Capitolo 4. Scelte in condizioni di incertezza

Nell'economia che abbiamo analizzato nei due capitoli precedenti tutto è noto con certezza: i risparmiatori conoscono con certezza il rendimento che otterranno sui propri risparmi e gli imprenditori conoscono con certezza la reddivitità dei propri progetti di investimento. Ma sappiamo che una delle funzioni fondamentali dei mercati finanziari è l'allocazione del rischio. Per comprendere e analizzare come essi svolgano tale funzione, abbiamo bisogno di un apparato concettuale che ci consenta di capire come i consumatori e gli imprenditori compiono le proprie scelte in condizioni di incertezza.

Questo capitolo intende fornire proprio questo apparato concettuale. Si vedrà che la teoria dell'utilità attesa consente di analizzare in modo coerente la scelta quando questa richiede il confronto tra somme di denaro incerte (o tra panieri di consumo incerti). Inoltre, questa teoria ci permette di caratterizzare sia l'atteggiamento degli individui verso il rischio sia la rischiosità di lotterie diverse. In altri termini, la teoria ci consente di stabilire 1) se e in che misura l'individuo A sia più avverso al rischio dell'individuo B, e 2) se la lotteria A sia più rischiosa della lotteria B.

Grazie a questo apparato concettuale, nei capitoli seguenti vedremo come la presenza di incertezza modifichi l'equilibrio del mercato dei capitali rispetto alla situazione di certezza ipotizzata nei capitoli 2 e 3, creando una dimensione finora assente, cioè la scelta di portafoglio.

1 Teoria dell'utilità attesa

Immaginiamo che, invece di scegliere tra panieri di consumo certi, gli individui scelgano tra "lotterie" che offrono premi (monetari o reali) incerti, ovvero tra distribuzioni di probabilità. Come fanno a individuare la "lotteria" migliore?

Il criterio di scelta più usato in economia è quello dell'utilità attesa: l'utilità di una lotteria è pari al valore atteso dell'utilità dei suoi possibili premi, cioè la sua utilità media ponderata con le probabilità dei possibili premi.

Questo criterio di scelta è appropriato se le preferenze degli individui sulle lotterie e sui loro premi soddisfano alcune condizioni. Prima di esporre queste condizioni, occorre precisare il concetto di "lotteria" e di "scelta tra lotterie".

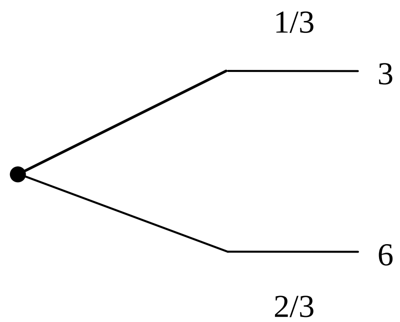
1.1 Definizioni

Si consideri l'insieme dei premi incerti e mutuamente esclusivi S, e l'insieme P delle distribuzioni di probabilità di tali premi. Qui tratteremo solo delle distribuzioni di probabilità semplici, cioè lotterie che hanno un numero finito di esiti possibili.

Formalmente, una distribuzione di probabilità semplice p su S è individuata da a) un sottoinsieme finito di S (supporto finito) e b) un numero $p(x)$ associato a ciascun pagamento x compreso nel supporto della distribuzione, dove $p(x)$ è compreso tra 0 e 1 e $\sum_S p(s) = 1$. La distribuzione p è anche detta una **lotteria**, ed è possibile darne una semplice rappresentazione grafica.

Per esempio, se supponiamo che con probabilità 1/3 io riceva 3 bottiglie di vino e con probabilità 2/3 ne riceva 6, il supporto della distribuzione è $\{3, 6\}$, p(3)=1/3 e p(6)=2/3. Essa può essere rappresentata dal seguente "nodo aleatorio":

Figura 1. Esempio di lotteria



In generale, se una lotteria con due esiti x e y è descritta da una distribuzione p tale che $p(x) = \alpha$ e $p(y) \equiv 1 - p(x) = 1 - \alpha$, indicheremo tale lotteria con la scrittura:

$$G(x, y : \alpha).$$

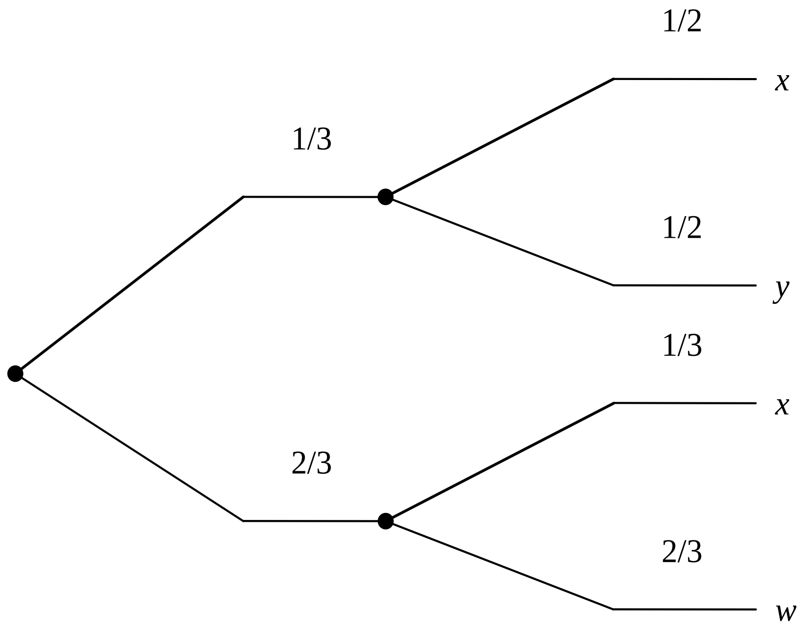
A partire da due distribuzioni semplici p e q, si può costruire una **lotteria composta**, cioè una "lotteria di lotterie": per esempio, con probabilità λ si partecipa a una lotteria che assegna probabilità p all'esito x e con probabilità $1-\lambda$ a una lotteria che assegna q a tale esito. Ne deriva una nuova lotteria in cui la probabilità dell'esito x è $\lambda p + (1-\lambda)q$. Più precisamente, la lotteria composta è una nuova distribuzione di probabilità tale che:

a) il suo supporto è l'unione dei supporti delle due distribuzioni:

b) se x appartiene a tale unione, allora la probabilità assegnata a x dalla nuova distribuzione è $\lambda p(x) + (1-\lambda)q(x)$, dove si conviene che $p(x) = 0$ se x non appartiene al supporto di p, e analogamente per q.

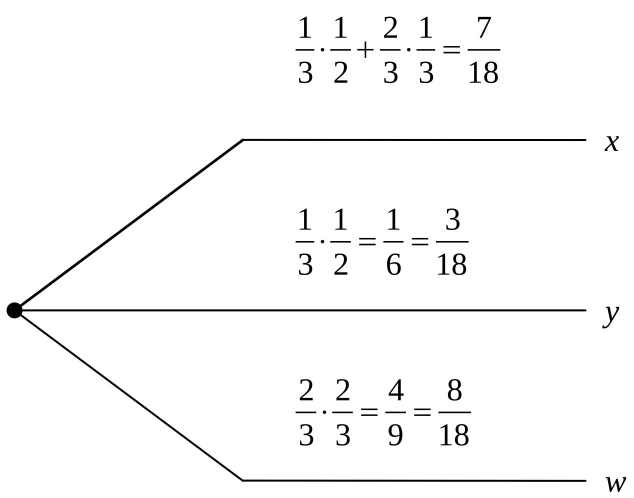
Quindi una lotteria composta può essere ridotta ad una lotteria semplice il cui supporto è formato dall'unione dei supporti delle lotterie che la compongono. Ciò è illustrato nelle due figure seguenti. La Figura 2 fornisce un esempio di lotteria composta:

Figura 2. Esempio di lotteria composta



La lotteria composta rappresentata nella Figura 2 può essere ridotta ad una lotteria semplice con supporto $\{x, y, w\}$, in cui $p(x) = 7/18$, $p(y) = 3/18$ e $p(w) = 8/18$:

Figura 3. Riduzione della lotteria composta della Figura 2



1.2 Assiomi

Per caratterizzare le preferenze dell'individuo che effettua le scelte (il decisore), supponiamo innanzitutto che egli preferisca "più" a "meno", cioè che valga il principio di non-saturazione (o non-sazietà), come normalmente si suppone nella teoria del consumatore: davanti alla scelta tra un paniere di consumo *x* e un paniere *y*, il soggetto preferirà *x* a *y* se almeno uno degli elementi di *x* è maggiore dell'elemento corrispondente di *y*. Formalmente, $x > y \Rightarrow x \succ y$, e $x \geq y \Rightarrow x \succsim y$.

Oltre a questo principio, la teoria dell'utilità attesa si basa sui seguenti assiomi sulle preferenze:

A1. *Completezza*: per ogni $x \in S$ e $y \in S$, $x \succ y$ oppure $x \prec y$ oppure $x \sim y$.

A2. *Transitività*: se $x \succ y$ e $y \succ z$, allora $x \succ z$; se $x \sim y$ e $y \sim z$, allora $x \sim z$.

A3. *Indipendenza forte*: se $x \sim y$, allora $G(x, z : \alpha) \sim G(y, z : \alpha)$, dove z è un premio mutuamente esclusivo sia rispetto a *x* nella prima lotteria che rispetto a *y* nella seconda.

A4. *Misurabilità*: se $x \succ y \succsim z$ oppure $x \succsim y \succ z$, allora esiste un solo valore $\alpha \in (0,1)$ tale che $y \sim G(x, z : \alpha)$.

A5. *Ordinabilità*: si supponga che $x \succsim y \succsim z$ e $x \succsim u \succsim z$, e che $y \sim G(x, z : \alpha_1)$ e $u \sim G(x, z : \alpha_2)$. Allora se $\alpha_1 > \alpha_2$, ne segue che $y \succsim u$; se invece $\alpha_1 = \alpha_2$, ne segue che $y \sim u$.

I primi due assiomi impongono dei requisiti di razionalità sulle scelte. Il terzo stabilisce che se due lotterie differiscono solo per uno dei due premi, l'individuo ordina tali lotterie nello stesso modo in cui ordinerebbe i due premi diversi: in altri termini, il fatto che nelle lotterie questi premi siano ottenuti solo con una certa probabilità (in alternativa a un altro premio comune) non influisce sul loro ordinamento nelle preferenze. Il quarto e quinto assioma servono ad assicurare che queste preferenze possano essere espresse con una funzione di utilità.

1.3 Derivazione della funzione di utilità attesa

Una funzione di utilità $u(\cdot)$ consente di ordinare premi in modo coerente con l'ordinamento delle preferenze individuali, assegnando valori più elevati a premi preferiti rispetto ad altri e valori uguali a premi tra cui l'individuo è indifferente. Formalmente, la funzione $u(\cdot)$ è tale che $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y$ e che $u(x) = u(y) \Leftrightarrow x \sim y$.

Dimostriamo innanzitutto che una funzione di questo tipo può essere ottenuta semplicemente costruendo lotterie equivalenti al premio *x* e al premio *y*, cioè lotterie che danno all'individuo la stessa utilità, e caratterizzate dal fatto di avere in comune due esiti estremi *a* e *b* (nel senso che *a* è preferito a *x* e *y*, e questi sono preferiti a *b*). L'utilità di *x* sarà allora la probabilità del premio *a* nella lotteria che dà la stessa utilità di *x*, e similmente per *y*.

Formalmente, definiamo *a* e *b* tali che:

$$a \succ x \succsim b \text{ oppure } a \succsim x \succ b$$

e

$$a \succ y \succsim b \text{ oppure } a \succsim y \succ b \, .$$

Usando l'assioma A4, sappiamo che esiste un solo valore $\alpha(x)$ tale $x \sim G(a,b:\alpha(x))$ e un solo valore $\alpha(y)$ tale $y \sim G(a,b:\alpha(y))$. Allora possiamo usare l'assioma A5 per ordinare i due esiti *x* e *y* in base a $\alpha(x)$ e $\alpha(y)$ in modo univoco. In base ad A5, infatti:

$$\begin{aligned} &\text{se } \alpha(x) > \alpha(y), \text{ allora } x \succ y; \\ &\text{se } \alpha(x) < \alpha(y), \text{ allora } x \prec y; \\ &\text{se } \alpha(x) = \alpha(y), \text{ allora } x \sim y \, . \end{aligned}$$

Così abbiamo trovato una funzione di utilità: possiamo infatti scrivere $\alpha(x) = u(x)$ e $\alpha(y) = u(y)$.

Ora vogliamo dimostrare che questa funzione di utilità ha una proprietà particolare, quella dell'*utilità attesa*, che ci consente di assegnare un'utilità anche a delle lotterie, cioè a esiti incerti. Essa stabilisce che l'utilità di una lotteria tra *x* e *y* è il valore atteso dell'utilità dei due esiti *x* e *y*, cioè di $u(x)$ e $u(y)$:

$$u\left[G\left(x, y : \beta\right)\right] = \beta u(x) + (1-\beta) u(y) \, .$$

Per mostrare ciò, procediamo come abbiamo fatto prima per derivare la funzione $u(\cdot)$. Costruiamo due lotterie con premi *a* e *b* che siano rispettivamente equivalenti in termini di utilità ai premi *x* e *y*. Costruiamo cioè una prima lotteria tale che $x \sim G(a,b:\alpha(x))$ e una seconda lotteria tale che $y \sim G(a,b:\alpha(y))$.

