad , \tag{5.6}$$

$$\mathbb{E}_t^{\mathrm{II}}(U_{t+1}^{\mathrm{m}}) = -\left(C_{t+1}^{\mathrm{m}} - C_{t+1}^{\mathrm{vp}} - {}_{t+1}V_x\right)\left(q_{x+t}^{\mathrm{II}} - q_{x+t}^{\mathrm{I}}\right) \quad , \tag{5.7}$$

che rappresentano la versione in aspettativa della formula di contribuzione di Homans.

Osservazione 5.1. L'utile U_{t+1} e la relativa scomposizione sono stati calcolati nell'ipotesi che la polizza sia in essere alla data t. Per la polizza generica che stiamo considerando, ciò comporta che l'utile è U_{t+1} se l'assicurato è in vita in t, è zero altrimenti. Se quindi si ragiona ad un istante che precede t, per esempio al tempo zero di emissione della polizza, l'utile che la polizza esprimerà in $t+1$ è dato da $U_{t+1}\,\mathbb{1}_{\{T_x>t\}}$. □

5.4 La valutazione degli utili: il metodo RAD

Fissata una polizza, nel paragrafo precedente abbiamo visto come questa dia origine alla successione di utili aleatori $U_1\,\mathbb{1}_{\{T_x>0\}}$, $U_2\,\mathbb{1}_{\{T_x>1\}}$, … . È chiara l'esigenza di *valutare* questi utili alla data di stipula del contratto – o meglio, nella fase di progettazione del contratto – per fare un profit-test della polizza.[2] In questo paragrafo discuteremo il metodo di valutazione *Risk Adjusted Discounting* (*RAD*), ampiamente usato nella pratica operativa.

Si consideri una polizza generica, stipulata da una testa di età x anni, con una certa fissata base tecnica demografica del I ordine e con tasso tecnico i. Si consideri fissata anche la base tecnica del II ordine, espressione delle opinioni probabilistiche dell'assicuratore. In particolare, siano quindi fissate le aspettative dei rendimenti degli attivi $\mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}(I_1)$, $\mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}(I_2)$, … alla data di valutazione, coincidente con la data di stipula. Applicando la formula di contribuzione di Homans, l'aspettativa (del II ordine) alla data di valutazione dell'utile al tempo $k>0$ è data da

$$\mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k\,\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) = \mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{f}}\,\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) + \mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{m}}\,\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) \quad .$$

[2] È molto interessante anche la valutazione degli utili residui di un contratto già in essere alla data di valutazione. Per semplicità non tratteremo esplicitamente questo caso, che però è facilmente ricavabile dallo schema di valutazione all'emissione, con le ovvie modifiche.

Calcoliamo separatamente l'utile finanziario atteso e l'utile tecnico atteso.

Per quanto riguarda il primo, sappiamo che la grandezza U_k^{f} risente solamente di incertezza di tipo finanziario, mentre l'aleatorietà della funzione indicatrice $\mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}$ è quella della durata della vita dell'assicurato. Possiamo senz'altro accettare come ipotesi della valutazione che durata della vita dell'assicurato e l'evoluzione del mercato finanziario siano indipendenti e fattorizzare quindi

$$\mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{f}}\,\mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}\right) = \mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{f}}\right)\,\mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left(\mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}\right) \quad .$$

Applicando nel primo fattore del membro destro la (5.4), si ottiene per linearità che

$$\mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{f}}\right) = \mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left[{}_{k-1}V_x^{+}\,(I_k - i)\right] = {}_{k-1}V_x^{+}\,\left[\mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}(I_k) - i\right] \quad .$$

D'altro canto

$$\mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left(\mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}\right) = \mathbb{P}_0^{\mathrm{II}}(T_x > k-1) = {}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}} \quad .$$

L'utile finanziario atteso alla data di valutazione è pertanto

$$\mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{f}}\,\mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}\right) = {}_{k-1}V_x^{+}\,\left[\mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}(I_k) - i\right]\,{}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}} \quad .$$

È quindi direttamente proporzionale alla massa gestita, al sovrarendimento atteso rispetto al tasso tecnico e alla probabilità che la polizza sia in essere all'inizio dell'anno di riferimento.

Per il calcolo dell'utile tecnico atteso, si osservi anzitutto che

$$\mathbb{1}_{\{T_x \le k\}}\,\mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}} = \mathbb{1}_{\{k-1 < T_x \le k\}} \quad ,$$

da cui segue che

$$\left(\mathbb{1}_{\{T_x \le k\}} - q_{x+k-1}^{\mathrm{I}}\right)\mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}} = \mathbb{1}_{\{k-1 < T_x \le k\}} - q_{x+k-1}^{\mathrm{I}}\mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}$$

e, applicando le aspettative del secondo ordine, che

$$\mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left[\left(\mathbb{1}_{\{T_x \le k\}} - q_{x+k-1}^{\mathrm{I}}\right)\mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}\right] = {}_{k-1|1}q_x^{\mathrm{II}} - q_{x+k-1}^{\mathrm{I}}\,{}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}}$$

e quindi, applicando la (2.20), che

$$\mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left[\left(\mathbb{1}_{\{T_x \le k\}} - q_{x+k-1}^{\mathrm{I}}\right)\mathbb{1}_{\{T_x > k-1\}}\right] = \left(q_{x+k-1}^{\mathrm{II}} - q_{x+k-1}^{\mathrm{I}}\right){}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}} \quad . \tag{5.8}$$

Partendo dalla (5.5), applicando la linearità dell'aspettativa e la (5.8) si ottiene che l'utile tecnico atteso in zero è

$$\mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{m}}\,\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) = -\left(C_k^{\mathrm{m}} - C_k^{\mathrm{vp}} - {}_kV_x\right)\left(q_{x+k-1}^{\mathrm{II}} - q_{x+k-1}^{\mathrm{I}}\right){}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}} \tag{5.9}$$

L'utile da tecnico atteso è quindi direttamente proporzionale all'opposto del capitale sotto rischio, alla sovramortalità attesa e alla probabilità che la polizza sia in essere all'inizio dell'anno di riferimento.

Dopo avere calcolato l'utile atteso occorre scontarlo dalla data k, alla quale è temporalmente collocato, alla data di valutazione. Il tasso da usare non può essere naturalmente il tasso di interesse privo di rischio espresso dal mercato obbligazionario, ma va opportunamente aumentato per compensare il rischio insito nell'utile, che è stato "sterilizzato" dal calcolo dell'aspettativa. Il tasso *aggiustato per il rischio* (*risk adjusted*) così ottenuto è il *tasso RAD* j che, nella pratica operativa, per semplicità si considera spesso costante e noi seguiremo questa linea; nulla vieta naturalmente di utilizzare una struttura per scadenza di tassi di interesse non piatta. Indicando quindi con $V(0,\cdot)$ il valore calcolato nel senso RAD, il valore in zero dell'utile al tempo k è la somma del valore dell'utile finanziario e dell'utile tecnico

$$V\left(0, U_k\,\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) = V\left(0, U_k^{\mathrm{f}}\,\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) + V\left(0, U_k^{\mathrm{m}}\,\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) \quad ,$$

essendo

$$\begin{aligned} V\left(0, U_k^{\mathrm{f}}\,\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) &= \mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{f}}\,\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}\right)(1+j)^{-k} \\ V\left(0, U_k^{\mathrm{m}}\,\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) &= \mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{m}}\,\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}\right)(1+j)^{-k} \quad . \end{aligned}$$

Il valore complessivo del flusso $\boldsymbol{U}$ degli utili, che si chiama *valore intrinseco*, è la somma del valore degli utili estesa a tutti gli anni di polizza

$$V(0,\boldsymbol{U}) = \sum_{k>0} \mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k\,\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}\right)(1+j)^{-k}$$

ed è naturalmente scomposto nel *valore intrinseco finanziario*

$$\begin{aligned} V(0,\boldsymbol{U}^{\mathrm{f}}) &= \sum_{k>0} \mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{f}}\,\mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}}\right)(1+j)^{-k} \\ &= \sum_{k>0} {}_{k-1}V_x^{+}\left[\mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}(I_k) - i\right]{}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}}\,(1+j)^{-k} \end{aligned}$$

e nel *valore intrinseco tecnico*

$$\begin{aligned} V(0,\boldsymbol{U}^{\mathrm{m}}) &= \sum_{k>0} \mathbb{E}_0^{\mathrm{II}} \left(U_k^{\mathrm{m}} \mathbb{1}_{\{T_x>k-1\}} \right) (1+j)^{-k} \\ &= -\sum_{k>0} \left(C_k^{\mathrm{m}} - C_k^{\mathrm{vp}} - {}_kV_x \right) \left(q_{x+k-1}^{\mathrm{II}} - q_{x+k-1}^{\mathrm{I}} \right) {}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}} (1+j)^{-k} \ . \end{aligned}$$

Osservazione 5.2. Il valore intrinseco misura, nel senso del valore alla data di valutazione, gli utili (o i disutili, se negativi) che sono incorporati nella polizza e che si libereranno anno per anno. L'assicuratore non può quindi incamerare il valore intrinseco, se positivo, alla data di valutazione, preservandolo per esempio dalla riserva, ma deve aspettare che questo si liberi negli anni.[3] □

Osservazione 5.3. Il valore intrinseco che si ottiene dipende dalla scelta

a) della base tecnica demografica del II ordine,
b) dell'aspettativa dei rendimenti degli attivi,
c) dello spread che si applica al tasso privo di rischio per ottenere il tasso RAD.

La sensibilità del risultato a ciascuna delle tre ipotesi dipende dalla tipologia di polizza. La base tecnica demografica del II ordine può essere stimata con una certa precisione sui dati statistici della popolazione, con tecniche di demografia attuariale che sono ormai consolidate. La formulazione dell'aspettativa dei rendimenti degli attivi è un problema molto più complesso. Lo spread da applicare al tasso privo di rischio può essere calcolato con logica CAPM, ma solo dopo avere valutato con precisione la rischiosità degli utili; nella pratica operativa si usa spesso lo spread implicato dal beta del titolo azionario della compagnia (o della capogruppo, se la compagnia non è quotata). □

Osservazione 5.4. Se si calcola il valore intrinseco di tutte le polizze in essere di una compagnia, si ottiene il valore intrinseco del portafoglio polizze. Il valore della compagnia, spesso chiamato *embedded value* è dato da

$$\begin{aligned} \textit{valore della compagnia} = &+ \text{ valore intrinseco del portafoglio polizze} \\ &+ \text{ valore dei caricamenti} \\ &- \text{ valore delle spese} \end{aligned}$$

[3] Ha comunque la possibilità di stipulare con un riassicuratore un trattato di *riassicurazione commerciale*, che gli permette di monetizzare in tutto o in parte il valore intrinseco della polizza.