Queste due lotterie equivalenti sono rappresentate graficamente nella Figura 4.

Ora consideriamo un terzo premio *z*, tale che $x \succ z \succsim y$ oppure $x \succsim z \succ y$. Per l'assioma A3 (indipendenza forte), questo nuovo premio non influisce sulla preferenza tra *x* e *y*. Come valutare il premio *z* in termini di utilità? Per l'assioma A4 esiste un'unica probabilità $\beta(z)$ tale che l'individuo sia indifferente tra *z* e una lotteria tra *x* e *y*, in cui $\beta(z)$ è la probabilità del premio *x*. Formalmente, questa lotteria è tale che $z \sim G(x, y : \beta(z))$, e graficamente possiamo rappresentarla come una lotteria composta.

Questa lotteria composta è rappresentata nella Figura 5.

Figura 4. Lotterie equivalenti ai premi *x* e *y*

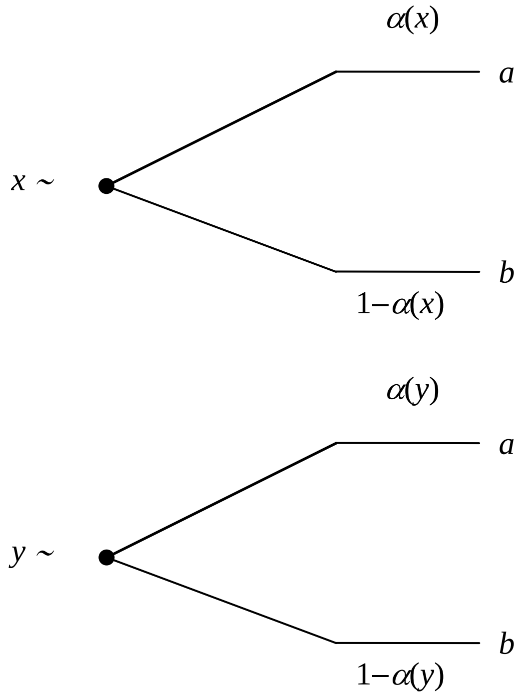
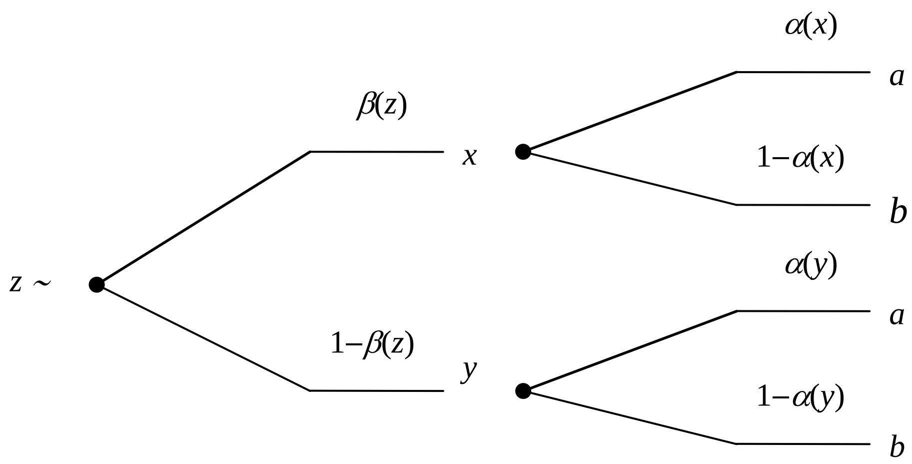
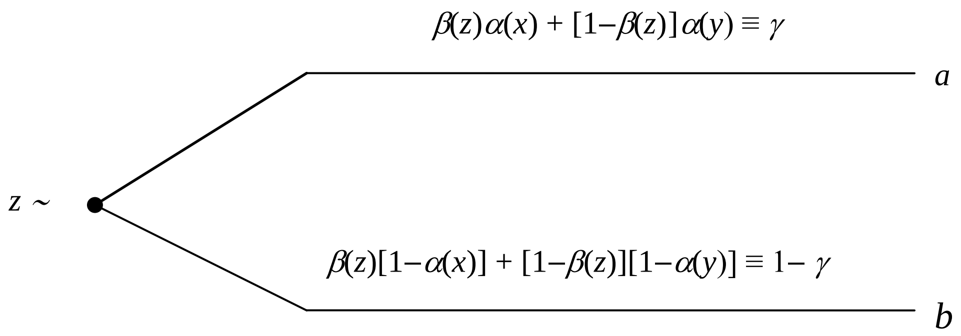


Figura 5. Lotteria equivalente al premio *z*



Ma sappiamo che la lotteria composta rappresentata nella Figura 5 è equivalente alla lotteria semplice espressa sugli esiti estremi *a* e *b*, cioè $z \sim G(a,b:\gamma)$, dove γ è la probabilità del premio *a*:

Figura 6. Lotteria semplice con premi *a* e *b* equivalente al premio *z*



In altri termini, la lotteria equivalente a *z* può essere espressa come:

$$z \sim G\big(a,b:\gamma\big) \equiv G\big(a,b:\beta(z)\alpha(x)+[1-\beta(z)]\alpha(y)\big).$$

Ma, come spiegato più sopra, $\alpha(x)=u(x)$ e $\alpha(y)=u(y)$. Quindi quest'ultima espressione diventa:

$$z \sim G\big(a,b:\beta(z)u(x)+[1-\beta(z)]u(y)\big).$$

Ma applicando nuovamente gli assiomi A4 e A5, si vede che $\gamma=\alpha(z)=u(z)$, cioè la misura cardinale dell'utilità rispetto agli esiti estremi *a* e *b*, così già fatto per *x* e *y*. Ciò dimostra che:

$$u(z) \equiv u\Big[G\big(x,y:\beta(z)\big)\Big] = \beta(z)u(x)+[1-\beta(z)]u(y), \qquad (1)$$

cioè l'utilità di *z*, ovvero l'utilità della lotteria che paga *x* con probabilità $\beta(z)$ e *y* con probabilità $1-\beta(z)$, è la media delle utilità di *x* e di *y* ponderate con le stesse probabilità. In breve, *l'utilità della lotteria è pari all'utilità attesa dei suoi premi.*

I premi possono essere definiti in termini monetari. Per esempio, se la ricchezza *w* di un individuo è aleatoria, l'utilità attesa della sua ricchezza è:

$$U = E\big[u(w)\big] = \sum_{s=1}^{S} p_s u(w_s), \qquad (2)$$

dove *U* indica l'utilità della distribuzione di probabilità della ricchezza (la "lotteria"), p_S è la probabilità che la ricchezza sia pari a w_S, e $u(w_s)$ è l'utilità di questo livello di ricchezza (detta anche "utilità di Bernoulli" per distinguerla dall'utilità attesa *U*).

Se la ricchezza ha una distribuzione di probabilità continua, la sua utilità attesa è:

$$U = E\left[u(w)\right] = \int_S p(s)u(w(s))ds\,, \tag{3}$$

dove $p(s)$ è la probabilità che la ricchezza sia pari a $w(s)$, cioè la funzione di densità della ricchezza (la derivata prima della sua distribuzione di probabilità).

In entrambi i casi, per effetto del principio di non-saturazione ipotizzato inizialmente, l'individuo vorrà rendere massimo il valore della sua utilità attesa *U*. Questa è cioè la sua funzione obiettivo, e quindi il suo criterio di scelta, in condizioni di incertezza.

1.4 Natura cardinale dell'utilità attesa

La caratteristica dell'utilità attesa è quella di essere una *funzione lineare delle probabilità*, come ogni aspettativa. Questa linearità persiste anche se la funzione di utilità attesa viene moltiplicata per una costante positiva, oppure se ad essa viene aggiunta una costante, cioè se la funzione è sottoposta a una trasformazione crescente di natura lineare ovvero *affine*. Invece tale proprietà viene persa se la trasformazione della funzione di utilità è non-lineare, per esempio logaritmica o quadratica. In altri termini, *la proprietà dell'utilità attesa è preservata se e solo se la funzione è sottoposta a una trasformazione affine crescente*.

Vediamo innanzitutto perché una trasformazione affine crescente è una condizione *sufficiente* perché la funzione conservi la proprietà dell'utilità attesa. Dobbiamo dimostrare cioè che se $u(\cdot)$ è una funzione di utilità attesa, allora lo è anche $v(\cdot) = a + bu(\cdot)$, dove $b > 0$. Per dimostrarlo, basta notare che con la trasformazione affine la funzione diventa:

$$\begin{aligned} v\big(u\left[G(x,y:\beta)\right]\big) &= a + bu\left[G(x,y:\beta)\right] \\ &= a + b\left[\beta u(x) + (1-\beta)u(y)\right] \\ &= \beta\left[a + bu(x)\right] + (1-\beta)\left[a + bu(y)\right] \\ &= \beta v(x) + (1-\beta)v(y). \end{aligned}$$

È facile anche dimostrare che, perché la funzione preservi la proprietà dell'utilità attesa, è necessario che la trasformazione sia una trasformazione affine crescente. La dimostrazione è "a contrario". Supponiamo cioè che $f(\cdot)$ sia una trasformazione crescente ma non affine. Allora:

$$f\left(u\left[G(x,y:\beta)\right]\right) = f\left(\beta u(x) + (1-\beta)u(y)\right) \neq \beta f(u(x)) + (1-\beta)f(u(y))\,,$$

dove la disuguaglianza segue dalla definizione stessa di una trasformazione non affine. Quindi la non-linearità della trasformazione fa perdere alla funzione di utilità la proprietà dell'utilità attesa.

La ragione per cui la proprietà dell'utilità attesa non si mantiene sotto qualsiasi trasformazione monotona crescente è che l'utilità attesa ha natura *cardinale* e non ordinale. Ciò la differenzia dalla funzione di utilità che studiamo nella teoria del consumatore in condizioni di certezza, che è una misura *ordinale* delle preferenze di un individuo, e in quanto tale descrive le stesse preferenze anche dopo una *qualsiasi* trasformazione monotona crescente. Per esempio, la funzione Cobb-Douglas $u(x,y)=x^{\theta}y^{1-\theta}$ fornisce un ordinamento dei panieri (x, y) uguale a quello fornito dalla sua trasformazione logaritmica $g(x,y)=\log\big(u(x,y)\big)=\theta\log x+(1-\theta)\log y$.

Per effetto della natura cardinale dell'utilità attesa, possiamo paragonare le variazioni di utilità dovute a diverse scelte dell'individuo: per esempio, si può dire che "la scelta A accresce l'utilità dell'individuo del doppio rispetto alla scelta B", che sarebbe una frase senza senso nell'ambito di una teoria ordinale dell'utilità. Per vedere come ciò si ricolleghi direttamente alla proprietà dell'utilità attesa, consideriamo un individuo per il quale x' chili di banane siano equivalenti a una lotteria che prometta x o x'' chili di banane, con probabilità ½ per ciascuno dei due premi, dove $x>x'>x''$. Formalmente, $x' \sim G(x, x'' : ½)$, ovvero l'utilità di x' è pari all'utilità attesa della lotteria:

$$u(x')=\frac{1}{2}u(x)+\frac{1}{2}u(x'').$$

Moltiplicando questa espressione per 2 e sottraendo $2u(x'')$ da entrambi i lati, otteniamo:

$$u(x)-u(x'')=2\big[u(x')-u(x'')\big],$$

cosicché possiamo dire che *per questo individuo* un aumento $x-x''$ del consumo di banane comporta un *incremento di utilità doppio* rispetto ad un aumento $x'-x''$ del consumo di banane. In altri termini, diversamente dal solito, possiamo dare un significato quantitativo all'utilità marginale.

Un altro esempio può aiutare a chiarire ulteriormente la cardinalità della funzione di utilità attesa. Consideriamo una lotteria che con probabilità α paga un premio di € 1000 e con probabilità $1-\alpha$ infligge una perdita di € 1000, ovvero "paga" un premio di – € 1000. Desideriamo stabilire l'utilità attesa di questa lotteria. Fissiamo un valore intermedio, per esempio € 0, e chiediamoci qual sia la probabilità di vincita che ci renderebbe indifferenti tra la lotteria e questo valore di € 0 con certezza. Formalmente, cerchiamo il valore di α tale che $0 \sim G(-1000, 1000 : \alpha)$, ovvero:

$$u(0)=\alpha u(1000)+(1-\alpha)u(-1000).$$

Supponiamo che $\alpha=0,75$, cioè che io possa essere indotto a partecipare alla lotteria solo se la probabilità di vincere il premio di € 1000 è almeno pari a ¾. Come dimostrato nella derivazione della funzione di utilità attesa, possiamo considerare la probabilità 0,75 come una misura dell'utilità di € 0, cioè $u(0)=0,75$. Ne segue che:

$$0,75=0,75u(1000)+0,25u(-1000) \quad\Rightarrow\quad u(1000)=\frac{0,75-0,25u(-1000)}{0,75}.$$

Se assegniamo un valore arbitrario di –10 all'utilità della perdita di € 1000, cioè $u(-1000) = -10$, l'espressione precedente ci consente di ottenere una misura cardinale dell'utilità di € 1000:

$$u(1000) = \frac{0,75 - 0,25(-10)}{0,75} = 4,\overline{3}.$$

Posto che la perdita di € 1000 corrisponda a una riduzione di 10 "unità di utilità", la vincita della stessa somma comporta un aumento di 4,3 "unità di utilità". Facendo variare il premio da € 1000 verso l'alto o verso il basso, avrò valori diversi di α e così potrò valutare qualsiasi premio in "unità di utilità".[1]

2. Utilità attesa e atteggiamenti verso il rischio

La teoria dell'utilità attesa è applicata in tutta la teoria della finanza. In questo paragrafo, vedremo come essa ci permette di confrontare l'atteggiamento verso il rischio di individui diversi, e in particolare di stabilire se e in che misura un individuo sia più avverso al rischio di un altro.

2.1 Avversione, indifferenza o propensione al rischio

Supponiamo di porre un individuo di fronte alla seguente scelta: partecipare a una lotteria oppure ricevere con certezza il valore atteso dei premi della stessa lotteria. Un individuo avverso al rischio preferirà la prima alternativa: avere con certezza il premio atteso della lotteria gli evita il disagio del rischio insito nella lotteria. Un individuo indifferente al rischio sarà indifferente tra le due alternative. Un individuo propenso al rischio invece preferirà la seconda alternativa: partecipare alla lotteria gli dà il brivido eccitante del rischio.

Se le preferenze soddisfano gli assiomi della teoria dell'utilità attesa, queste definizioni si traducono immediatamente in una caratterizzazione della funzione di utilità $u(\cdot)$.[2] Supponiamo che l'esito della lotteria determini il livello di ricchezza finale dell'individuo, che quindi è una variabile casuale $\tilde{w}$, e che l'utilità dell'individuo sia funzione di tale ricchezza finale. (In tutto il testo le variabili casuali sono indicate con la tilde ~ per distiguerle dalle variabili note nonché dai valori realizzati delle variabili casuali.) Allora:

Il decisore è avverso al rischio se e solo se l'utilità attesa della lotteria è minore dell'utilità del suo premio atteso ottenuto con certezza:

$$u\left[E(\tilde{w})\right] > E\left[u(\tilde{w})\right]$$

ovvero

[1] Ovviamente la cardinalità dell'utilità attesa vale con riferimento a variazioni dell'utilità per lo *stesso* individuo, non per paragoni tra individui diversi: anche se cardinale, l'utilità attesa non consente confronti interpersonali dell'utilità.

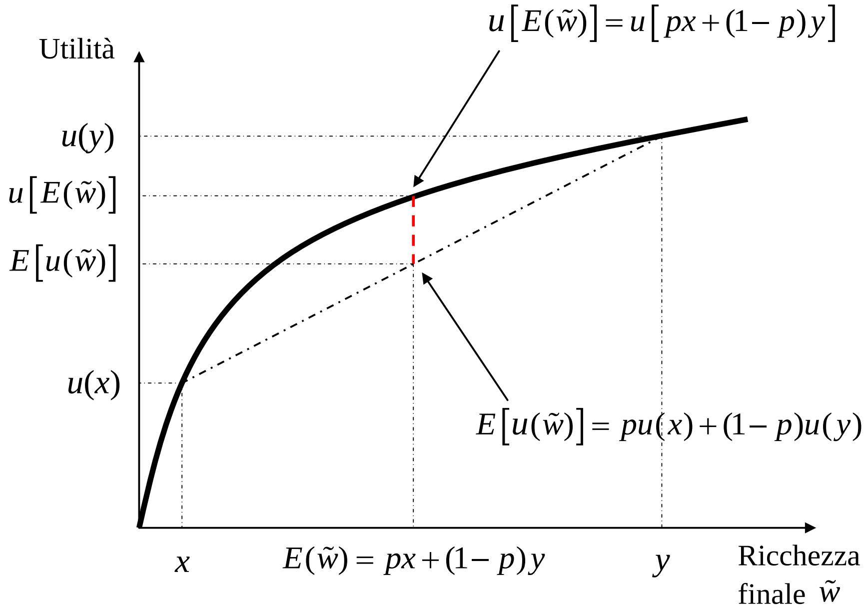
[2] Qui ci riferiamo alla funzione di "utilità di Bernoulli" definita alla fine del paragrafo 1.3.

$$u\left(\sum_{s=1}^{S} p_s w_s\right) > \sum_{s=1}^{S} p_s u(w_s)\,, \qquad (4)$$

il che è *equivalente a ipotizzare che la funzione* $u(\cdot)$ *sia strettamente concava*.

La disuguaglianza (4) (detta anche "disuguaglianza di Jensen") è infatti la proprietà che definisce una funzione strettamente concava. Essa è illustrata dalla Figura 7 con riferimento ad una lotteria semplice i cui premi sono due valori alternativi della ricchezza: la lotteria assegna probabilità p al valore x e probabilità $1-p$ al valore più elevato y. In questo esempio, il valore atteso della lotteria è $px+(1-p)y$. Se ottenuto con certezza, questo valore dà utilità $u\big(px+(1-p)y\big)$, che è l'ordinata della funzione corrispondente all'ascissa $px+(1-p)y$. Invece, l'utilità attesa della lotteria è $pu(x)+(1-p)u(y)$, che è l'ordinata di un punto del segmento che congiunge $u(x)$ e $u(y)$ ed è inferiore all'ordinata $u\big(px+(1-p)y\big)$ se (e solo se) la funzione $u(\cdot)$ è concava. Nella figura, si ipotizza che $p=1-p=1/2$, per cui il punto corrispondente all'utilità attesa della lotteria è a metà del segmento che congiunge $u(x)$ e $u(y)$.

Figura 7. Avversione al rischio



La relazione tra avversione al rischio e concavità della funzione di utilità si spiega facilmente: una funzione di utilità strettamente concava significa che l'utilità marginale del denaro è decrescente. Quindi, per qualsiasi livello della ricchezza, l'aumento dell'utilità derivante dal vincere un euro è minore della riduzione di utilità derivante dalla perdita di un euro (misurando tale perdita in valore assoluto). Quindi non vale la pena di accettare una scommessa in cui sia abbia pari probabilità di vincere o di perdere un euro, che è precisamente il caso illustrato dalla Figura 7.

Seguendo lo stesso ragionamento, possiamo caratterizzare l'indifferenza al rischio. *Il decisore è indifferente al rischio se e solo se l'utilità attesa della lotteria è uguale all'utilità del suo premio atteso ottenuto con certezza:*

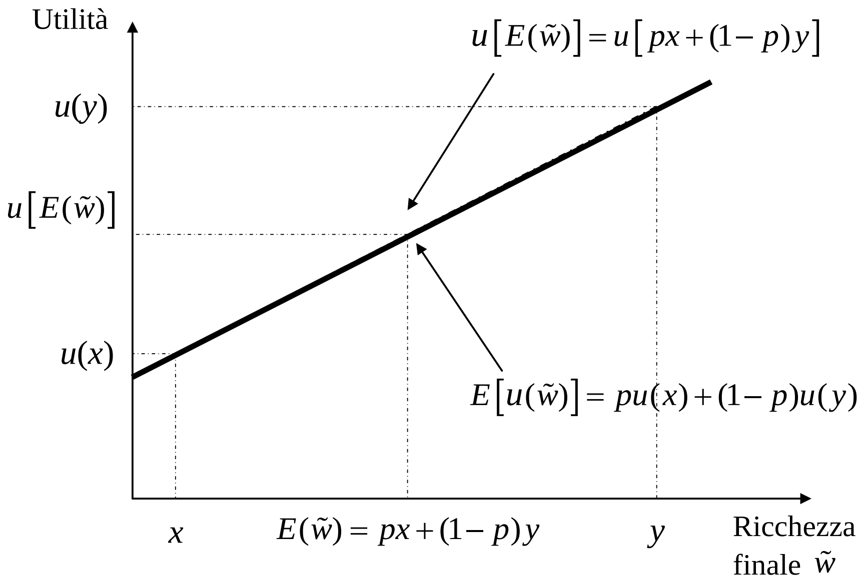
$$u\left[E(w)\right] = E\left[u(w)\right]$$

ovvero

$$u\left(\sum_{s=1}^{S} p_s w_s\right) = \sum_{s=1}^{S} p_s u(w_s)\,,$$

il che è *equivalente a ipotizzare che la funzione* $u(\cdot)$ *sia lineare,* come illustrato nella Figura 8.

Figura 8. Indifferenza al rischio



Infine, svolgendo il ragionamento in modo simmetrico rispetto al caso dell'avversione al rischio, è facile capire che *il decisore è propenso al rischio se e solo se l'utilità attesa della lotteria è maggiore dell'utilità del suo premio atteso ottenuto con certezza:*

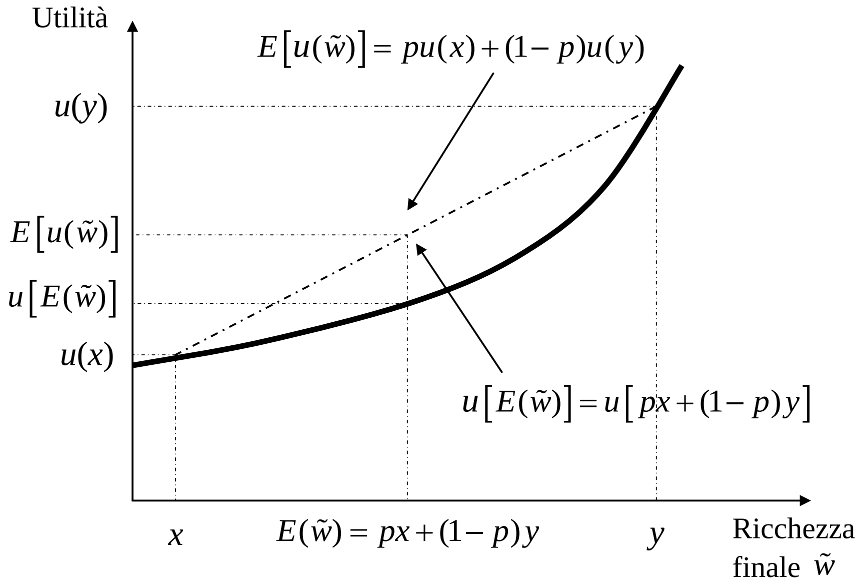
$$u\left[E(w)\right] < E\left[u(w)\right]$$

ovvero

$$u\left(\sum_{s=1}^{S} p_s w_s\right) < \sum_{s=1}^{S} p_s u(w_s)\,,$$

il che è *equivalente a ipotizzare che la funzione* $u(\cdot)$ *sia convessa,* come illustrato nella Figura 9.

Figura 9. Propensione al rischio



2.2 Misure dell'avversione al rischio

Il ragionamento svolto fino a questo punto mostra che il grado di avversione al rischio riflette il "grado di concavità" della funzione di utilità (o più precisamente della funzione di Bernoulli). Quindi per misurare l'avversione al rischio occorre misurare la curvatura della funzione di utilità. Una possibile misura di tale curvatura in corrispondenza di un dato valore della ricchezza *w* è la derivata seconda della funzione di utilità $u''(w)$: presa in valore assoluto, questa misura di quanto varia l'utilità marginale al crescere della ricchezza, cioè di quanto si riduce la pendenza della funzione $u(w)$ al crescere di *w*.

Tuttavia questa misura non è adeguata perché essa varia se moltiplichiamo la funzione di utilità per una costante positiva (e sappiamo che questa è un'operazione che non altera le proprietà della funzione di utilità attesa, essendo una trasformazione positiva lineare). La soluzione più semplice a questo problema è semplicemente dividere $u''(w)$ per l'utilità marginale, scrivendo $u''(w)/u'(w)$: in tal modo, qualsiasi costante moltiplicativa apparirà sia al numeratore che al denominatore e si eliderà. Se cambiamo segno in modo tale da avere un valore positivo per una funzione di utilità concava, otteniamo la misura di Arrow-Pratt dell'*avversione al rischio assoluto*:

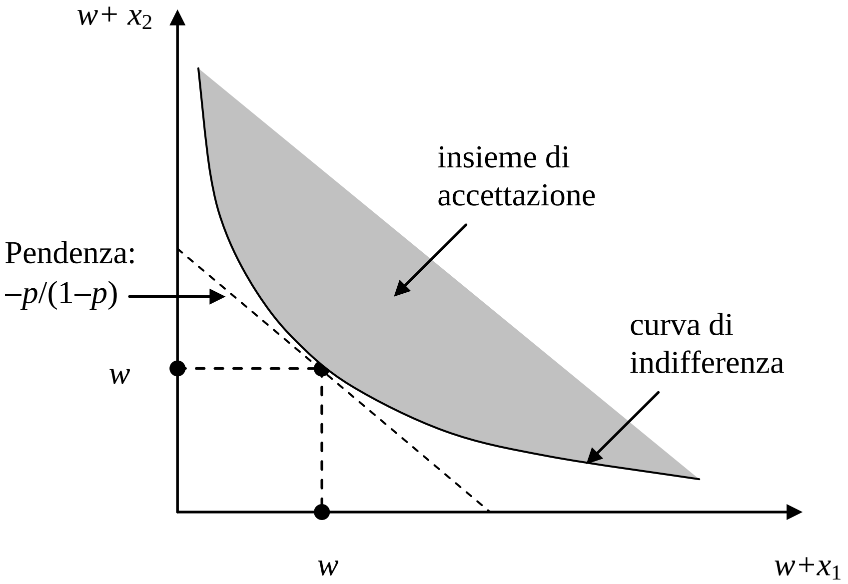
$$A(w) \equiv -\frac{u''(w)}{u'(w)}, \qquad (5)$$

che è il *tasso percentuale* di variazione dell'utilità marginale al crescere di *w* – ovvero il tasso di variazione della pendenza della curva *u*(*w*). Chiaramente, la misura *A*(*w*) è positiva per un individuo avverso al rischio, zero per uno indifferente al rischio e negativa per uno propenso al rischio.