+ capitale proprio rettificato
− costo del capitale immobilizzato per garantire solvibilità
+ franchise value
− effetti fiscali (tasse)

Il valore dei caricamenti e il valore delle spese devono essere calcolati con la stessa logica RAD e in riferimento all'intera durata residua del portafoglio polizze; il secondo è critico, perché la quantificazione delle spese future attese non è un problema semplice da risolvere.
Anche la stima franchise value è complesse e spesso, nella pratica, viene forfettizzato prendendo un multiplo del contributo al valore intrinseco della produzione dell'ultimo anno. □

Osservazione 5.5. Oramai il metro del valore intrinseco RAD è divenuto uno standard di mercato. Le principali compagnie europee presentano il calcolo dell'embedded value alla fine di ogni anno, insieme ai risultati dell'esercizio. Gli analisti del segmento assicurativo europeo sono quindi abituati a ragionare con questo metro e, per ovviare agli elementi di criticità della valutazione esposti nell'osservazione 5.3, si aspettano (e pretendono) che vengano rese note le ipotesi di valutazione, nonché l'analisi di sensibilità del risultato alle varie ipotesi. □

Capitolo 6

Le polizze rivalutabili

6.1 Introduzione

Le *polizze vita rivalutabili* sono state introdotte nel mercato italiano negli anni di alta inflazione e oggi, con l'eccezione delle polizze TCM, hanno completamente sostituito le polizze vita non rivalutabili.

Le polizze rivalutabili prevedono la rivalutazione annuale delle prestazioni e, a volte, anche dei premi in base al rendimento di un fondo gestito dall'assicuratore "separatamente dal resto delle sue attività", dove sono investite le riserve delle polizze. Per questo motivo il fondo è chiamato *gestione separata* ed ha quindi il duplice scopo di sottostante per la rivalutazione e di contenitore degli attivi a copertura delle riserve.

Le gestioni separate delle compagnie italiane sono composte da attivi prevalentemente obbligazionari con "poco" rischio di credito (vincolo normativo). Gli attivi vengono contabilizzati al *costo storico* (e non al *valore di mercato*) e il *rendimento di gestione* è calcolato in senso contabile: è il rapporto tra i *redditi* incassati nel periodo di riferimento (cedole, plus/minusvalenze realizzate, ...) e la consistenza media del fondo nello stesso periodo.

Il meccanismo di rivalutazione è specifico della tipologia di polizza. È concettualmente analogo ad una *indicizzazione* ma con *minimo garantito*, come vedremo meglio nell'analisi di dettaglio. È basato sull'idea di retrocedere agli assicurati una parte dell'eventuale utile finanziario che sussiste qualora il rendimento di gestione risulti maggiore del tasso tecnico, come abbiamo visto nel capitolo 5.

Anche prima dell'avvento delle polizze rivalutabili erano previste forme di *partecipazione agli utili* da parte degli assicurati, soprattutto nelle compagnie di assicurazione di tipo mutualistico, spesso con modalità fissate ogni anno in modo discrezionale dall'assicuratore. Nelle polizze rivalutabili, invece, la partecipazione agli utili finanziari è *contrattualizzata* in modo preciso e impegnativo nella *regola contrattuale di rivalutazione*.

6.2 La formalizzazione della regola di rivalutazione

In questo paragrafo formalizzeremo la regola di rivalutazione come è applicata nella pratica asscirurativa italiana.

Si consideri fissata una polizza generica, con tasso tecnico i ed età alla stipula dell'assicurato x, le cui riserve siano investite in una gestione separata. Si indicherà con I_t il *rendimento di gestione* nell'anno $(t-1, t]$.

6.2.1 Utile retrocesso e utile trattenuto

Usando l'equazione di Fouret, alla ricorrenza anniversaria t, la riserva matematica della polizza in essere a quella data può essere scritta nella forma

$$ {}_tV_x = \frac{1}{p_{x+t-1}} \left[{}_{t-1}V_x^+ - C_t^{\mathrm{m}}\, q_{x+t-1}\, v - C_t^{\mathrm{vp}}\, p_{x+t-1}\, v \right] (1+i) \ , \tag{6.1} $$

che la esprime ricorsivamente come montante al tasso tecnico della riserva di bilancio di inizio anno, diminuita del valore delle prestazioni di fine anno (caso morte e caso vita posticipata), appena pagate. Il fattore $1+i$ esprime la capitalizzazione della riserva per l'anno $(t-1, t]$ secondo la base tecnica finanziaria del I ordine. Tuttavia, nella realtà, gli attivi a copertura sono capitalizzati al rendimento di gestione I_t. Dunque, a fine anno, dopo avere pagato le prestazioni, la disponibilità finanziaria – il valore degli attivi – sarà

$$ D_t = \frac{1}{p_{x+t-1}} \left[{}_{t-1}V_x^+ - C_t^{\mathrm{m}}\, q_{x+t-1}\, v - C_t^{\mathrm{vp}}\, p_{x+t-1}\, v \right] (1+I_t) \ . \tag{6.2} $$

Confrontando la (6.1) con la (6.2) si ottiene che

$$ \frac{{}_tV_x}{1+i} = \frac{D_t}{1+I_t} $$

e quindi che

$$ D_t = {}_tV_x \frac{1+I_t}{1+i} = {}_tV_x \left(1 + \frac{I_t - i}{1+i} \right) \ . $$

La differenza

$$ \Delta_t = D_t - {}_tV_x = {}_tV_x \frac{I_t - i}{1+i} \tag{6.3} $$

è il surplus (in senso algebrico) di valore degli attivi rispetto alla riserva che l'assicuratore deve coprire. Il segno di Δ_t è quello della differenza $I_t - i$: il surplus è positivo se il rendimento degli attivi ha "battuto" il tasso tecnico, negativo se hanno reso meno del tasso tecnico. Si tratta pertanto di un utile (in senso algebrico) di tipo finanziario.

Osservazione 6.1. Il surplus (6.3) è una misura dell'utile finanziario leggermente diversa dalla componente finanziaria della scomposizione di Homans dall'utile vista nel paragrafo 5.3. La differenza è pricipalmente dovuta al fatto che la (6.3) esprime l'utile certo in t di una polizza in essere al tempo t; l'utile finanziario in t nel senso della scomposizione di Homans è ottenuto invece per un contratto in essere al tempo $t-1$ ed è aleatorio (come nella (5.4)) o atteso (come nella (5.6)). □

Si assuma che l'assicuratore voglia retrocedere all'assicurato una parte del surplus (6.3), in modo da far partecipare l'assicurato all'utile. Poiché il surplus deriva dal rendimento di gestione I_t, l'idea è di fissare contrattualmente un'*aliquota di retrocessione* (*aliquota di partecipazione*) $\beta \in (0,1]$ e di ripartire il rendimento degli attivi in base a quest'aliquota:

$$I_t = \beta I_t + (1-\beta) I_t \ . \tag{6.4}$$

La componente βI_t è il *rendimento retrocesso* all'assicurato, mentre $(1-\beta)I_t$ è il *rendimento trattenuto*. La scomposizione del rendimento induce una scomposizione del surplus: l'*utile retrocesso* Δ_t^{retr} si ottiene calcolando la (6.3) per il solo rendimento retrocesso, ciò che rimane del surplus è l'*utile trattenuto* dall'assicuratore Δ_t^{tratt}. In formule

$$\begin{aligned} \Delta_t^{\text{retr}} &= {}_tV_x \frac{\beta I_t - i}{1+i} \ , \\ \Delta_t^{\text{tratt}} &= \Delta_t - \Delta_t^{\text{retr}} = {}_tV_x \frac{(1-\beta) I_t}{1+i} \ . \end{aligned} \tag{6.5}$$

Quest'idea non può essere (e nella pratica non viene) applicata in questo modo. Infatti, se $I_t < i/\beta$, l'utile da retrocedere sarebbe negativo, con problemi di tipo giuridico e anche commerciale. Per questo motivo viene aggiunta la condizione che l'assicurato partecipi sì all'utile, ma non al disutile; viene attuata aggiugendo il vincolo che il risultato della (6.5) sia non negativo. Le formule diventano quindi

$$\Delta_t^{\text{retr}} = \max\left({}_tV_x \frac{\beta I_t - i}{1+i} \, , \, 0 \right) \ ,$$

$$\Delta_t^{\text{tratt}} = \Delta_t - \Delta_t^{\text{retr}} \quad .$$

Introducendo il *tasso di rivalutazione*

$$\rho_t = \max\left(\frac{\beta I_t - i}{1+i}\,,\,0\right) = \frac{\max\left(\beta I_t\,,\,i\right) - i}{1+i} = \frac{1+\max\left(\beta I_t\,,\,i\right)}{1+i} - 1 \quad (6.6)$$

e ricordando che la riserva ${}_tV_x$ è non negativa, si ottiene che

$$\Delta_t^{\text{retr}} = {}_tV_x\,\rho_t \quad ,$$

cioè che l'utile da retrocedere è l'interesse sulla riserva matematica al tempo t, calcolato al tasso ρ_t.

Nella (6.6) il tasso di rivalutazione ρ_t è il risultato di una formula, le cui componenti è opportuno interpretare.

– Dal rendimento retrocesso βI_t viene anzitutto sottratto il tasso tecnico i perché questo è comunque dovuto all'assicurato: secondo la base tecnica del I ordine, che è un impegno contrattuale, l'assicuratore deve remunerare a quel tasso il differimento temporale fra l'incasso dei premi e il pagamento delle prestazioni. La riserva, quindi, che è il debito residuo (netto) dell'assicuratore, deve crescere (almeno) a quel tasso e il tasso di rivalutazione è una misura dell'extra-rendimento rispetto a quel tasso.
– L'extra-rendimento $\beta I_t - i$ viene diviso per $1+i$ perché il tasso ρ_t è costruito per essere applicato alla riserva di fine anno e non a quella di inizio anno. Occorre quindi sterilizzare in ${}_tV_x$ il fattore $1+i$ prima di calcolare l'utile retrocesso al tasso di extra-rendimento $\beta I_t - i$.
– Il controllo finale di non-negatività del tasso di rivalutazione è già stato discusso.

L'utile trattenuto

$$\Delta_t^{\text{tratt}} = \Delta_t - \Delta_t^{\text{retr}} = {}_tV_x\left(\frac{I_t - i}{1+i} - \rho_t\right)$$

si può invece esprimere nella forma

$$\Delta_t^{\text{tratt}} = {}_tV_x\frac{I_t - \max(\beta I_t\,,\,i)}{1+i}$$

oppure, ricordando le proprietà degli operatori max e min[1], nella forma

$$\Delta_t^{\text{tratt}} = {}_tV_x\frac{\min[(1-\beta)I_t\,,\,I_t - i]}{1+i}.$$

[1] Gli operatori max e min godono delle proprietà:

$$\max(-a\,,\,-b) = -\min(a\,,\,b) \qquad\qquad \text{per ogni } a,\ b,$$

Quindi, sempre a meno del fattore $1/(1+i)$, l'assicuratore si tiene (in senso algebrico) il minore fra il rendimento trattenuto e lo spread fra il rendimento I_t e il tasso tecnico.