Se conosciamo l'avversione assoluta al rischio di due persone, sappiamo come si comporteranno di fronte a scelte rischiose. Un individuo con avversione al rischio assoluto maggiore di un altro rifiuterà lotterie che l'altro accetterebbe. Ciò può essere dimostrato con il seguente ragionamento.

Consideriamo un insieme di lotterie che danno x_1 nello stato 1 e x_2 nello stato 2 , dove i due stati si verificano rispettivamente con probabilità p e 1–p. Se un individuo con ricchezza iniziale w accetta di partecipare a una di queste lotterie, la sua ricchezza finale sarà $w+x_1$ nello stato 1 e $w+x_2$ nello stato 2. Supponiamo di chiedere a questo individuo quali tra queste lotterie $G(w+x_1, w+x_2 : p)$ sarebbe disposto ad accettare: l'insieme dei valori (x_1, x_2) che egli accetterà definisce il suo *insieme di accettazione*. La Figura 10 rappresenta questo insieme come l'area ombreggiata nel piano della ricchezza *finale* $(w+x_1, w+x_2)$ dell'individuo. La frontiera di questo insieme è la *curva di indifferenza* dell'individuo passante per la sua dotazione iniziale, cioè l'insieme delle lotterie che lo lasciano al livello di utilità iniziale.

Figura 10. Insieme di accettazione e curva di indifferenza



L'equazione di questa curva di indifferenza è la funzione implicita $x_2(x_1)$ che soddisfa l'identità:

$$pu(w+x_1)+(1-p)u(w+x_2(x_1)) \equiv u(w)\,. \tag{6}$$

Differenziando questa identità rispetto a x_1 nel punto corrispondente alla ricchezza iniziale w,

$$pu'(w)+(1-p)u'(w)\frac{dx_2}{dx_1}=0\,,$$

si ottiene la pendenza della curva di indifferenza, cioè della funzione $x_2(x_1))$:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p}{1-p}. \tag{7}$$

Calcolando ora la derivata seconda dell'identità (6) rispetto a x_1, otteniamo:

$$pu''(w) + (1-p)u''(w)\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 + (1-p)u'(w)\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = 0$$

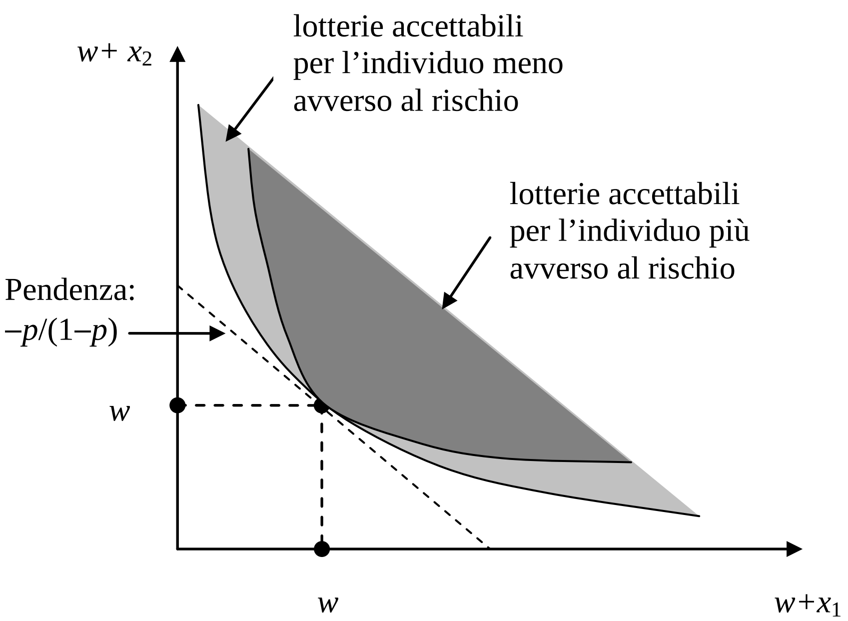
e, sfruttando la (7), otteniamo la curvatura della curva di indifferenza:

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{p}{(1-p)^2}\left[-\frac{u''(w)}{u'(w)}\right] \equiv \frac{p}{(1-p)^2}A(w). \tag{8}$$

Quindi la curvatura della curva di indifferenza è proporzionale all'avversione assoluta al rischio $A(w)$. La curva è convessa se l'individuo è avverso al rischio, ed è tanto più convessa quanto più egli è avverso al rischio.

Se due individui hanno la stessa ricchezza iniziale w ma diversa avversione al rischio assoluto, la curva di indifferenza di quello più avverso al rischio avrà *curvatura maggiore* nel punto (w, w).

Figura 11. Avversione al rischio e lotterie accettabili



Poiché le loro curve hanno la stessa pendenza $-p/(1-p)$ nel punto (w, w), in quel punto le loro curve di indifferenza saranno tangenti ma in un intorno di questo punto la curva di indifferenza dell'individuo più avverso al rischio giace al di sopra di quella dell'altro. Perciò, il suo insieme di accettazione è più piccolo ed è contenuto in quello dell'individuo meno avverso al rischio: il primo rifiuterà delle (piccole) lotterie che l'altro invece accetterà. Questa situazione è rappresentata nella

Figura 11, in cui l'insieme di accettazione dell'individuo più avverso al rischio è ombreggiato in una tonalità più scura di quello dell'individuo meno avverso al rischio.

L'avversione al rischio assoluto $A(w)$ non tiene conto però che la stessa lotteria rappresenta un rischio diverso per un individuo povero e uno ricco, cioè valuta l'atteggiamento verso un "rischio assoluto", non rapportato alla ricchezza. Ma noi sappiamo che, se la funzione di utilità è concava, l'utilità marginale della ricchezza è maggiore per un individuo povero che per uno ricco. Se vogliamo tener conto di questo, dobbiamo "scalare" la lotteria per la ricchezza, in modo che l'individuo sia posto di fronte al rischio di perdere una certa percentuale della propria ricchezza, invece che un certo ammontare assoluto di denaro. A tale scopo, la lotteria dovrà essere: "con probabilità p avrai una percentuale x_1 della tua ricchezza iniziale w, e con probabilità 1-p avrai una percentuale x_2 della tua ricchezza iniziale w". L'utilità attesa di questa lotteria è:

$$pu(w \cdot x_1) + (1-p)u(w \cdot x_2(x_1)) . \qquad (9)$$

Questa struttura *moltiplicativa* della lotteria differisce da quella *additiva* ipotizzata fino a questo punto. Tuttavia, questo tipo di lotterie moltiplicative sono tipiche della finanza, dove il rendimento degli investimenti è generalmente espresso in rapporto al livello iniziale dell'investimento.

Proprio come abbiamo fatto con le lotterie di tipo additivo, possiamo considerare le lotterie di tipo moltiplicativo che lasciano l'individuo indifferente rispetto al livello iniziale di ricchezza. Utilizzando gli stessi passaggi sviluppati fino a questo punto (si veda l'appendice), troviamo che la misura appropriata in questo caso è la misura di Arrow-Pratt dell'*avversione al rischio relativo*:

$$R(w) \equiv -\frac{u''(w)}{\frac{u'(w)}{w}} \equiv -w\frac{u''(w)}{u'(w)} \equiv wA(w) .$$

La prima espressione mostra che questa misura è l'elasticità dell'utilità marginale al variare della ricchezza, e la terza che essa è pari all'avversione al rischio assoluto moltiplicata per la ricchezza.

L'avversione assoluta e relativa al rischio differiscono a seconda della funzione di utilità, come mostra la Tabella 1. Se l'utilità è lineare, entrambe le misure di avversione al rischio sono pari a zero. Se l'utilità è quadratica, dobbiamo limitarci a valori della ricchezza per cui vale il principio di non-saturazione, cioè l'utilità marginale è positiva ($w < \eta$): per tali valori, entrambe le misure indicano che l'avversione al rischio è funzione crescente della ricchezza. Invece se l'utilità è esponenziale, l'avversione assoluta al rischio è costante, mentre quella al rischio relativo è funzione crescente della ricchezza. Infine, se l'utilità è logaritmica o esponenziale, l'avversione al rischio assoluto è funzione decrescente della ricchezza, mentre quella al rischio relativo è costante.

Qual è il caso più plausibile? È naturale supporre che l'avversione al rischio assoluto diminuisca al crescere della ricchezza: più si è ricchi, più si dovrebbe essere disposti ad accettare un rischio fissato in un ammontare assoluto di denaro.

Tabella 1. Avversione al rischio assoluto e relativo con alcune funzioni di utilità

Funzione di utilità: $u(w)$	*Utilità marginale*: $u'(w)$	*Derivata seconda*: $u''(w)$	*Avversione al rischio assoluto*: $A(w)$	*Avversione al rischio relativo*: $R(w)$
Lineare: ϕw	ϕ	0	0	0
Quadratica: $-\phi(\eta - w)^2$	$2\phi(\eta - w)$	-2ϕ	$\frac{1}{\eta - w}$	$\frac{w}{\eta - w}$
Esponenziale: $-\eta e^{-w/\eta}$	$e^{-w/\eta}$	$-\frac{e^{-w/\eta}}{\eta}$	$\frac{1}{\eta}$	$\frac{w}{\eta}$
Logaritmica: $\log(w)$	$\frac{1}{w}$	$-\frac{1}{w^2}$	$\frac{1}{w}$	1
Potenza: $\frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma}$	$w^{-\gamma}$	$-\gamma w^{-\gamma-1}$	$\frac{\gamma}{w}$	γ

Quindi, la funzione quadratica e la funzione esponenziale sono poco plausibili. Tuttavia, come vedremo, queste funzioni sono ugualmente utilizzate nella teoria della finanza, perché conducono al criterio di scelta media-varianza, che è semplice ed intuitivamente attraente (si veda il paragrafo 3.2). L'ipotesi che l'utilità sia logaritmica o una funzione potenza è invece più plausibile. Non solo entrambe prevedono che l'avversione al rischio assoluto sia funzione decrescente della ricchezza, ma anche che l'avversione al rischio relativo sia costante, il che non è irrealistico. Tra le due, la funzione potenza è più flessibile, perché lascia che l'avversione al rischio relativo sia un parametro invece di supporre che essa sia pari a 1, come nel caso della funzione logaritmica.

2.3 Premio per il rischio

Oltre che caratterizzare i possibili atteggiamenti verso il rischio degli individui, la teoria dell'utilità attesa consente di misurare il grado di avversione al rischio, attraverso il *premio per il rischio*, che è la somma di denaro che un individuo *avverso al rischio* richiede per affrontare una lotteria invece di ottenere il suo premio atteso. Infatti un individuo avverso al rischio assegna un valore soggettivo maggiore al pagamento certo del premio atteso di una lotteria piuttosto che alla partecipazione alla lotteria stessa, il cui premio per definizione è incerto. La differenza tra questi due valori è ciò che Markowitz propose nel 1959 di misurare con la sua definizione del premio per il rischio.[3]

Consideriamo per esempio un individuo con ricchezza iniziale w e supponiamo che gli venga offerta una lotteria il cui premio $\tilde{z}$ è una variabile aleatoria (o casuale), con valore atteso $\bar{z}$ e distribuzione $F(z)$. Se l'individuo partecipa alla lotteria, la sua ricchezza finale è $\tilde{w} = w + \tilde{z}$, anch'essa aleatoria come il premio $\tilde{z}$, e con valore atteso pari a $E(\tilde{w}) = w + \bar{z}$. Nel caso particolare in cui la distribuzione $F(z)$ è tale che il premio $\tilde{z}$ possa assumere due valori, uno basso z_1 con probabilità p e uno alto z_2 con probabilità $1-p$, il premio atteso della lotteria è

[3] Harry M. Markowitz, *Portfolio Selection*, New Haven, Yale University Press, 1959.

$E(\tilde{z}) \equiv \overline{z} = pz_1 + (1-p)z_2$, e la ricchezza attesa dell'individuo se partecipa alla lotteria è $E(\tilde{w}) = w + \overline{z} = w + pz_1 + (1-p)z_2$, che nella Figura 12 corrisponde al punto B.