Nella figura 6.1 sono mostrate alcune delle grandezze coinvolte nella

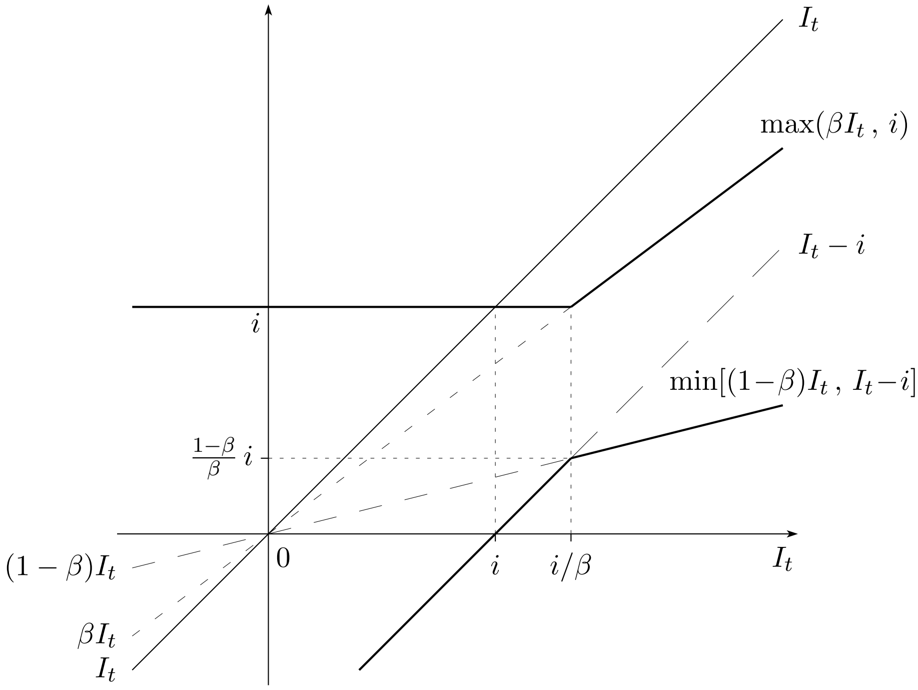


Figura 6.1. Grandezze coinvolte nella costruzione dell'utile retrocesso e trattenuto

costruzione dell'utile retrocesso e trattenuto, in funzione del rendimento I_t. In riferimento a quella figura, è immediato osservare che:

- Se $I_t < i$ l'assicuratore non è riuscito a rivalutare gli attivi in maniera

---

$\min(-a\,,\,-b) = -\max(a\,,\,b)$	per ogni a, b,
$\max(a\,,\,b) + c = \max(a+c\,,\,b+c)$	per ogni a, b, c,
$\min(a\,,\,b) + c = \min(a+c\,,\,b+c)$	per ogni a, b, c,
$c\max(a\,,\,b) = \max(c\,a\,,\,c\,b)$	per ogni a, b, c con $c \geq 0$,
$c\min(a\,,\,b) = \min(c\,a\,,\,c\,b)$	per ogni a, b, c con $c \geq 0$.

sufficiente e il surplus è negativo:

$$\Delta_t = {}_tV_x \frac{I_t - i}{1+i} < 0 \ .$$

Poiché $\beta > 0$, si ha che $\beta I_t - i < I_t - i < 0$ e quindi il tasso di rivalutazione è nullo

$$\rho_t = \max\left(\frac{\beta I_t - i}{1+i}\,,\,0\right) = 0 \ ,$$

l'utile retrocesso è nullo

$$\Delta_t^{\text{retr}} = {}_tV_x\,\rho_t = 0$$

e l'utile trattenuto è negativo, coincide con il surplus ed è, in valore assoluto, l'entità dell'integrazione che l'assicuratore deve operare per coprire la riserva in t:

$$\Delta_t^{\text{tratt}} = \Delta_t = {}_tV_x \frac{I_t - i}{1+i} < 0 \ .$$

- Se $i \le I_t < I/\beta$ la situazione è migliore ma non rosea: il surplus è non negativo e gli attivi sono sufficienti a coprire la riserva. Il rendimento di gestione ha battuto il tasso tecnico, ma "di poco": essendo $I_t < i/\beta$ si ha che $\beta I_t < i$. Quindi il tasso di rivalutazione è nullo, non vi è utile retrocesso e, poiché

$$0 \le \frac{\min[(1-\beta)I_t\,,\,I_t - i]}{1+i} = \frac{I_t - i}{1+i} < \frac{(1-\beta)I_t}{1+i}$$

  l'utile trattenuto è non negativo ma minore di quello che si otterrebbe potendo utilizzare il rendimento trattenuto $(1-\beta)I_t$.

- Se infine $I_t \ge i/\beta$, il surplus è positivo, il tasso di rivalutazione è

$$\rho_t = \max\left(\frac{\beta I_t - i}{1+i}\,,\,0\right) = \frac{\beta I_t - i}{1+i} \ge 0$$

  e il tasso che determina l'utile trattenuto è

$$\frac{\min[(1-\beta)I_t\,,\,I_t - i]}{1+i} = \frac{(1-\beta)I_t}{1+i} \ge \frac{1-\beta}{\beta}\,\frac{i}{1+i} \ge 0 \ .$$

Esempio numerico 6.1. Si consideri una polizza con $i = 4\%$ e $\beta = 80\%$. Il tasso tecnico è al livello tipicamente praticato fino alla fine degli anni '90, mentre l'aliquota di retrocessione è tuttora standard per polizze rivalutabili a premio annuo. I livelli critici del rendimento di gestione sono quindi $I_t = i = 4\%$ e $I_t = i/\beta = 5\%$. L'analisi dei tre casi precedenti fornisce:

- Se l'assicuratore non riesce a rivalutare gli attivi di almeno il 4%, la situazione è pessima: non solo non può retrocedere utile, ma deve coprire con capitale proprio il disutile che si crea per l'insufficienza di rendimento degli attivi.

- Se $4\% \leq I_t < 5\%$ la situazione è migliore ma non ottimale. Non si è creato disutile, ma l'utile generato è scarso: non è sufficiente a retrocederne una parte all'assicurato e l'utile trattenuto è meno del preventivato 20% del rendimento di gestione.

- Il caso $I_t \geq 5\%$ è quello ideale: l'assicuratore può trattenere esattamente il 20% del rendimento e, se $I_t > 5\%$, rimane anche qualcosa da retrocedere all'assicurato. □

Esempio numerico 6.2. Le condizioni contrattuali tipiche delle polizze rivalutabili a premio annuo commercializzate alla fine del 2007 prevedono $i = 1.5\%$ e $\beta = 85\%$. I livelli critici del rendimento di gestione sono quindi $I_t = i = 1.5\%$ e $I_t = i/\beta \approx 1.76\%$. □

Osservazione 6.2. Il caso limite $\beta = 0$ corrisponde al caso di polizza non rivalutabile: essendo $\beta I_t - i = -i < 0$, il tasso di rivalutazione è $\rho_t = 0$ e l'intero surplus è trattenuto dall'assicuratore. All'altro estremo si ha il caso $\beta = 1$, dove vi è retrocessione integrale dell'utile, se positivo. In questo caso, infatti, se $I_t \geq i/\beta = i$ risulta $\Delta_t^{\mathrm{retr}} = \Delta_t \geq 0$ e $\Delta_t^{\mathrm{tratt}} = 0$, mentre se $I_t < i$ risulta $\Delta_t^{\mathrm{retr}} = 0$ e $\Delta_t = \Delta_t^{\mathrm{tratt}} < 0$. □

Una volta ripartito il surplus, vi possono essere varie forme di attuazione della retrocessione. Nei paragrafi che seguono verranno analizzate le più diffuse: retrocessione sotto forma di cedola, come incremento (rivalutazione) delle prestazioni, come rivalutazione sia delle prestazioni che dei premi.

6.2.2 Retrocessione sotto forma di cedole

Il contratto può stabilire che l'utile retrocesso venga liquidato all'assicurato al tempo t. Questo caso è presente nella pratica assicurativa italiana solo in alcune polizze commercializzate nei canali bancassicurativi, con lo scopo di fare competere il prodotto con prodotti finanziari che prevedono cedole.

Esempio 6.3. Si consideri una polizza mista a premio unico, con durata n anni, capitale assicurato C, tasso tecnico $i = 0$, retrocessione dell'utile sotto forma di cedole annuali con aliquota di retrocessione $\beta = 90\%$.

In questa tipologia contrattuale, diffussa nella pratica bancassicurativa, la riserva matematica coincide in ogni istante t con il capitale assicurato C (cfr. l'osservazione 3.4):

$$ {}_tV_x = C\,({}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} + {}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t}) = C \ . $$

Fissato il rendimento di gestione I_t, il tasso di rivalutazione è

$$ \rho_t = \max(\beta I_t\,,\,0) $$

e l'utile retrocesso, la cedola annuale, è quindi

$$ \Delta_t^{\mathrm{retr}} = {}_tV_x\,\rho_t = C\,\max(\beta I_t\,,\,0) \ . $$

La polizza è facilmente confrontabile con un'obbligazione di nominale C, con cedole annuali indicizzate al 90% del rendimento di gestione. □

6.2.3 Retrocessione sotto forma di rivalutazione delle prestazioni

Nei casi più frequenti l'utile retrocesso non viene liquidato all'assicurato al tempo t, ma viene trasformato in un incremento (rivalutazione) delle prestazioni della polizza. Il procedimento è quello di usare l'utile da retrocedere per "acquistare" per conto dell'assicurato una polizza (aggiuntiva) dello stesso tipo e con la stessa scadenza di quella originale (polizza base) ma a premio unico. In questo modo alle prestazioni della polizza base vengono sommate quelle previste dalla polizza aggiuntiva e si prosegue "come se" la polizza fosse stata originariamente stipulata per le prestazioni risultanti. Questa procedura viene attuata ad ogni ricorrenza anniversaria e le prestazioni contrattuali vengono quindi incrementate di anno in anno.