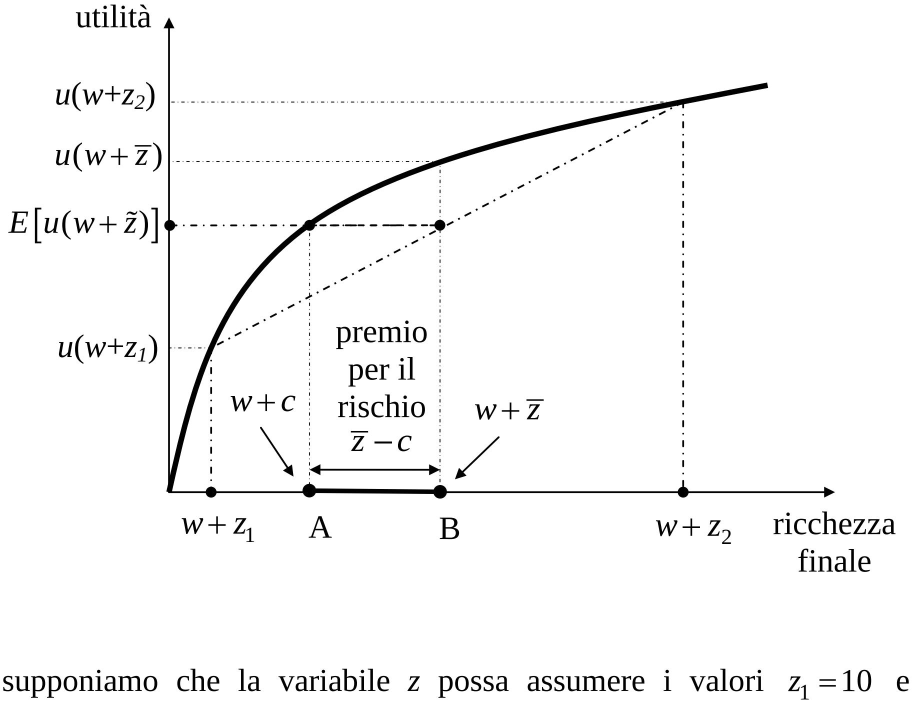
Se l'individuo è avverso al rischio, il valore che egli assegna alla lotteria è il suo "equivalente certo", cioè il pagamento certo che gli darebbe la stessa utilità della lotteria. Similmente l'equivalente certo della sua ricchezza finale $\tilde{w}$ se partecipa alla lotteria è il livello di ricchezza certa che gli darebbe la stessa utilità. Graficamente, esso è l'ascissa dell'utilità $u(\cdot)$ pari all'utilità attesa ottenuta con la lotteria $E\left[u\left(w+\tilde{z}\right)\right] = pu(w+z_1) + (1-p)u(w+z_2)$: nella Figura 12, è il punto A. Formalmente, l'equivalente certo c soddisfa l'uguaglianza

$$E\left[u(w+\tilde{z})\right] = u(w+c). \tag{10}$$

Il premio per il rischio secondo Markowitz è la differenza tra il valore atteso della ricchezza ottenuta partecipando alla lotteria e il suo equivalente certo, e quindi è pari alla lunghezza del segmento $\overline{AB}$ nella Figura 10. Essendo la differenza tra due somme di denaro, il premio stesso è misurato in denaro:

$$\pi \equiv (w+\overline{z}) - (w+c) = \overline{z} - c. \tag{11}$$

Figura 12. Premio per il rischio secondo Markowitz



Per esempio, supponiamo che la variabile z possa assumere i valori $z_1 = 10$ e $z_2 = 20$ con probabilità ½ ciascuno, che $u(\cdot) = \log(\cdot)$ (dove il logaritmo è in base e) e che la ricchezza iniziale sia $w = 100$. Allora il valore atteso dei premi della lotteria è $\overline{z}$ = 15, e in base alla (10) l'equivalente certo è il valore c che risolve l'equazione:

$$\log(100+c) = 0,5 \cdot \log(110) + 0,5 \cdot \log(120) = 4,744,$$

da cui, calcolando l'anti-logaritmo su entrambi i lati:

$$100 + c = e^{4,744} = 114,891 \quad \Rightarrow \quad c = 14,891.$$

Quindi, in base alla definizione (11), il premio per il rischio π è pari a $15 - 14,891 = 0,109$. Se i premi sono espressi in euro, una persona con queste preferenze valuta questa lotteria circa 11 centesimi in meno di una persona indifferente al rischio, se la loro ricchezza iniziale è € 100.

Questo esempio mostra anche che la ricchezza iniziale conta nel determinare π, sebbene la (11) sembri suggerire che la ricchezza iniziale non conti, visto che w viene elisa dall'espressione. Ma ciò sarebbe erroneo, poiché l'equivalente certo c dipende dall'avversione al rischio e quindi dalla ricchezza iniziale: quanto più un individuo è avverso al rischio, tanto minore è l'equivalente certo della ricchezza finale $\tilde{w}$.

Una misura alternativa del premio per il rischio è stata proposta da Pratt e Arrow.[4] Questa misura si basa sull'ipotesi che la lotteria proposta all'individuo sia attuarialmente neutra, cioè abbia un premio atteso pari a zero: $E(\tilde{z}) \equiv \overline{z} = 0$. Anche in questo caso, il premio per il rischio è la somma π data dalla definizione (11), ma poiché in questo caso il valore atteso $\overline{z}$ è zero per ipotesi, ora per la (11) il premio per il rischio è $\pi = \overline{z} - c = -c < 0$, ovvero un esborso. Questo perché, essendo la lotteria solo una fonte di rischio, in questo caso il premio è la somma che un individuo è disposto a pagare pur di evitare la lotteria. Quindi, ponendo $c = -\pi$ nella (10), il premio per il rischio deve soddisfare la condizione:

$$E\left[u(w + \tilde{z})\right] = u(w - \pi). \tag{12}$$

La misura di Pratt e Arrow è una misura "locale" del rischio, cioè si applica a lotterie "piccole" (almeno in rapporto alla ricchezza iniziale w), oltre che attuarialmente neutre. Perciò, invece di una singola lotteria, consideriamo una famiglia di lotterie i cui premi sono definiti dalla variabile casuale $z = t\varepsilon$, dove t è un parametro compreso tra 0 e 1, mentre ε è una variabile casuale con media zero e varianza σ^2. Ogni valore di t corrisponde a una lotteria: il rischio della lotteria decresce al decrescere di t, poiché ciò riduce la varianza del premio. Lotterie "piccole" sono quelle per cui t è vicino a 0. Ovviamente, il premio per il rischio π sarà funzione della rischiosità della scommessa e quindi di t. Perciò riscriviamo la definizione (12) come segue:

$$E\left[u(w + t\tilde{\varepsilon})\right] = u\left(w - \pi(t)\right). \tag{12′}$$

Per ottenere un'espressione per $\pi(t)$, approssimiamolo con un'espansione di secondo ordine in serie di Taylor intorno a $t = 0$:

$$\pi(t) \approx \pi(0) + \pi'(0)t + \frac{1}{2}\pi''(0)t^2, \tag{13}$$

---

[4] John W. Pratt, "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica*, gennaio-aprile, 1964, pp. 122-136, e Kenneth J. Arrow, *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Amsterdam, North-Holland, 1971.

e calcoliamo i termini di questa serie di Taylor per vedere come si comporta il premio $\pi(t)$ per valori piccoli di *t* (cioè per lotterie “piccole”). Dalla definizione (12′), vediamo subito che $\pi(0)=0$. Poi, differenziando due volte l’equazione (12′), otteniamo le derivate $\pi'(t)$ e $\pi''(t)$:[5]

$$E\left[u'(w+t\tilde{\varepsilon})\tilde{\varepsilon}\right]=-u'\left(w-\pi(t)\right)\pi'(t), \tag{14}$$

$$E\left[u''(w+t\tilde{\varepsilon})\tilde{\varepsilon}^2\right]=u''\left(w-\pi(t)\right)\left(\pi'(t)\right)^2-u'\left(w-\pi(t)\right)\pi''(t). \tag{15}$$

Valutando l’espressione (14) per $t=0$, otteniamo $E\left[u'(w)\tilde{\varepsilon}\right]=-u'(w)\pi'(0)$. Poiché $E\left[u'(w)\tilde{\varepsilon}\right]= u'(w)E\left[\tilde{\varepsilon}\right]=0$, otteniamo $\pi'(0)=0$. Valutando l’espressione (15) per $t=0$, abbiamo:

$$E\left[u''(w)\tilde{\varepsilon}^2\right]=u''\left(w-\pi(0)\right)\left(\pi'(0)\right)^2-u'\left(w-\pi(0)\right)\pi''(0).$$

Imponendo $\pi(0)=0$, $\pi'(0)=0$ e $E\left[u''(w)\tilde{\varepsilon}^2\right]=u''(w)E\left(\tilde{\varepsilon}^2\right)=u''(w)\sigma^2$, questa espressione diviene:[6]

$$u''(w)\sigma^2=-u'(w)\pi''(0),$$

per cui:

$$\pi''(0)=-\frac{u''(w)\sigma^2}{u'(w)}. \tag{16}$$

Sostituendo $\pi(0)=0$, $\pi'(0)=0$ e $\pi''(0)$ dalla (16) nella serie di Taylor (13), otteniamo la *misura di Pratt-Arrow del premio per il rischio*:

$$\pi(t)\approx-\frac{u''(w)}{u'(w)}\frac{\sigma^2}{2}t^2\equiv A(w)\frac{\sigma^2}{2}t^2=A(w)\frac{\operatorname{var}(\tilde{z})}{2}. \tag{17}$$

Questa espressione ha un significato economico interessante. Essa mostra che il premio per il rischio è funzione crescente sia dell’avversione al rischio assoluto del decisore che della rischiosità della lotteria stessa, misurata dalla varianza del suo risultato.

Anche se apparentemente diverse, le misure del premio per il rischio proposte da Markowitz e da Pratt-Arrow producono risultati molto simili se applicate a rischi piccoli (in rapporto alla ricchezza del decisore) e con valore atteso pari a zero (o vicina allo zero). Per rischi grandi o con valore atteso diverso da zero, la misura di Markowitz resta valida, mentre quella di Pratt-Arrow diventa poco accurata, essendo una misura locale del rischio. Il vantaggio principale della misura di Pratt-Arrow è nel farci vedere che il premio per il rischio è direttamente legato all’avversione al rischio assoluto.

---

[5] Alcuni lettori potrebbero non essere familiari con la differenziazione di un valore atteso. Ma il valore atteso di una funzione non è altro che una somma (o un integrale) dei valori che la funzione può assumere (pesati con le probabilità). Quindi si applica la regola della derivata di una somma: *la derivata del valore atteso è il valore atteso della derivata.*

[6] La varianza di ε è pari a $E(\varepsilon^2)$ perché $E(\varepsilon) = 0$.

2.4 Un'applicazione: la domanda di assicurazioni

Se nella società ci sono individui con diversa avversione al rischio, è efficiente che quelli meno avversi al rischio si offrano – in cambio di un pagamento – di assorbire in tutto o in parte il rischio fronteggiato dagli individui più avversi al rischio. In altri termini, in tal caso è efficiente che si stabilisca un mercato finanziario che consenta di trasferire i rischi, fornendo protezione contro il rischio a chi desideri acquistarla. Tutti i mercati finanziari consentono in linea di principio questo tipo di trasferimento del rischio, ma alcuni mercati esistono unicamente per questa ragione: un esempio ne è il mercato dei *Credit Default Swaps* (CDS), che sono derivati che offrono copertura contro il rischio di insolvenza di uno specifico debitore.

Tuttavia, perfino se tutti gli individui sono ugualmente avversi al rischio, è possibile offrire loro protezione contro i rischi di natura idiosincratica, cioè quelli che appaiono come tali nella prospettiva di ciascun individuo ma non della società nel suo insieme. Si pensi per esempio al rischio di una grave malattia, come una cardiopatia: un individuo non sa se nè quando si ammalerà, e quindi dal suo punto di vista la malattia è un evento incerto; tutt'al più potrà calcolare la sua probabilità di contrarre tale malattia a una data età. Tuttavia in una popolazione numerosa, si può prevedere accuratamente la frazione di individui che la contrae in ogni fascia di età, anche condizionatamente al sesso e ad altre caratteristiche individuali o comportamentali (per esempio, per soggetti fumatori e non fumatori). Quella che per l'individuo è la probabilità di ammalarsi, a livello aggregato non è altro che la frequenza osservata della malattia in quel gruppo della popolazione. Quindi, se gli individui sono avversi al rischio (anche se lo sono in pari misura), potranno proteggersi l'un l'altro da questo rischio creando un fondo a cui tutti contribuiscono versando dei *premi assicurativi* finché sono sani, e a cui possono attingere per avere un *indennizzo* a fronte delle spese mediche sopportate in caso di malattia. Questo fondo può essere gestito dallo Stato o da una società cooperativa o commerciale: nel primo caso, si tratta di un ente di assicurazione pubblico (come i sistemi sanitari nazionali); nel secondo, di una compagnia di assicurazione di tipo mutualistico o commerciale.

Ovviamente, non è detto che individui avversi al rischio vogliano assicurarsi completamente contro il danno subito nel caso del verificarsi di un dato evento dannoso, per esempio il costo delle spese mediche sostenute in caso di malattia oppure il valore di un'auto in caso di suo furto o incendio. Se indichiamo l'entità del danno con x e l'ammontare dell'indennizzo con q, un individuo potrebbe optare per una copertura assicurativa completa ($q = x$) oppure parziale ($q < x$). Da cosa dipenderà il grado di copertura richiesto, cioè la domanda di assicurazioni espressa dalla società? Prsumibilmente essa dipenderà da "quanto è cara l'assicurazione", cioè da quanto è elevato il premio richiesto per ogni euro di indennizzo, nonché da quanto avverso al rischio è l'individuo.