La polizza aggiuntiva che l'assicuratore "vende" ogni anno ha un costo uguale all'utile da retrocedere per quell'anno e può essere a *premio unico puro* o a *premio unico di inventario*. Nel primo caso l'assicuratore non applica caricamenti alla polizza aggiuntiva: il relativo premio unico puro coincide con il premio unico di tariffa ed entrambi sono uguali all'utile retrocesso. Nel secondo caso, invece, l'assicuratore applica un caricamento e quindi il premio unico puro è minore del premio unico di tariffa, che coincide con l'utile retrocesso. La terminologia "premio unico di inventario", che significa premio unico gravato della sola componente di caricamento per spese di gestione, allude alla scomposizione tradizionale del caricamento: poiché non vi sono spese di acquisizione (il cliente è già acquisito) né di incasso (si tratta di un incasso "virtuale") l'unico caricamento da applicare è quello per spese di gestione.[2]

Poiché il premio unico puro della polizza aggiuntiva coincide con la riserva prestazioni della stessa, nella rivalutazione a premio unico puro, per effetto della rivalutazione, la riserva della polizza cresce esattamente dell'utile retrocesso: indicando con ${}_tV_x$ la riserva matematica in t, calcolata sulla base delle prestazioni non ancora rivalutate, e con ${}_tV_x^{\mathrm{riv}}$ la riserva calcolata con le prestazioni rivalutate, risulta

$$ {}_tV_x^{\mathrm{riv}} = {}_tV_x + \Delta_t^{\mathrm{retr}} \ . \tag{6.7}$$

Nella rivalutazione a premio unico di inventario, invece, nel membro sinistro della formula precedente occorre sottrarre il caricamento G_t applicato:

$$ {}_tV_x^{\mathrm{riv}} = {}_tV_x + \Delta_t^{\mathrm{retr}} - G_t \ . \tag{6.8}$$

La descrizione appena esposta della regola di rivalutazione delle prestazioni appare "macchinosa" e complicata da illustrare al cliente; può tuttavia essere tradotta in regole di rivalutazione delle prestazioni. Anzi, normalmente, nei contratti non si parla di "utile retrocesso", né di "rivalutazione a premio unico puro", ma si descrive la regola annuale di rivalutazione delle prestazioni in modo ricorrente, a partire dal livello raggiunto l'anno prima e dal tasso di rivalutazione per l'anno in questione.

Esempio 6.4. Un esempio tipico di formalizzazione contrattuale della regola di rivalutazione per una polizza di capitale differito a premio unico con $\beta = 85\%$ e $i = 1.5\%$ è:

> "Il capitale assicurato viene rivalutato ad ogni ricorrenza anniversaria. La misura annua della rivalutazione è l'85% del rendimento certificato della gestione separata, diminuito di 1.5%, diviso per 1.015. La misura annua di rivalutazione non può risultare negativa."

Come si vedrà nell'esempio 6.5, è la trascrizione a parole della regola ricorrente di rivalutazione del capitale assicurato nel caso di rivalutazione a premio unico puro. □

La traduzione della regola di rivalutazione, che sia a premio unico puro o di inventario, in regola di rivalutazione delle prestazioni dipende dalla

[2] Nella modalità di rivalutazione a premio unico puro il contratto dovrebbe essere progettato in modo che le spese di gestione delle polizze aggiuntive siano coperte dai caricamenti della polizza base.

tipologia del contratto. Si tratta di imporre la condizione (6.7) o (6.8) e ricavare le prestazioni rivalutate a partire da quelle non rivalutate.

ESEMPIO 6.5. Si consideri una polizza di capitale differito a premio unico, stipulata da un assicurato di età x per la durata di n anni. Si assuma che sia contrattualmente stabilita la rivalutazione annuale del capitale assicurato a premio unico puro. Sia C_{t-1} il capitale assicurato come rivalutato fino alla ricorrenza anniversaria $t-1$. Se si indica con C_k^{agg} l'incremento di prestazione aggiunto alla ricorrenza anniversaria k-esima, risulta naturalmente che

$$C_t = C_0 + \sum_{k=1}^{t-1} C_k^{\text{agg}} \quad ,$$

essendo C_0 il capitale inizialmente assicurato. Al tempo t, subito prima della rivalutazione, la riserva matematica della polizza è

$${}_xV_t = C_{t-1}\, {}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} \quad .$$

Sia ρ_t il tasso di rivaluazione per l'anno $(t-1, t]$; l'utile da retrocedere alla polizza è

$$\Delta_t^{\text{retr}} = {}_xV_t\, \rho_t = C_{t-1}\, {}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t}\, \rho_t \quad .$$

Il tasso di premio unico puro della polizza aggiuntiva ${}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}$, cioè il premio unico puro per unità di capitale assicurato della polizza di capitale differito per $n-t$ anni è

$${}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} = {}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} \quad .$$

Si osservi che il tasso di premio unico puro coincide con il tasso di riserva prestazioni: in entrambi i casi è il valore attuale attuariale, secondo la base tecnica del I ordine, delle prestazioni residue della polizza. Il capitale assicurato della polizza aggiuntiva, cioè il capitale aggiuntivo C_t^{agg}, si determina imponendo la condizione che il premio della polizza aggiuntiva sia uguale all'utile da retrocedere:

$$C_t^{\text{agg}}\, {}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} = \Delta_t^{\text{retr}} \quad ,$$

da cui si ottiene che

$$C_t^{\text{agg}} = \frac{\Delta_t^{\text{retr}}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}} = \frac{{}_xV_t}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}\rho_t = \frac{C_{t-1}\, {}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}\, \rho_t = C_{t-1}\, \rho_t \quad .$$

La riserva della polizza aggiuntiva è uguale al premio unico puro e quindi

$${}_tV_x^{\text{agg}} = \Delta_t^{\text{retr}} \quad .$$

L'effetto della rivalutazione è quello di incrementare il capitale assicurato secondo la regola

$$C_t = C_{t-1} + C_t^{\text{agg}} = C_{t-1}(1 + \rho_t) \ .$$

La riserva della polizza dopo la rivalutazione è

$${}_tV_x^{\text{riv}} = {}_tV_x + {}_tV_x^{\text{agg}} = {}_tV_x + \Delta_t^{\text{retr}}$$

e la rivalutazione trasforma quindi l'utile retrocesso in incremento di riserva della polizza. □

Osservazione 6.3. La regola di rivalutatazione del capitale assicurato vista nell'esempio 6.5 è di tipo ricorrente

$$C_t = C_{t-1}(1 + \rho_t) \tag{6.9}$$

e si chiama regola di *rivalutazione piena*. Indicando con C_0 il livello iniziale del capitale assicurato, stabilito contrattualmente alla stipula, la regola di rivalutazione piena ammette la soluzione in forma chiusa

$$C_t = C_0 \prod_{k=1}^{t} (1 + \rho_t) \ . \tag{6.10}$$

□

Esempio 6.6. Si consideri il caso dell'esempio 6.5, ma con regola contrattuale di rivalutazione a premio unico di inventario. Sia ${}_{n-t}g_{x+t}$ il tasso di caricamento per spese di gestione (per unità di premio di tariffa, come usuale per i tassi di caricamento) del premio unico della polizza aggiuntiva che realizza la rivalutazione alla ricorrenza anniversaria t. Si noti che, in linea di principio, il tasso di caricamento può dipendere da t per tramite dell'età raggiunta $x + t$ e della durata residua $n - t$, che è la durata della polizza aggiuntiva. Il tasso di premio unico di inventario (per unità di capitale aggiuntivo) è allora

$${}_{n-t}\mathrm{t}_{x+t} = \frac{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}{1 - {}_{n-t}g_{x+t}} = \frac{{}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t}}{1 - {}_{n-t}g_{x+t}} \ .$$

Ripetendo il ragionamento dell'esempio 6.5, partendo dalla condizione che il premio di tariffa della polizza aggiuntiva sia uguale all'utile trattenuto:

$$C_t^{\text{agg}} \, {}_{n-t}\mathrm{t}_{x+t} = \Delta_t^{\text{retr}} \ ,$$

si ottiene che

$$
\begin{aligned}
C_t^{\mathrm{agg}} &= \frac{\Delta_t^{\mathrm{retr}}}{{}_{n-t}\mathrm{t}_{x+t}} = C_{t-1}\,\left(1 - {}_{n-t}g_{x+t}\right)\,\rho_t \quad , \\
{}_tV_x^{\mathrm{agg}} &= C_t^{\mathrm{agg}}\;{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} = \Delta_t^{\mathrm{retr}}\frac{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{t}_{x+t}} = \Delta_t^{\mathrm{retr}}\left(1 - {}_{n-t}g_{x+t}\right) \quad , \\
C_t &= C_{t-1} + C_t^{\mathrm{agg}} = C_{t-1}\left[1 + \left(1 - {}_{n-t}g_{x+t}\right)\rho_t\right] \quad , \\
{}_tV_x^{\mathrm{riv}} &= {}_tV_x + {}_tV_x^{\mathrm{agg}} = {}_tV_x + \Delta_t^{\mathrm{retr}} - \Delta_t^{\mathrm{retr}}\;{}_{n-t}g_{x+t} \quad .
\end{aligned}
$$

Quindi, rispetto al caso di rivalutazione a premio puro, essendo ${}_{n-t}g_{x+t} > 0$ e quindi

$$\left(1 - {}_{n-t}g_{x+t}\right)\,\rho_t \le \rho_t \quad ,$$

la rivalutazione del capitale assicurato è meno che piena, perché “frenata” dal tasso di caricamento. Equivalentemente, non tutto l'utile da retrocedere viene trasformato in incremento di riserva della polizza perché viene applicato il caricamento $G_t = \Delta_t^{\mathrm{retr}}\;{}_{n-t}g_{x+t}$. □

Esempio 6.7. In una polizza mista a premio unico la situazione è formalmente analoga a quella della capitale differito, sia nel caso di rivalutazione a premio unico puro che in quello di rivalutazione a premio unico di inventario. L'unica cosa che cambia è l'espressione del tasso di premio unico puro della polizza aggiuntiva, che coincide con il tasso di riserva prestazioni. Nel caso della mista è

$${}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} = {}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} + {}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t} \quad .$$

Ripetendo il calcolo, infatti, si ottengono le stesse espressioni già ottenute per la capitale differito perché, come in quel caso, il tasso di premio unico puro si semplifica. □

Esempio 6.8. Si consideri una polizza di capitale differito a premio annuo costante, con rivalutazione del capitale assicurato a premio unico puro. Sia n la durata contrattuale, C_0 il capitale assicurato iniziale, definito alla stipula del contratto, C_{t-1} il capitale assicurato come rivalutato fino alla ricorrenza anniversaria $t-1$, P il premio annuo puro e x l'età dell'assicurato alla stipula del contratto. Naturalmente si ha

$$P = C_0\frac{{}_n\mathrm{E}_x}{{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} = C_0\frac{{}_n\mathrm{u}_x}{{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} \quad , \tag{6.11}$$

dove ${}_n\mathrm{u}_x$ è il tasso di premio unico puro, che coincide con il tasso di riserva prestazioni ed è lo stesso della versione a premio unico del contratto, trattata nell'esempio 6.5. Al tempo t, subito prima della rivalutazione, la riserva matematica della polizza è

$$ {}_tV_x = C_{t-1}\,{}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} - P\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t} = C_{t-1}\,{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} - P\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t} \;\; . $$