Per analizzare la domanda di assicurazioni, consideriamo un'economia con una grande popolazione di individui identici, che cioè hanno identica avversione al rischio, stessa ricchezza iniziale w e stesso probabilità p di subire un evento (malattia) che arreca loro un danno monetario x (spese mediche). Gli individui possono però proteggersi da questo rischio ottenendo un indennizzo di entità q se l'evento dannoso si verifica, versando un premio $\pi \cdot q$, dove π è il premio per ogni euro di copertura. Tale premio deve essere versato dagli assicurati in ogni caso, poiché ovviamente viene pagato prima che si sappia quale stato di natura si è verificato.

Le preferenze individuali sono descritte da una funzione di utilità concava $u(\cdot)$, il cui argomento è la ricchezza in uno dei due stati: salute (*S*) o malattia (*M*). Quindi l'utilità attesa dell'individuo è

$$E\left[u(w)\right] = (1-p)u\left(w_S\right) + pu\left(w_M\right).$$

Nello stato di salute l'individuo versa alla compagnia il premio $\pi \cdot q$, cosicché la sua ricchezza è $w_S = w - \pi q$. Nello stato di malattia egli riceve l'indennizzo *q*, ma avrà comunque pagato il premio $\pi \cdot q$ prima di ammalarsi, per cui la sua ricchezza è $w_M = w - x + q - \pi q$. Perciò la copertura ottimale sarà quella che risolve il seguente problema:

$$\max_q \quad (1-p)u(w-\pi q) + pu(w-x+(1-\pi)q).$$

La condizione di primo ordine (che è necessaria e sufficiente per un massimo dato che la funzione è concava) è

$$(1-p)\pi u'(w-\pi q) = (1-\pi)pu'(w-x+(1-\pi)q),$$

ovvero

$$\frac{1-p}{p}\frac{u'(w-\pi q)}{u'(w-x+(1-\pi)q)} = \frac{1-\pi}{\pi}.$$

La condizione di primo ordine impone quindi di rendere il SMS tra ricchezza nello stato di salute *S* e ricchezza nello stato di malattia *M* uguale al SMT $(1-\pi)/\pi$ offerto dalla compagnia di assicurazione, la quale trasforma π euro nello stato *S* in $1-\pi$ euro nello stato *M*:

$$\frac{dw_M}{dw_S} = -\frac{(1-p)u'(w-\pi q^*)}{pu'(w-x-(1-\pi)q^*)} = -\frac{1-\pi}{\pi}.$$

Se la compagnia offre un premio attuarialmente equo $\pi = p$, cioè pari alla probabilità che si verifichi l'evento dannoso, allora vi è assicurazione completa:

$$\begin{aligned} u'(w-pq^*) &= u'(w-x-(1-p)q^*) \\ \Rightarrow w-pq^* &= w-x-(1-p)q^* \\ \Rightarrow q^* &= x. \end{aligned}$$

Ciò accadrà se le compagnie di assicurazioni sono in concorrenza perfetta e non sopportano spese nella loro funzione di intermediazione del rischio, perché in tal caso la concorrenza spingerà i loro profitti attesi ad essere pari a zero, cosicché i premi pagati dagli assicurati compensino esattamente gli indennizzi pagati a quelli che si ammalano con frequenza *p*: $\pi q = pq$, cosicché $\pi = p$.

Intuitivamente, poiché le compagnie massimizzano i profitti attesi, cioè una funzione lineare nella ricchezza nei due stati invece che concava come la funzione di utilità degli individui, esse si comportano come un soggetto indifferente al rischio, cioè indifferente a qualsiasi lotteria i cui pagamenti nei due stati abbiamo valore atteso zero:

$$p dw_M + (1-p) dw_S = 0 .$$

Le curve di indifferenza delle compagnie sono quindi linee rette con pendenza (SMS) pari a:

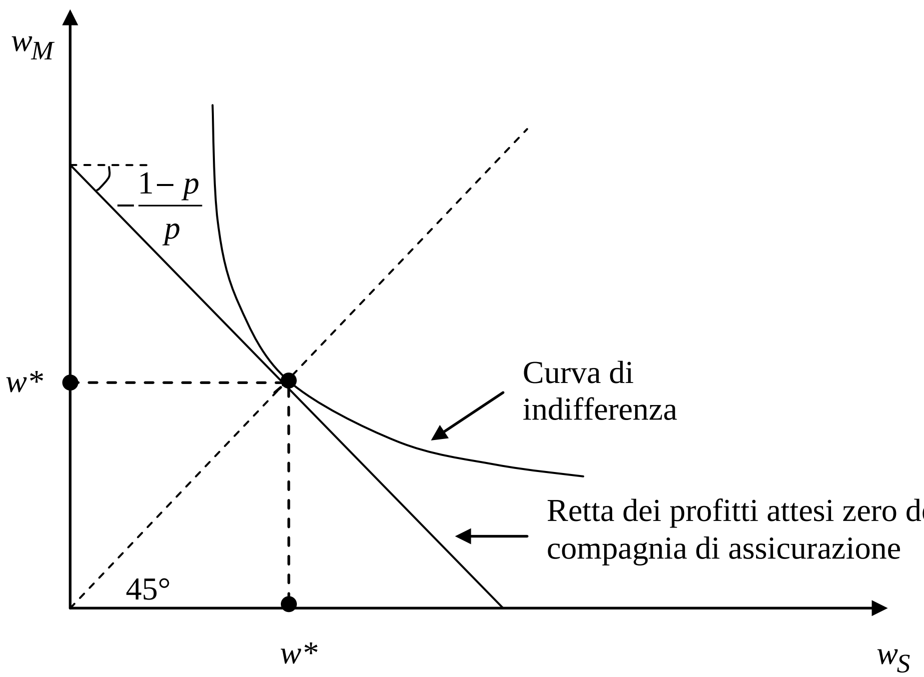
$$\frac{dw_M}{dw_S} = -\frac{1-p}{p} .$$

La concorrenza induce le compagnie a offrire alla clientela un saggio marginale di trasformazione (SMT) tra la ricchezza nei due stati pari al proprio SMS, cioè:

$$\frac{dw_M}{dw_S} = -\frac{1-p}{p} = -\frac{1-\pi}{\pi} .$$

Diagrammaticamente, la tangenza tra le curve di indifferenza dell'individuo avverso al rischio e la retta corrispondente a profitti nulli della compagnia si verifica all'intersezione con una retta a 45° che parte dall'origine, cioè a un livello di ricchezza uguale nei due stati (e quindi certo):

Figura 13. Scelta della copertura assicurativa ottima con concorrenza perfetta



Ciò non accadrà invece se le compagnie non sono in concorrenza perfetta, come il lettore potrà verificare svolgendo l'ultimo parte dell'esercizio 6 alla fine di questo capitolo.

3. Confronto tra rischi diversi

Fino a questo punto abbiamo confrontato l'atteggiamento di individui diversi di fronte a scelte rischiose (lotterie), paragonando le loro funzioni di utilità. Ora vediamo come confrontare tra loro lotterie diverse, cioè paragonare distribuzioni di probabilità. Questo paragone ha un'applicazione immediata nella finanza, perché un titolo può essere identificato con la distribuzione dei suoi rendimenti. Infatti vedremo la scelta tra due distribuzioni di probabilità come la scelta tra due titoli diversi *x* e *y*. Indicheremo la distribuzione dei rendimenti del titolo *x* con $F_x(\cdot)$ e quella del titolo *y* con $G_y(\cdot)$. Poiché la scelta di uno dei due titoli comporta che la ricchezza sia investita in quel titolo, anche il valore finale della ricchezza sarà determinato da una di queste due distribuzioni.

Esistono due modi naturali di effettuare questo paragone: in base al *livello* dei rendimenti e in base alla *dispersione* di tali rendimenti. La distribuzione $F_x(\cdot)$ può essere preferibile alla distribuzione $G_y(\cdot)$ perché dà rendimenti maggiori di $G_y(\cdot)$ oppure perché è meno rischiosa di $G_y(\cdot)$. Questi due criteri sono noti, rispettivamente, come *dominanza stocastica del primo ordine* e *dominanza stocastica del secondo ordine*. Il paragrafo presenta questi due criteri e discute le loro relazioni con la teoria dell'utilità attesa.

Esiste poi un criterio che cerca di combinare entrambe le dimensioni, e cioè il *criterio media-varianza*: la media è un indicatore del livello dei rendimenti, mentre la varianza è un indicatore della loro dispersione. Questo criterio stabilisce che, a parità di rendimento medio, si debba preferire una distribuzione con minor varianza e, a parità di varianza, una distribuzione con media maggiore. Nel paragrafo 3.2 vedremo su quali funzioni di utilità si basa questo criterio.

3.1 Criteri di dominanza stocastica

Nel definire i criteri di dominanza stocastica, supporremo che i termini del nostro confronto – le funzioni $F_x(\cdot)$ e $G_y(\cdot)$ – siano distribuzioni continue. Questa ipotesi è fatta solo per non appesantire le definizioni: gli esempi riportati più avanti mostrano che i criteri si applicano senza problemi anche a distribuzioni discrete.

3.1.1 Dominanza stocastica del primo ordine

Cerchiamo di rendere precisa la seguente affermazione: "la distribuzione $F_x(\cdot)$ dà rendimenti maggiori della distribuzione $G_y(\cdot)$". Possiamo dare tre significati possibili a questa affermazione:

1) il rendimento generato dalla $F_x(\cdot)$ è uguale a quello generato dalla $G_y(\cdot)$ più una variabile casuale *positiva*;
2) per qualsiasi dato livello del rendimento, la probabilità di avere un rendimento minore di tale livello è superiore con la $G_y(\cdot)$ che con la $F_x(\cdot)$;

3) un individuo con una qualsiasi funzione di utilità attesa preferisce $F_x(\cdot)$ a $G_y(\cdot)$.

Per fortuna, tutti e tre queste affermazioni corrispondono allo *stesso* criterio.[7]

Definizione. La distribuzione $F_x(\cdot)$ domina stocasticamente la distribuzione $G_y(\cdot)$ secondo il criterio del primo ordine:

1) se e solo se il tasso di rendimento generato dalla $F_x(\cdot)$, $\tilde{r}_x$, è uguale in distribuzione al tasso di rendimento generato dalla $G_y(\cdot)$, $\tilde{r}_y$, più una variabile casuale $\tilde{\alpha} > 0$:

$$\tilde{r}_x \overset{d}{=} \tilde{r}_y + \tilde{\alpha} .$$

oppure

2) se e solo se $G_y(w) \geq F_x(w)$ per qualsiasi *w*;

oppure

3) se per qualsiasi funzione di utilità non-decrescente *u*(*w*),

$$\int u(w) dF_x(w) \geq \int u(w) dG_y(w) .$$

La prima definizione è la più intuitiva: l'idea è che la distribuzione dominante $F_x(\cdot)$ sia ottenuta attraverso un "aumento probabilistico" della variabile generata dalla distribuzione dominata $G_y(\cdot)$.

Per esempio, consideriamo una lotteria composta che al primo stadio dà 0 o 10 euro con probabilità ½ , e al secondo stadio aggiunge alla vincita del primo stadio altri 5 o 10 euro con probabilità ½. Quindi i premi della lotteria composta sono 5, 10, 15 e 20 euro con probabilità ¼ ciascuno. Così abbiamo aggiunto una variabile casuale positiva ai premi della lotteria del primo stadio, come richiesto dalla prima definizione. La lotteria del primo stadio è dominata da quella composta, perché il secondo stadio sposta massa probabilistica da *w* = 0 a *w* = 5 e a *w* = 10, e da *w* = 10 a a *w* = 15 e a *w* = 20. Ciò è illustrato nella Figura 14: il diagramma superiore rappresenta le due densità e quello inferiore le due distribuzioni. Per distinguerle, la $F_x(\cdot)$ e la $f_x(\cdot)$ sono rappresentate da segmenti tratteggiati, e la $G_y(\cdot)$ e la $g_y(\cdot)$ da segmenti continui. (Si tratta di distribuzioni discrete, il che illustra che il criterio di dominanza stocastica non richiede distribuzioni continue.)

Il diagramma inferiore mostra che $G_y(w) > F_x(w)$: nella $F_x(\cdot)$ la massa probabilistica è spostata a destra rispetto alla $G_y(\cdot)$, cosicché la $G_y(\cdot)$ si trova *sopra* la $F_x(\cdot)$. Ciò illustra che la *prima* definizione della dominanza stocastica di primo ordine implica la *seconda* definizione.

La *prima* definizione implica anche immediatamente la *terza* definizione: a ogni realizzazione di $\tilde{r}_y$ – e quindi di $u(\tilde{r}_y)$ – corrisponde una realizzazione di $\tilde{r}_x$ – e quindi di $u(\tilde{r}_x)$ – più elevata. Ne

[7] Per dimostrazioni dell'equivalenza di queste definizioni, si rinvia ad Andreu Mas-Colell, Michael Whinston Winston e Jerry Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995, p. 195, e soprattutto a Chi-fu Huang e Robert H. Litzenberger, *Foundations for Financial Economics*, North-Holland, 1988, pp. 41-44.

segue che anche il valore atteso di $u(\tilde{r}_x)$ è maggiore di quello di $u(\tilde{r}_y)$, a prescindere dall'avversione al rischio del decisore:

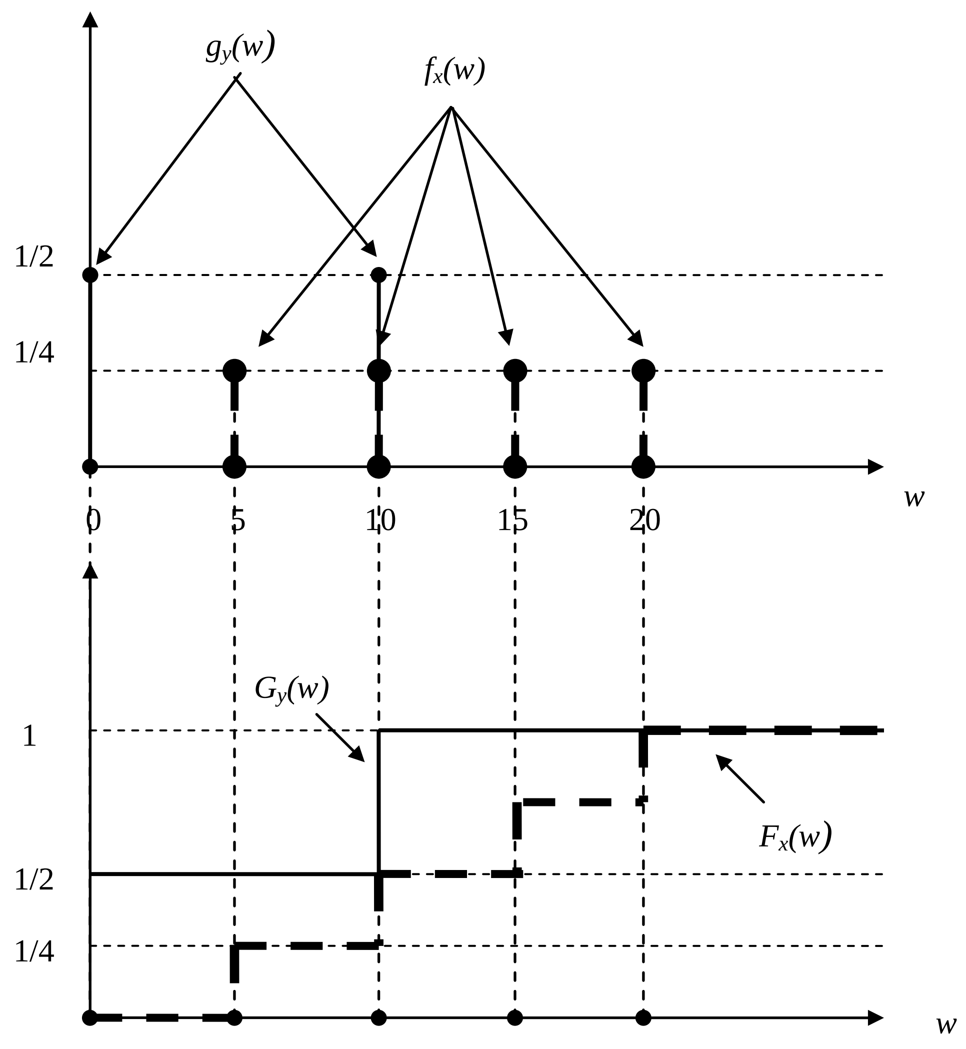
$$E\left[u(1+\tilde{r}_x)\right]=E\left[u(1+\tilde{r}_y+\tilde{\alpha})\right]\geq E\left[u(1+\tilde{r}_y)\right].$$

Infine, la prima definizione rende evidente che la media della variabile w è maggiore secondo la $F_x(\cdot)$ che secondo la $G_y(\cdot)$:

$$E(1+\tilde{r}_x)=E(1+\tilde{r}_y+\tilde{\alpha})=E(1+\tilde{r}_y)+E(\tilde{\alpha})>E(1+\tilde{r}_y),$$

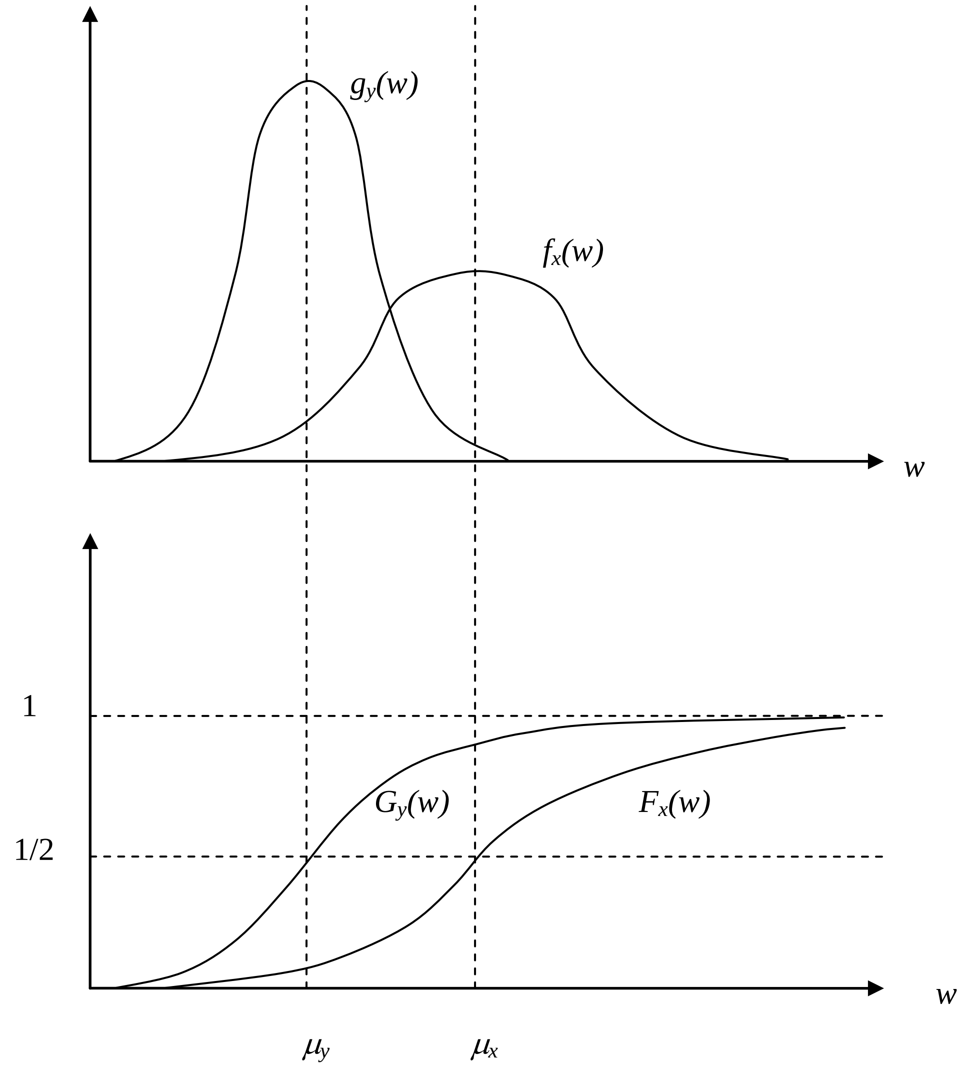
come si può facilmente verificare nell'esempio della Figura 14. (Non è invece vero che di per sé una media più elevata comporti dominanza stocastica del primo ordine.)

Figura 14. Dominanza stocastica di primo ordine con distribuzioni discrete



La Figura 15 illustra la dominanza stocastica di primo ordine con riferimento a due distribuzioni continue e simmetriche. Come nella figura precedente, il diagramma superiore mostra le funzioni di densità $f_x(w)$ e $g_y(w)$, e quello inferiore le corrispondenti funzioni di distribuzione. Come stabilito dalla seconda definizione, il grafico della distribuzione $G_y(w)$ giace uniformemente sopra il grafico della $F_x(w)$, e quindi alla sua sinistra, come mostrato nel diagramma inferiore. Ciò *non* implica che ogni possibile rendimento della distribuzione dominante sia maggiore di ogni possibile rendimento di quella dominata. Anzi, in questa figura l'insieme dei possibili rendimenti è lo stesso per entrambe le distribuzioni.

Figura 15. Dominanza stocastica di primo ordine con distribuzioni continue



È vero invece che se fissiamo sull'ascissa il rendimento a un certo valore *w*, la probabilità $\Pr(x < w)$ di un rendimento inferiore a *w* è maggiore con la distribuzione dominata (per cui è pari a $G_y(w)$) che con quella dominante (per cui è $F_x(w)$). Equivalentemente, la probabilità di avere un valore superiore a *w* è minore con la distribuzione dominata (per cui è pari a $1-G_y(w)$) che con quella dominante (per cui è $1-F_x(w)$). O ancora, fissando la probabilità a un qualsiasi valore compreso tra zero e uno, vediamo dalla Figura 15 che a quella probabilità corrisponde a un rendimento maggiore secondo la $F_x(\cdot)$ che secondo la $G_y(\cdot)$. Per esempio, la probabilità ½ sull'asse verticale del diagramma inferiore corrisponde ai valori medi delle due distribuzioni (essendo queste simmetriche), e il valor medio di $F_x(\cdot)$ è maggiore di quello di $G_y(\cdot)$: $\mu_x > \mu_y$.

3.1.2 Dominanza stocastica del secondo ordine

Mentre la dominanza stocastica del primo ordine mette a confronto i livelli di due distribuzioni, quella del secondo ordine mette a confronto la loro *rischiosità* o *dispersione*. Per evitare di confondere questo confronto con il trade-off tra rischio e rendimento (che sarà il tema del paragrafo seguente), ci limiteremo al *confronto tra distribuzioni con la stessa media*. Supporremo cioè che i due titoli che stiamo confrontando abbiano lo stesso rendimento atteso: $E(\tilde{r}_x)=E(\tilde{r}_y)$ o $\mu_x=\mu_y$.

Anche qui, esistono tre modi equivalenti per esprimere la nozione che "la distribuzione $F_x(\cdot)$ è meno rischiosa della distribuzione $G_y(\cdot)$, a parità di media".

Definizione. La distribuzione $F_x(\cdot)$ domina stocasticamente la distribuzione $G_y(\cdot)$ secondo il criterio del secondo ordine se e solo se:

1) il rendimento generato dalla $G_y(\cdot)$ è uguale in distribuzione a quello generato dalla $F_x(\cdot)$ più una variabile casuale $\tilde{\varepsilon}$ con media (condizionata) zero, cioè è ottenuto con un *mean-preserving spread* della $F_x(\cdot)$:

$$\tilde{r}_y \overset{d}{=} \tilde{r}_x+\tilde{\varepsilon}\text{, dove } E(\tilde{\varepsilon}\,|\,r_x)=0;$$

oppure

2) l'area accumulata sotto la distribuzione di probabilità $G_y(\cdot)$ è maggiore di (o uguale a) quella accumulata sotto la $F_x(\cdot)$, in corrispondenza di ogni dato livello di ricchezza *w*:

$$\int G_y(w)dw \geq \int F_x(w)dw, \quad \forall w;$$

oppure

3) un individuo avverso al rischio preferisce $F_x(\cdot)$ a $G_y(\cdot)$, cioè per qualsiasi funzione di utilità crescente e concava $u(w)$:

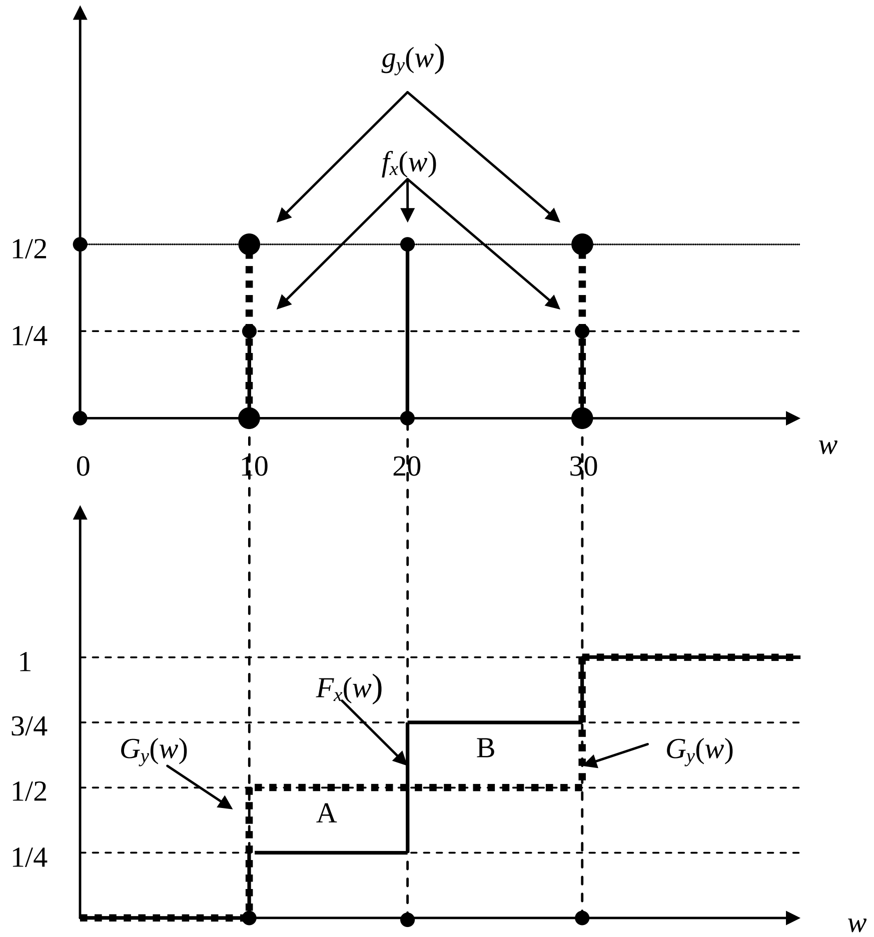
$$\int u(w)dF_x(w) \geq \int u(w)dG_y(w).$$

Anche in questo caso, la prima definizione è quella più intuitiva: la dispersione della $G_y(\cdot)$ è maggiore di quella della $F_x(\cdot)$, poiché il rendimento $\tilde{r}_y$ è ottenuto aggiungendo al rendimento $\tilde{r}_x$

una variabile causale a media zero ("rumore bianco"). Ciò equivale a spostare massa probabilistica dal centro della distribuzione verso le sue code in modo da lasciarne invariata la media.