Fissato il tasso di rivalutazione ρ_t, e quindi l'utile da retrocedere $\Delta_t^{\mathrm{retr}} = {}_tV_x\,\rho_t$, il capitale aggiuntivo è dato da

$$ C_t^{\mathrm{agg}} = \frac{\Delta_t^{\mathrm{retr}}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}} = \frac{C_{t-1}\,{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} - P\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}\rho_t = C_{t-1}\,\rho_t - P\frac{{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}\rho_t \;\; . $$

Rispetto alla versione a premio unico si ottiene quindi un termine correttivo a sottrarre. Ricordando la (6.11), il termine correttivo può essere scritto nella forma

$$ P\,\frac{{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}\,\rho_t = C_0\,\frac{{}_n\mathrm{u}_x\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x}\,\rho_t $$

e quindi

$$ C_t^{\mathrm{agg}} = C_{t-1}\,\rho_t - C_0\,\frac{{}_n\mathrm{u}_x\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}\,\ddot{\mathrm{a}}_n x}\,\rho_t \;\; . $$

Essendo la regola di rivalutazione a premio unico puro, la riserva matematica della polizza aggiuntiva coincide con l'utile retrocesso e quindi la riserva matematica complessiva cresce esattamente dell'utile retrocesso. La regola di rivalutazione del capitale assicurato è

$$ C_t = C_{t-1} + C_t^{\mathrm{agg}} = C_{t-1}(1+\rho_t) - C_0\,\frac{{}_n\mathrm{u}_x\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}\,\ddot{\mathrm{a}}_n x}\,\rho_t \;\; . \qquad \square $$

Osservazione 6.4. Si può dimostrare che, nei casi di rilevanza pratica, il coefficiente "attuariale" del termine correttivo che compare nella regola di rivalutazione a premio unico puro della polizza di capitale differito a premio annuo dell'esempio 6.8 può essere approssimato efficacemente con

$$ \frac{{}_n\mathrm{u}_x\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} = \frac{{}_n\mathrm{E}_x\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t}\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} \approx \frac{n-t}{n} \;\; . $$

Accettando questa approssimazione la regola di rivalutazione del capitale assicurato diventa

$$ C_t = C_{t-1}(1+\rho_t) - C_0\,\frac{n-t}{n}\rho_t \;\; . \tag{6.12} $$

Se ne può ottenere un'interpretazione significativa riscrivendola nella forma

$$ C_t^{\mathrm{agg}} = C_t - C_{t-1} = (C_{t-1} - C_0)\rho_t + \frac{t}{n}C_0\,\rho_t \;\; , $$

che mostra come il capitale aggiuntivo derivante dalla rivalutazione al tempo t sia la somma di due componenti:

1. l'interesse al tasso ρ_t sulla rivalutazione intervenuta dalla data di stipula fino alla ricorrenza anniversaria precedente, cioè sui capitali aggiuntivi corrisposti in anni precedenti;
2. l'interesse al tasso ρ_t sulla frazione del capitale inizialmente assicurato che corrisponde ai t premi versati fino alla data corrente, rapportati agli n contrattualmente previsti.

L'interpretazione è la seguente: la prestazione è stata pagata per t/n e quindi il capitale aggiuntivo (che è un interesse) viene calcolato sui t/n del capitale inizialmente assicurato, cui si aggiunge l'"interesse composto", cioè la rivalutazione delle rivalutazioni concesse in anni precedenti, che spetta per intero.

Si noti che la (6.12), che va sotto il nome di *regola degli ennesimi* ed è nata come un'approssimazione della regola metodologicamente corretta, è ormai accettata anche a livello contrattuale. È infatti più "trasparente" e semplice da spiegare alla clientela e meno complessa da gestire per l'assicuratore. □

Osservazione 6.5. La regola di rivalutazione della prestazione per l'ultimo anno della polizza dell'esempio 6.8 è

$$C_n = C_{n-1}(1+\rho_n) - C_0 \, \frac{{}_n\mathrm{u}_x \; {}_0\ddot{\mathrm{a}}_{x+n}}{{}_0\mathrm{u}_{x+n} \; {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} \, \rho_n \quad .$$

Poiché ${}_0\ddot{\mathrm{a}}_{x+n} = 0$, il termine correttivo si annulla e si ha

$$C_n = C_{n-1}(1+\rho_n) \ ,$$

cioè nell'ultimo anno di polizza la rivalutazione è piena. Lo stesso accade anche per l'approssimazione agli ennesimi, essendo

$$C_n = C_{n-1}(1+\rho_n) - C_0 \, \frac{n-n}{n} \, \rho_n = C_{n-1}(1+\rho_n) \ ,$$

corentemente con l'interpretazione del termine correttivo fatta nell'osservazione 6.4: al tempo n tutti i premi contrattualmente previsti sono stati pagati. □

Esempio 6.9. In riferimento all'esempio 6.8, se la prestazione prevista è di tipo misto anziché di capitale differito, il risultato che si ottiene è formalmente analogo. L'unica differenza è nell'espresione del tasso di premio unico puro (che è ovviamente la stessa della mista a premio unico). Anche in questo caso la regola di rivalutazione può essere efficacemente approssimata con la regola degli ennesimi. □

Esempio 6.10. In una polizza di capitale differito o mista a premio annuo costante, con rivalutazione delle prestazioni a premio unico di inventario, si può ripetere il procedimento dell'esempio 6.8, adattandolo alla presenza del tasso di caricamento non nullo ${}_{n-t}g_{x+t}$. L'espressione che si ottiene è

$$C_t = C_{t-1}\left[1 + (1 - {}_{n-t}g_{x+t})\,\rho_t\right] - C_0\,\frac{{}_n\mathrm{u}_x\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x}\,(1 - {}_{n-t}g_{x+t})\,\rho_t \ ,$$

dove naturalmente il tasso di premio unico puro ${}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}$ è quello della polizza specifica (mista o capitale differito). Come nel caso delle polizze corrispondenti a premio unico, la rivalutazione è minore di quella del caso a premio unico puro, per la presenza del termine $(1 - {}_{n-t}g_{x+t}) < 1$. □

Esempio 6.11. Nel caso di una polizza di rendita vitalizia, immediata o posticipata, temporanea o meno, anticipata o posticipata, i risultati che si ottengono sono analoghi a quelli della polizza di capitale differito. L'analogia dipende dal fatto che nella polizza di capitale differito la riserva prestazioni e il premio unico puro sono proporzionali al capitale assicurato, mentre nella polizza di rendita la proporzionalità è rispetto alla rata della rendita assicurata. Se la polizza è a premio annuo, tuttavia, nel trasformare la regola di rivalutazione in formula ricorrente di rivalutazione della rata della rendita occorre distinguere fra il periodo pagamento premi, che nel caso differtio solitamente coincide con il periodo di differimento, e il periodo successivo. Nel primo periodo, infatti, sviluppando la (6.7) (o la (6.8), se la rivalutazione è a premio unico d'inventario) si ottiene che la rivalutazione della rata della rendita è "frenata" dalla presenza del premio annuo, mentre nel secondo periodo, essendo statai pagati tutti i premi previsti, la rivalutazione è piena (eventualmente corretta con il tasso di caricamento applicato). □

6.2.4 Retrocessione sotto forma di rivalutazione di premi e prestazioni

Come visto nell'analisi delle regole di rivalutazione delle polizze a premio annuo, la rivalutazione delle prestazioni è "frenata", rispetto alla rivalutazione piena, dal fatto che non tutti i premi sono stati pagati. Non è infatti possibile rivalutare le prestazioni in modo pieno perché si romperebbe l'equilibrio della polizza: per finanziare l'incremento di riserva sarebbe necessario un importo maggiore dell'utile da retrocedere. Una soluzione per ovviare a questo problema è di rivalutare anche il premio annuo che l'assicurato corrisponde; la rivalutazione riguarda naturalmente solo i premi ancora da versare. Illustriamo questo procedimento per il caso di una polizza mista a *premio annuo rivalutabile.*

Esempio 6.12. In una polizza mista a premio annuo rivalutabile, con capitale assicurato rivalutabile, durata n anni, età dell'assicurato alla stipula x, sia il capitale assicurato che il premio annuo rivalutano in modo pieno. Se i livelli iniziali del capitale assicurato e del premio annuo puro sono rispettivamente C_0 e P_0, la regola contrattuale è

$$\begin{aligned} C_t &= C_{t-1}(1+\rho_t) \ , \\ P_t &= P_{t-1}(1+\rho_t) \ . \end{aligned}$$

In forma chiusa si ottiene che

$$C_t = C_0 \prod_{k=1}^{t}(1+\rho_k) \ , \qquad\qquad P_t = P_0 \prod_{k=1}^{t}(1+\rho_k) \ .$$

La regola di rivalutazione è metodologicamente corretta. Infatti l'utile da retrocedere al tempo t è

$$\Delta_t^{\text{retr}} = {}_tV_x\,\rho_t = \left(C_{t-1}\,{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} - P_{t-1}\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}\right)\rho_t$$

e la riserva dopo la rivalutazione risulta

$$\begin{aligned} {}_xV_t^{\text{riv}} &= C_t\,{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} - P_t\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t} \\ &= C_{t-1}(1+\rho_t)\,{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} - P_{t-1}(1+\rho_t)\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t} \\ &= \left(C_{t-1}\,{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} - P_{t-1}\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}\right)(1+\rho_t) \\ &= {}_tV_x(1+\rho_t) \\ &= {}_tV_x + \Delta_t^{\text{retr}} \ , \end{aligned}$$

che mostra come la rivalutazione piena del capitale assicurato e del premio corrisponda all'attribuzione alla riserva della polizza dell'utile da retrocedere. □

6.3 Le opzioni implicite nella rivalutazione

La condizione che l'assicurato partecipi all'utile ma non al disutile, che viene implementata aggiungendo nella (6.6) un *floor* a zero per il tasso di rivalutazione, conferisce alla regola di rivalutazione una componente opzionale. Usando le proprietà dell'operatore max, possiamo infatti scomporre il tasso di rivalutazione per l'anno t in due componenti:

$$\rho_t = \rho_t^{\text{base}} + \rho_t^{\text{put}} \quad . \tag{6.13}$$

La prima, ρ_t^{base}, è il *tasso di rivalutazione base*; è il tasso di rivalutazione privato del floor:

$$\rho_t^{\text{base}} = \frac{\beta I_t - i}{1+i} \quad .$$

La seconda, ρ_t^{put}, è la differenza

$$\rho_t^{\text{put}} = \rho_t - \rho_t^{\text{base}} = \max\left(\frac{\beta I_t - i}{1+i}\,,\,0\right) - \frac{\beta I_t - i}{1+i} = \max\left(0\,,\,\frac{i - \beta I_t}{1+i}\right) \quad .$$

La scomposizione (6.13) è la *scomposizione put* del tasso di rivalutazione; lo esprime come somma della componente base con la *componente put*, che è un'opzione che protegge il minimo garantito nullo. La scomposizione put mostra come la rivalutazione consista nel retrocedere ρ_t^{base} più un'opzione put che protegge l'assicurato e scatta quando $\rho_t^{\text{base}} < 0$, riportando il tasso di rivalutazione al livello minimo garantito $\rho_t^{\text{gar}} = 0$. La componente put può anche essere scritta nella forma

$$\rho_t^{\text{put}} = \max\left(\rho_t^{\text{gar}} - \frac{\beta I_t - i}{1+i}\,,\,0\right) \quad ,$$

che è in un certo senso ridondante (perchè $\rho_t^{\text{gar}} = 0$), ma la rende più "riconoscibile" come opzione put.

Un altro modo interessante di vedere il fenomeno è la *scomposizione call* del tasso di rivalutazione:

$$\rho_t = \rho_t^{\text{gar}} + \rho_t^{\text{call}} \quad , \tag{6.14}$$

con

$$\rho_t^{\text{call}} = \rho_t - \rho_t^{\text{gar}} = \max\left(\frac{\beta I_t - i}{1+i} - \rho_t^{\text{gar}}\,,\,0\right) \quad ,$$

che mostra come il tasso di rivalutazione possa essere visto come il suo livello minimo garantito più un'opzione call che retrocede l'eventuale sovrarivalutazione oltre quella minima garantita.

Osservazione 6.6. Si noti che il tasso di rivalutazione minimo garantito $\rho_t^{\text{gar}} = 0$ corrisponde ad un minimo per il rendimento di gestione di i. Come visto nel paragrafo 6.2.1, infatti, l'assicuratore si impegna contrattualmente a rivalutare gli attivi di almeno il tasso tecnico i, che rappresenta quindi il rendimento minimo garantito del contratto. Il livello $i/\beta \geq i$ è invece il livello del rendimento di gestione, al di sotto del quale l'assicuratore non riesce a trattenere la frazione $1 - \beta$ del rendimento; è quindi un obiettivo "di secondo livello" per la gestione, essendo il tasso tecnico quello di "primo livello". □

Tralasciando il caso di retrocessione della rivalutazione sotto forma di cedole, nei casi più frequenti la regola di rivalutazione delle prestazioni è di tipo ricorrente. La componente opzionale della rivalutazione (put o call, a seconda del punto di vista) si applica ai livelli delle prestazioni risultati dalle rivalutazioni degli anni precedenti, nei quali le corrispondenti componenti opzionali potrebbero essere a loro volta scattate. Le componenti opzionali della rivalutazione di ogni anno vanno quindi a comporsi con quelle degli anni precedenti; sono pertanto opzioni *cliquet* (o *ratchet*), nelle quali la rivalutazione di ogni anno *consolida*. In particolare, non si possono compensare anni "cattivi", con rendimento di gestione insufficiente, con anni "buoni".

Esempio numerico 6.13. Si consideri il caso di una polizza con $\beta = 80\%$, $i = 4\%$ e durata $n = 2$ anni. Si consideri il caso di $I_1 = 8\%$ e $I_2 = 3\%$. Come visto nell'analisi dell'esempio numerico 6.1, nel primo anno il rendimento di gestione è ottimale:

$$\rho_1 = \max\left(\frac{80\% \times 8\% - 4\%}{1 + 4\%}\,,\, 0\right) = \frac{2.4\%}{1.04} \approx 2.31\% \ .$$

Dal punto di vista della scomposizione put si ha pertanto

$$\rho_1^{\text{base}} = \rho_1 \approx 2.31\% \ , \qquad \text{e} \qquad \rho_1^{\text{put}} = \rho_1 - \rho_1^{\text{base}} = 0 \ .$$

La l'opzione put protettiva non scatta (non c'è nulla da proteggere) e la componente base coincide con il tasso di rivalutazione. Dal punto di vista della scomposizione call, risulta

$$\rho_1^{\text{gar}} = 0 \ , \qquad \text{e} \qquad \rho_1^{\text{call}} = \rho_1 - \rho_1^{\text{gar}} = \rho_1 \approx 2.31\% \ .$$

La componente call coincide con il tasso di rivalutazione, che è tutto sovrarivalutazione rispetto al minimo $\rho_1^{\text{gar}} = 0$.

Nel secondo anno la situazione è invece pessima:

$$\rho_2 = \max\left(\frac{80\% \times 3\% - 4\%}{1 + 4\%}\,,\, 0\right) = 0,$$

l'utile retrocesso è nullo e, essendo $I_2 < i$, l'utile trattenuto è negativo: l'assicuratore deve integrare la riserva con il capitale proprio. Dal punto di vista della scomposizione put si ha

$$\begin{aligned} \rho_2^{\text{base}} &= \frac{80\% \times 3\% - 4\%}{1 + 4\%} = -\frac{1.6\%}{1.04} \approx -1.54\% \ , \\ \rho_2^{\text{put}} &= \rho_2 - \rho_2^{\text{base}} = \frac{1.6\%}{1.04} \approx 1.54\% \ . \end{aligned}$$

Senza protezione la rivalutazione sarebbe stata negativa, ma la put protettiva integra la rivalutazione al livello minimo garantito. La scomposizione call risulta

$$\rho_2^{\text{gar}} = 0 \ , \qquad \text{e} \qquad \rho_2^{\text{call}} = \rho_2 - \rho_2^{\text{gar}} = \rho_2 = 0 \ .$$

Poiché I_2 è risultato insufficiente, non vi è sovrarivalutazione rispetto al minimo (anzi, c'è sottorivalutazione, compensata però dalla put protettiva).

Si osservi che, in questo esempio, l'assicuratore ha subito una perdita il secondo anno, nonostante il primo anno il rendimento della gestione separata sia risultato più che sufficiente. Avendo però retrocesso la sovrarivalutazione all'assicurato, non ha potuto utilizzarla per compensare il deficit del secondo anno. □

L'esempio numerico 6.13 mostra come le opzioni di minimo garantito implicite nel meccanismo di rivalutazione, rappresentino un *rischio finanziario* non trascurabile per l'assicuratore. Nella pratica, le compagnie italiane "storiche" hanno ancora in essere molte polizze con rendimenti minimi garantiti al 4% o più. Queste polizze sono state vendute in anni in cui i rendimenti del mercato obbligazionario erano sufficientemente alti, ma pongono grossi problemi in questo periodo, in cui realizzare il 4% all'anno con una gestione prevalentemente obbligazionaria è molto difficile, se non impossibile.

Proprio per limitare il rischio finanziario delle opzioni implicite le compagnie italiane stanno sempre più orientandosi alla commercializzione di polizze con *rendimento minimo a scadenza*, dove il meccanismo di rivalutazione viene modificato in modo da consentire la compensazione, almeno parziale, fra anni "buoni" e anni "cattivi". L'idea, che non svilupperemo in questa sede, è quella di rimuovere il minimo dalla rivalutazione annuale, salvo poi effettuare un controllo al momento del pagamento della prestazione, per integrarla al minimo se necessario. Effettuando il controllo solo a scadenza, sulla rivalutazione globale, e non anno per anno, si ha la possibilità di compensazione tra anni diversi.

6.4 Estensioni

Oltre allo schema di rivalutazione presentato in questo capitolo, nella preatica assicurativa ne sono presenti altri, che possono essere descritti come varianti di questo. In questo paragrafo verranno descritte alcune di queste varianti, basate su una diversa caratterizzazione contrattuale del tasso di rivalutazione. Tutti i risultati presentati possono essere facilmente estesi a queste varianti.

6.4.1 Rendimento attribuito e rendimento trattenuto

Spesso viene contrattualmente stabilita una ripartizione del rendimento di gestione tra compagnia e assicurato diversa dalla (6.4). Se si indica con J_t la parte di rendimento di gestione attribuita all'assicurato per l'anno t, questa viene poi usata nella (6.6) al posto di βI_t per definire il tasso di rivalutazione.

Le pricipali regole contrattuali in uso per definire il rendimento attribuito, oltre alla già discussa (6.4), sono

- $J_t = I_t - I_{\mathrm{tr}}$, dove I_{tr} è il rendimento annuo trattenuto, ed è contrattualmente stabilito costante, diversamente da quanto accade nella scomposizione (6.4), dove il rendimento trattenuto è $(1-\beta)I_t$ e dipende dal rendimento di gestione;
- $J_t = \min(\beta I_t\,,\, I_t - I_{\mathrm{tr}})$, dove I_{tr} rappresenta il rendimento annuo minimo trattenuto fissato contrattualmente: all'assicurato viene retrocesso βI_t, a patto che il il rendimento trattenuto dalla compagnia risulti $(1-\beta)I_t \geq I_{\mathrm{tr}}$; se invece

$$(1-\beta)I_t < I_{\mathrm{tr}}\ , \qquad \text{cioè se} \qquad I_t - I_{\mathrm{tr}} < \beta I_t\ ,$$

  viene retrocesso $I_t - I_{\mathrm{tr}}$.

Si osservi che comunque il rendimento trattenuto, fisso o variabile, con o senza minimo, è calcolato prima di inserire J_t nella (6.6) ed è quindi subordinato alla concessione minimo garantito.

6.4.2 Minimi garantiti positivi

Nella (6.6) il minimo garantito è posto al livello $\rho^{\text{gar}} = 0$, ma può essere contrattualmente stabilito che sia $\rho^{\text{gar}} > 0$ e il tasso di rivalutazione, in generale, assume la forma

$$\begin{aligned}\rho_t &= \max\left(\frac{J_t - i}{1+i}\,,\,\rho^{\text{gar}}\right) && (6.15)\\ &= \frac{\max\left[J_t - i\,,\,\rho^{\text{gar}}(1+i)\right]}{1+i}\\ &= \frac{1+\max\left[J_t\,,\,i+\rho^{\text{gar}}(1+i)\right]}{1+i} - 1\ . && (6.16)\end{aligned}$$

Come si vede nella (6.16), il minimo complessivo per la compagnia è $i + \rho^{\text{gar}}(1+i) \approx i + \rho^{\text{gar}}$ e la presenza di un minimo garantito positivo rappresenta quindi un impegno ulteririore per l'assicuratore che, spesso, abbassa di conseguenza il tasso tecnico.

In questi anni, soprattutto nei canali bancassicurativi, i contratti vengono proposti spesso con $i = 0$ e $\rho^{\text{gar}} > 0$.

Appendici

Appendice A

Richiami sulla formula di Black e Scholes

Si richiama brevemente la formula di Black e Scholes, che verrà usata nella successiva appendice B, premettendo alcune definizioni e risultati sul moto Browniano geometrico.

A.1 Il moto Browniano geometrico

DEFINIZIONE A.1. Un *moto Browniano standard*, detto anche *processo di Wiener*, è un processo stocastico Z_t, definito per $t \geq 0$, con $Z_0 = 0$, che soddifsa le seguenti proprietà:

1. per ogni t ed T, con $0 \leq t < T$, l'incremento $Z_T - Z_t$ è distribuito normalmente, con media zero e varianza $T-t$, cioè $Z_T - Z_t \sim N(0, T-t)$;
2. per ogni coppia $[t_1, T_1]$ e $[t_2, T_2]$ di intervalli temporali non sovrapposti, cioè tali che $0 \leq t_1 < T_1 \leq t_2 < T_2$, gli incrementi $Z_{T_1} - Z_{t_1}$ e $Z_{T_2} - Z_{t_2}$ sono variabili aleatorie indipendenti;
3. ogni traiettoria è continua.

DEFINIZIONE A.2. Un *moto Browniano geometrico* è un processo stocastico S_t, definito per $t \geq 0$ da

$$S_t = S_0 \, \mathrm{e}^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma Z_t} \ ,$$

dove Z_t è un moto Browniano standard e $S_0 > 0$, μ (*coefficiente di drift*) e $\sigma > 0$ (*volatilità*) sono costanti.

Osservazione A.3. Il moto Browniano geometrico S_t è un processo positivo ed è soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$\mathrm{d}S_t = S_t \, \mu \, \mathrm{d}t + S_t \, \sigma \, \mathrm{d}Z_t \ ,$$

dove Z_t è un moto Browniano standard. □

Osservazione A.4. Il moto Browniano geometrico S_t ha distribuzione di probabilità condizionata lognormale, cioè per ogni t e T, con $0 \leq t \leq T$ si ha

$$\begin{aligned}\log \frac{S_T}{S_t} &= \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\left(Z_T - Z_t\right) \\ &\sim N\left(\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\,,\, \sigma^2(T-t)\right)\end{aligned}$$

e risulta quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t\left(\log \frac{S_T}{S_t}\right) &= \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \ , \\ \mathbb{E}_t\left(S_T\right) &= S_t\, \mathrm{e}^{\mu(T-t)} \ , \\ \mathrm{var}_t\left(\log \frac{S_T}{S_t}\right) &= \sigma^2 (T-t) \ , \\ \mathrm{var}_t\left(S_T\right) &= \left[\mathbb{E}_t\left(S_T\right)\right]^2 \left[\mathrm{e}^{\sigma^2(T-t)} - 1\right] \ .\end{aligned}$$

□

A.2 La formula di Black e Scholes

Definizione A.5. Una *opzione finanziaria call europea* con sottostante S_t, prezzo di esercizio K e scadenza T è un contratto che alla data T prevede il pagamento

$$C_T = \max\left(S_T - K\,,\, 0\right) \ .$$

Una *opzione finanziaria put europea* con sottostante S_t, prezzo di esercizio K e scadenza T è un contratto che alla data T prevede il pagamento

$$P_T = \max\left(K - S_T\,,\, 0\right) \ .$$

Teorema A.6 (Formula di Black e Scholes). Si consideri un mercato perfetto, con un titolo di valore S_t che segue un moto Browniano geometrico con coefficiente di drift μ e volatilità σ e che non stacca dividendi né cedole. Si assuma che il segmento obbligazionario del mercato sia in condizioni di certezza e che esprima una legge esponenziale di equivalenza finanziaria, con intensità istantanea di interesse r. Il valore di mercato in $t < T$ dell'opzione finanziaria europea di tipo call, con sottostante S_t, prezzo di esercizio K e scadenza $T > t$ è

$$V(t, C_T) = S_t\, N(d_1) - K\, \mathrm{e}^{-r(T-t)}\, N(d_2) \ ,$$

dove N è la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard e

$$d_1 = \frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad ,$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad .$$

Il valore di mercato in $t < T$ dell'opzione put europea, con stesso sottostante, prezzo di esercizio e scadenza, è

$$V(t, P_T) = K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,N(-d_2) - S_t\,N(-d_1) \quad . \qquad \square$$

Si consideri ora al tempo t un contratto che, al tempo $T > t$ paga il valore del sottostante S_T con il minimo di K, cioè il payoff

$$X_T = \max(S_T\,,\,K) \quad .$$

Applicando le proprietà dell'operatore max, se ne può attuare la *scomposizione put*

$$X_T = S_T + \max(K - S_T\,,\,0) = S_T + P_T \quad ,$$

che lo esprime come un portafoglio composto dal sottostante e da una opzione put che protegge il minimo garantito, o la *scomposizione call*

$$X_T = K + \max(S_T - K\,,\,0) \quad ,$$

che lo propone come un portafoglio composto da un titolo a cedola nulla che paga l'importo certo K più una opzione call che paga l'eventuale maggior valore del sottostante rispetto al minimo garantito.

Corollario A.7. Nelle ipotesi del teorema A.6, si ha che

$$V(0, X_T) = S_t\,N(d_1) + K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,N(-d_2) \quad .$$

Dimostrazione. Utilizzando la scomposizione put del payoff, possiamo valutare il contratto per linearità. Per l'assenza di arbitraggio si ha infatti che

$$V(0, S_T) = S_t \quad ,$$

mentre la formula di Black e Scholes fornisce il valore della componente put

$$V(t, P_T) = K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,N(-d_2) - S_t\,N(-d_1) \quad .$$

Quindi

$$V(t, X_T) = V(0, S_T) + V(t, P_T)$$

$$
\begin{aligned}
&= S_t + K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,N(-d_2) - S_t\,N(-d_1) \\
&= S_t[1 - N(-d_1)] + K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,N(-d_2) \ .
\end{aligned}
$$

Ricordando che N è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria normale standard, cioè che

$$N(x) = \mathbb{P}(\varepsilon < x) \ ,$$

dove $\varepsilon \sim N(0,1)$, si ha che

$$1 - N(-d_1) = 1 - \mathbb{P}(\varepsilon < -d_1) = \mathbb{P}(\varepsilon \geq -d_1) = \mathbb{P}(-\varepsilon \leq d_1) \ .$$

Per le proprietà della distribuzione normale standard risulta che

$$\mathbb{P}(-\varepsilon \leq d_1) = \mathbb{P}(\varepsilon < d_1) = N(d_1)$$

e si è dimostrata la tesi.[1] $\square$

[1] La dimostrazione poteva naturalmente essere condotta anche a partire dalla scomposizione call:

$$
\begin{aligned}
V(0,X_T) &= V(0,K) + V(t,C_T) = K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)} + S_t\,N(d_1) - K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,N(d_2) \\
&= S_t\,N(d_1) + K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}[1 - N(d_2)] = S_t\,N(d_1) + K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(-d_2) \ .
\end{aligned}
$$

Appendice B

Un esempio di valutazione mark to market di polizze rivalutabili

Si consideri una polizza vita rivalutabile con rivalutazione piena del capitale assicurato. La prestazione pagabile al tempo t è quindi del tipo

$$Y_t = Y_0 \, \Phi(0,t) \, \mathbb{1}_A \ ,$$

dove Y_0 è il livello iniziale della prestazione,

$$\Phi(0,t) = \prod_{k=1}^{t} (1 + \rho_t)$$

e A è l'evento il cui verificarsi in t determina il pagamento della prestazione (vita in t o morte dell'assicurato in $(t-1, t]$). Il valore di mercato della prestazione, accettando come al solito l'indipendenza degli eventi demografici da quelli dei mercati finanziari è

$$V(0, Y_t) = Y_0 \, V\big(0, \Phi(0,t)\big) \ \mathbb{P}^{\mathrm{II}}(A) \ ,$$

essendo $\mathbb{P}^{\mathrm{II}}(A)$ la probabilità dell'evento A, calcolata secondo la probabilità del II ordine condivisa nel mercato, che assumeremo nota. L'unico problema è pertanto quello di determinare il valore del fattore di valutazione puramente finanziario $V\big(0, \Phi(0,t)\big)$. A tale fine assumeremo che:

- il valore degli attivi S_t della gestione separata segua un processo lognormale, con volatilità σ e livello iniziale S_0;
- il mercato obbligazionario sia in condizioni di certezza e che esprima una legge esponenziale di equivalenza finanziaria, con intensità istantanea di interesse r;

- il rendimento di gestione nell'anno $[k-1,k]$ sia espresso da

$$I_k = \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k} \quad .$$

Osservazione B.1. Le ipotesi della valutazione appena esposte non sono adeguate al caso italiano, dove la normativa impone che le gestioni separate abbiano un contenuto prevalentemente obbligazionario. Modelli di mercato più adeguati sono però basati su processi stocastici molto più complessi del moto Browniano geometrico, che rendono l'analisi molto più complicata. I risultati della valutazione che otterremo in questo contesto modellistico più semplice potranno tuttavia essere considerati una "prima approssimazione".[1] □

B.1 Il calcolo del fattore di valutazione

Il calcolo del fattore di valutazione verrà condotto in due passi: verrà prima analizzato il caso $t=1$ e poi il caso generale.

Lemma B.2. Se $t=1$ si ha che

$$V\big(0, \Phi(0,1)\big) = \frac{(1-\beta)\,\mathrm{e}^{-r} + \beta\, N(d_1) + (i+\beta)\mathrm{e}^{-r}\, N(-d_2)}{1+i} \quad , \qquad \text{(B.1)}$$

dove

$$d_1 = \frac{r - \log\left(1 + \frac{i}{\beta}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \quad , \qquad \text{(B.2)}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \qquad \text{(B.3)}$$

e N è la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard.

Dimostrazione. Applicando la definizione di ρ_1 e I_1 e le proprietà dell'operatore max, il payoff $\Phi(0,1)$, esigibile al tempo 1, può essere scritto nella forma

$$\Phi(0,1) = 1 + \rho_1$$

[1] Per degli esempi di valutazione metodologicamente corretti si veda C. Pacati (2003), *Financial Valuation of a New Generation Participating Life-Insurance Contract* e G. Castellani, M. De Felice, F. Moriconi e C. Pacati (2005), *Embedded Value in Life Insurance.*

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1+i}\,[1+\max(\beta I_1\,,\,i)] \\
&= \frac{1}{1+i}\left[1+\max\left(\beta\frac{S_1}{S_0}-\beta\,,\,i\right)\right] \\
&= \frac{1}{1+i}\left[1-\beta+\beta\,\max\left(\frac{S_1}{S_0}\,,\,\frac{i+\beta}{\beta}\right)\right] \\
&= \frac{1}{1+i}\left[1-\beta+\frac{\beta}{S_0}\,\max\left(S_1\,,\,\left(1+\tfrac{i}{\beta}\right)S_0\right)\right] \quad .
\end{aligned}
$$

Per linearità il suo valore di mercato in zero è

$$
V\big(0,\Phi(0,1)\big) = \frac{(1-\beta)\,\mathrm{e}^{-r}+\frac{\beta}{S_0}\,V\left(0,\max\left(S_1\,,\,\left(1+\tfrac{i}{\beta}\right)S_0\right)\right)}{1+i} \quad . \tag{B.4}
$$

Posto

$$
K = \left(1+\tfrac{i}{\beta}\right)S_0 \quad ,
$$

che è costante alla data di valutazione, per il corollario A.7 risulta

$$
\begin{aligned}
V\big(0,\max(S_1\,,\,K)\big) &= S_0\,N(d_1)+K\,\mathrm{e}^{-r}N(-d_2) \\
&= \frac{S_0}{\beta}\left[\beta\,N(d_1)+(i+\beta)\,\mathrm{e}^{-r}N(-d_2)\right] \quad ,
\end{aligned} \tag{B.5}
$$

dove

$$
d_1 = \frac{\log\frac{S_0}{K}+r+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} = \frac{r-\log\left(1+\frac{i}{\beta}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \quad , \qquad d_2 = d_1-\sigma \quad .
$$

Sostituendo nella (B.4) l'espressione (B.5) si ottiene l'asserto. □

Osservazione B.3. Poiché il membro destro della (B.1) non dipende da S_0, che riassume le condizioni di mercato alla data zero di valutazione, il risultato ottenuto nel lemma B.2 non dipende separatamente dalla data di valutazione zero e dalla scadenza 1, ma solo dalla durata unitaria. Se si pone pertanto

$$
u = \frac{1}{1+i}\left[(1-\beta)\,\mathrm{e}^{-r}+\beta\,N(d_1)+(i+\beta)\,\mathrm{e}^{-r}\,N(-d_2)\right] \quad ,
$$

si può estendere il risultato del lemma:

$$
V\big(t-1,\Phi(t-1,t)\big) = u \qquad \text{per ogni } t>0. \tag{B.6}
$$

□

Osservazione B.4. Il fattore unitario di valutazione u può essere scritto nella forma equivalente

$$u = \frac{1}{1+i}\left[(1+i)\,\mathrm{e}^{-r} + \beta\, N(d_1) - (i+\beta)\,\mathrm{e}^{-r}\, N(d_2)\right] \ .$$

Infatti $N(-d_2) = 1 - N(d_2)$ e quindi

$$\begin{aligned}(1-\beta)\,\mathrm{e}^{-r} &+ (i+\beta)\,\mathrm{e}^{-r}\, N(-d_2) \\ &= (1-\beta)\,\mathrm{e}^{-r} + (i+\beta)\,\mathrm{e}^{-r} - (i+\beta)\,\mathrm{e}^{-r}\, N(d_2) \\ &= (1+i)\,\mathrm{e}^{-r} - (i+\beta)\,\mathrm{e}^{-r}\, N(d_2) \ . \quad \square\end{aligned}$$

TEOREMA B.5. Per ogni $t > 0$ intero si ha

$$V\big(0, \Phi(0,t)\big) = u^t \ , \tag{B.7}$$

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione su t.
Per $t = 1$, base dell'induzione, l'asserto è stato dimostrato nel lemma B.2.
Assunto quindi vero il risultato per $t-1$:

$$V\big(0, \Phi(0,t-1)\big) = u^{t-1} \ ,$$

osserviamo anzitutto che, per l'assenza di arbitraggi non rischiosi[2], risulta

$$V\big(0, \Phi(0,t)\big) = V\Big(0, V\big(t-1, \Phi(0,t)\big)\Big) \ .$$

Poiché

$$\Phi(0,t) = \prod_{k=1}^{t}(1+\rho_k) = \left[\prod_{k=1}^{t-1}(1+\rho_k)\right](1+\rho_t) = \Phi(0,t-1)\,\Phi(t-1,t) \ ,$$

si ottiene quindi che

$$V\big(0, \Phi(0,t)\big) = V\Big(0, V\big(t-1, \Phi(0,t-1)\,\Phi(t-1,t)\big)\Big) \ .$$

[2]Se si considera al tempo t un contratto che al tempo $s > t$ paga l'importo X_s, per l'ipotesi di assenza di arbitraggi non rischiosi è sempre vero che per ogni data intermedia T ($t \le T \le S$) il contratto che paga in T l'importo $Y_T = V(T, X_s)$ ha prezzo si mercato in t

$$V(t, Y_T) = V\big(t, V(T, X_s)\big) = V(t, X_s) \ .$$

Il fattore $\Phi(0,t-1)$ è noto alla data $t-1$ e per la proprietà di indipendenza dall'importo si ha quindi che

$$V\big(t-1, \Phi(0,t-1)\,\Phi(t-1,t)\big) = \Phi(0,t-1)\,V\big(t-1, \Phi(t-1,t)\big) = \Phi(0,t-1)\,u \ \ .$$

Sostituendo si ottiene che

$$V\big(0, \Phi(0,t)\big) = V\left(0, \Phi(0,t-1)\,u\right) \ \ .$$

Poiché u è una costante, usando nuovamente l'indipendenza dall'importo e applicando l'ipotesi induttiva si ha

$$V\big(0, \Phi(0,t)\big) = u\,V\left(0, \Phi(0,t-1)\right) = u\,u^{t-1} = u^t \ \ ,$$

che conclude la dimostrazione. □

Per concludere l'analisi è opportuno calcolare le scomposizoni put e call del fattore di valutazione. Esse inducono naturalmente le scomposizioni put e call del valore della prestazione.

B.2 La scomposizione put del fattore di valutazione

La scomposizione put del fattore di rivalutazione è

$$\Phi(0,t) = \Phi^{\text{base}}(0,t) + \Phi^{\text{put}}(0,t) \ \ ,$$

dove $\Phi^{\text{base}}(0,t)$ è calcolato come $\Phi(0,t)$ ma con la successione dei tassi di rivalutazione base

$$\rho_k^{\text{base}} = \frac{\beta I_k - i}{1+i} \ \ ,$$

cioè

$$\Phi^{\text{base}}(0,t) = \prod_{k=1}^{t}(1+\rho_k^{\text{base}}) \ \ ,$$

e la componente put del fattore di valutazione è

$$\Phi^{\text{put}}(0,t) = \Phi(0,t) - \Phi^{\text{base}}(0,t) \ \ .$$

LEMMA B.6. Se $t=1$ si ha che

$$V\big(0, \Phi^{\text{base}}(0,1)\big) = \frac{1}{1+i}\left[(1-\beta)\,\mathrm{e}^{-r} + \beta\right] \ \ . \tag{B.8}$$

Dimostrazione. Ripetendo l'analisi fatta per $\Phi(0,1)$ nella dimostrazione del lemma B.2, si ha che

$$\begin{aligned}\Phi^{\text{base}}(0,1) &= 1+\rho_1^{\text{base}}\\ &= \frac{1}{1+i}\,(1+\beta I_1)\\ &= \frac{1}{1+i}\left(1+\beta\frac{S_1}{S_0}-\beta\right)\\ &= \frac{1}{1+i}\left(1-\beta+\frac{\beta}{S_0}S_1\right)\ .\end{aligned}$$

Il valore di mercato del fattore di rivalutazione base è quindi per linearità

$$V\big(0,\Phi^{\text{base}}(0,1)\big) = \frac{1}{1+i}\big[(1-\beta)\,\mathrm{e}^{-r}+\beta\big]\ . \qquad \square$$

Osservazione B.7. Come nel caso del fattore di valutazione complessivo, anche il fattore di rivalutazione base unitario dipende solo dalla durata unitaria del periodo di valutazione. Se poniamo quindi

$$b = \frac{1}{1+i}\big[(1-\beta)\,\mathrm{e}^{-r}+\beta\big]\ ,$$

che è costante, per ogni $t \geq 0$ si ha che

$$V\big(t-1,\Phi^{\text{base}}(t-1,t)\big) = b\ . \qquad \square$$

TEOREMA B.8. Per ogni $t > 0$ intero si ha che

$$V\big(0,\Phi^{\text{base}}(0,t)\big) = b^t\ . \tag{B.9}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema B.5. $\square$

COROLLARIO B.9. Il valore della componente put del fattore di valutazione è

$$V\big(0,\Phi^{\text{put}}(0,t)\big) = V\big(0,\Phi(0,t)\big) - V\big(0,\Phi^{\text{base}}(0,t)\big) = u^t - b^t\ . \qquad \square$$

B.3 La scomposizione call del fattore di valutazione

La determinazione delle componenti della scomposizione call del fattore di valutazione è più semplice. La scomposizione call del fattore di rivalutazione è

$$\Phi(0,t) = \Phi^{\text{gar}}(0,t) + \Phi^{\text{call}}(0,t)\ ,$$

dove $\Phi^{\mathrm{gar}}(0,t)$ è calcolato come $\Phi(0,t)$ ma usando ogni anno il livello minimo garantito del tasso di rivalutazione $\rho_k^{\mathrm{gar}} = 0$; si ottiene $\Phi^{\mathrm{gar}}(0,t) = 1$. La componente call della scomposizione è

$$\Phi^{\mathrm{call}}(0,t) = \Phi(0,t) - \Phi^{\mathrm{gar}}(0,t) \ .$$

I relativi valori di mercato sono pertanto

$$\begin{aligned} &V\big(0, \Phi^{\mathrm{gar}}(0,t)\big) = \mathrm{e}^{-rt} \ , \\ &V\big(0, \Phi^{\mathrm{call}}(0,t)\big) = V\big(0, \Phi(0,t)\big) - V\big(0, \Phi^{\mathrm{gar}}(0,t)\big) = u^t - \mathrm{e}^{-rt} \ . \end{aligned}$$

Bibliografia

[1] Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., *Manuale di Finanza. I. Tassi d'interesse. Mutui e obbligazioni*, Società editrice il Mulino, Bologna 2005.

[2] Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., *Manuale di Finanza. II. Teoria del portafoglio e mercato azionario*, Società editrice il Mulino, Bologna 2005.

[3] Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., *Manuale di Finanza. III. Modelli stocastici e contratti derivati*, Società editrice il Mulino, Bologna 2006.

[4] Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., Pacati, C., *Embedded Value in Life Insurance*, `http://www.econ-pol.unisi.it/didattica/imaav/EVLI.pdf`, 2005.

[5] Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., Pacati, C., *Pricing Formulae for Financial Options and Guarantees Embedded in Profit Sharing Life Insurance Policies*, `http://www.econ-pol.unisi.it/didattica/imaav/ClosedForm_v10Feb07.pdf`, 2005.

[6] de Finetti, B., *Lezioni di matematica attuariale*, Edizioni Ricerche, Roma 1956.

[7] Moriconi, F., *Matematica Finanziaria*, Società editrice il Mulino, Bologna 1994.

[8] Pacati, C., *Financial Valuation of a New Generation Participating Life-Insurance Contract*, Proceedings of the 6th Spanish-Italian Meeting on Financial Mathematics (Trieste, 3–5 July 2003), `http://www.econ-pol.unisi.it/didattica/imaav/FVNGPLIC.pdf`.