Per esempio, consideriamo la seguente lotteria composta. Nel primo stadio i premi sono 10 euro con probabilità ¼, 20 euro con probabilità ½ e 30 euro con probabilità ¼. Se nel primo stadio si vincono 20 euro, li si può "puntare" in una seconda lotteria con premi 10 e 30 con probabilità ½ ciascuno. Questa lotteria composta è un *mean-preserving spread* della lotteria del primo stadio, e perciò è dominata stocasticamente da questa secondo il criterio del secondo ordine. Nella Figura 16 la densità (nel diagramma superiore) e la distribuzione (nel diagramma inferiore) vengono indicate con segmenti continui prima del *mean-preserving spread*, e con segmenti tratteggiati dopo di esso.

Figura 16. Dominanza stocastica di secondo ordine con distribuzioni discrete



La figura illustra anche che la *prima* definizione implica la *seconda*. La differenza tra l'area accumulata sotto la $G_y(\cdot)$ e quella sotto la $F_x(\cdot)$ è zero fino a w = 10, diventa positiva e raggiunge il suo massimo in corrispondenza della media w = 20 (dove è pari all'area A), e poi si riduce fino a zero per w = 30 (l'area B è pari all'area A). Quindi l'area sotto la $G_y(\cdot)$ supera quella sotto la $F_x(\cdot)$ nell'intervallo (10, 30) ed è pari ad essa per valori di w all'esterno di questo intervallo.

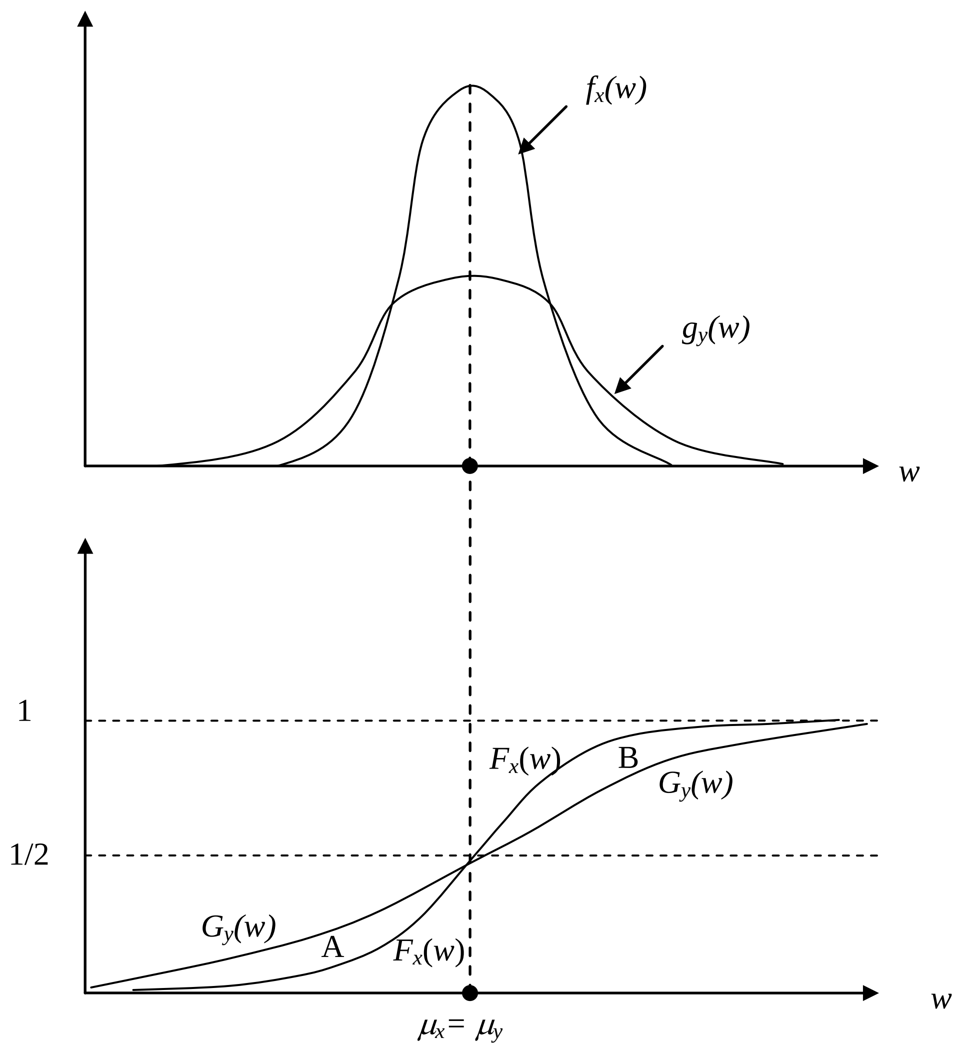
In questo esempio è facile vedere che la *prima* definizione implica anche la *terza*, e cioè che un individuo avverso al rischio preferisce la distribuzione dominante a quella dominata. Infatti la differenza di utilità attesa tra la prima e la seconda distribuzione è positiva:

$$E\left[u(1+\tilde{r}_x)\right]-E\left[u(1+\tilde{r}_y)\right]=\left[\frac{1}{4}u(10)+\frac{1}{2}u(20)+\frac{1}{4}u(30)\right]-\frac{1}{2}\left[u(10)+u(30)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[u(20)-\frac{u(10)+u(30)}{2}\right]>0\,,$$

dove la disuguaglianza finale deriva proprio dalla concavità della funzione di utilità.

Figura 17. Dominanza stocastica di secondo ordine con distribuzioni continue



La Figura 17 mostra un esempio di *mean-preserving spread* di una funzione $F_x(\cdot)$ continua e simmetrica. Anche in questo caso, come nella Figura 16, le due funzioni di distribuzione si incrociano. Fino al valor medio la distribuzione dominata $G_y(\cdot)$ è superiore alla $F_x(\cdot)$ e successivamente accade il contrario; ma l'area sotto la $G_y(\cdot)$ è sempre maggiore di quella sotto la $F_x(\cdot)$, tranne agli estremi del supporto delle due distribuzioni. Anche qui la differenza tra le aree accumulate sotto le due distribuzioni è massima in corrispondenza della media (essendo le distribuzioni simmetriche) e l'area A è pari all'area B.

La dominanza stocastica del secondo ordine è un criterio più debole (e quindi meno restrittivo) della dominanza stocastica di primo ordine: diversamente da quanto richiesto dalla dominanza di primo ordine, le due distribuzioni possono incrociarsi, come mostrato dalle Figure 16 e 17, e non si chiede che la distribuzione $F_x(\cdot)$ sia preferita anche da individui indifferenti o propensi al rischio. Infatti la dominanza stocastica del primo ordine implica quella del secondo ordine, ma non viceversa.

3.2. Criterio media-varianza

Se tra vari titoli (o portafogli) con lo *stesso* rendimento atteso ce n'è uno dominante secondo il criterio della dominanza stocastica di secondo ordine, allora quel titolo (o portafoglio) sarà necessariamente anche quello con minor varianza.[8] Ma se consideriamo titoli e portafogli con rendimento atteso *diverso*, non potremo applicare più il criterio della dominanza stocastica del secondo ordine per scegliere tra titoli o portafogli. Occorre trovare un criterio che soppesi il vantaggio di un maggior rendimento atteso a fronte del costo di una sua maggiore dispersione. Il criterio media-varianza cerca di fare proprio questo, ed è stato usato estesamente nella finanza a partire dal celebre lavoro di Markowitz.[9]

Il criterio media-varianza potrebbe sembrare coerente con qualsiasi funzione di utilità strettamente crescente e concava: essendo crescente, tale funzione comporta la preferenza per un rendimento atteso più elevato; essendo concava, comporta la preferenza per un rendimento con minor varianza. Tuttavia, in generale l'utilità attesa non può esser ridotta solo a una funzione della media e varianza dei rendimenti. Infatti, se espandiamo in serie di Taylor l'utilità intorno al valore atteso della ricchezza attesa $\bar{w} \equiv E(\tilde{w})$ e calcoliamo il suo valore atteso, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
E\left[u(\tilde{w})\right] &= u\left(\bar{w}\right) + u'\left(\bar{w}\right)E(\tilde{w}-\bar{w}) + \frac{1}{2}u''\left(\bar{w}\right)E(\tilde{w}-\bar{w})^2 + E(R_S) \\
&= u\left(\bar{w}\right) + \frac{1}{2}u''\left(\bar{w}\right)\sigma^2 + E(R_S).
\end{aligned}
$$

In questa espressione $\sigma^2 \equiv \mathrm{var}(\tilde{w})$ indica la varianza della ricchezza, mentre R_S è il resto della serie di Taylor, che raccoglie i termini di ordine superiore a quello quadratico:

---

[8] Invece il fatto che un portafoglio offra un rendimento con minor varianza e stessa media di un altro non basta ad assicurare che esso domini l'altro secondo il criterio del secondo ordine, come si vedrà alla fine di questo paragrafo.

[9] Harry Markowitz, "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, Vol. 7, 1952, pp. 77-91.

$$E\left(R_S\right)=\frac{1}{2\cdot 3}u'''\left(\overline{w}\right)E(\tilde{w}-\overline{w})^3+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}u''''\left(\overline{w}\right)E(\tilde{w}-\overline{w})^4+\ldots\ =\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}u^{(n)}\left(\overline{w}\right)m^n(\tilde{w}),$$

dove $u^{(n)}(\overline{w})$ è la derivata n-esima della funzione di utilità valutata in corrispondenza della ricchezza attesa $\overline{w}$ e $m^n(\tilde{w})$ è il momento n-esimo di $\tilde{w}$ intorno a $\overline{w}$. L'espansione in serie di Taylor *conferma* che un individuo con utilità crescente e concava preferisce un valore atteso più elevato della ricchezza (il primo termine dell'espansione è crescente in $\overline{w}$) ed è avverso alla varianza della ricchezza (il secondo termine è decrescente in σ^2 se $u''(\overline{w})<0$), ma il resto R_S della serie mostra che l'utilità attesa non è solo funzione della media $\overline{w}$ e della varianza σ^2.

In generale, non si può ignorare la presenza di termini di ordine superiore ai primi due. Per esempio, l'utilità può essere influenzata dal terzo momento centrale $m^3(\tilde{w})\equiv E(\tilde{w}-\overline{w})^3$, che misura l'asimmetria della distribuzione, o dal quarto $m^4(\tilde{w})\equiv E(\tilde{w}-\overline{w})^4$, che misura la curtosi ovvero il grado di "appiattimento" della distribuzione. Per esempio, a parità di media e di varianza, l'individuo può considerare molto sgradevole una distribuzione leptocurtica della ricchezza, che rispetto a una distribuzione normale ha maggior massa nella parte centrale e sulle code e minor massa per valori intermedi della ricchezza: una distribuzione di questo genere dà peso maggiore a rendimenti molto bassi (potenzialmente negativi) e quindi può essere vista come più rischiosa.

Tuttavia, vi sono due casi particolari in cui le preferenze possono essere rappresentate solo in funzione della media e della varianza:

1) per distribuzioni arbitrarie, se la funzione di *utilità* è *quadratica*: in tal caso, le derivate superiori alla seconda sono pari a zero, e usando i risultati della Tabella 1 l'utilità attesa può essere scritta come una funzione crescente in $\overline{w}$ (imponendo l'ipotesi di non-saturazione, cioè $\eta>\overline{w}$) e lineare e decrescente in σ^2:

$$E\left[u(\tilde{w})\right]=u\left(\overline{w}\right)+\frac{1}{2}u''\left(\overline{w}\right)\sigma^2=-\phi(\eta-\overline{w})^2-\phi\sigma^2=\phi\left[-\eta^2+(2\eta-\overline{w})\overline{w}-\sigma^2\right]; \qquad (18)$$

2) per preferenze arbitrarie, se la *distribuzione* è *normale*, la quale è completamente descritta dalla media e dalla varianza (poiché i suoi momenti di ordine superiore al secondo possono essere espressi in funzione della media e della varianza). Se la ricchezza può essere investita in vari titoli, la normalità deve valere per tutti, cioè essi devono avere una distribuzione multivariata normale: in tal caso, anche il valore finale della ricchezza investita in un qualsiasi portafoglio formato da questi titoli sarà normale, poiché la somma di variabili normali è essa stessa normale.

Se una di queste due ipotesi è soddisfatta, le curve di indifferenza possono essere rappresentate come curve crescenti e convesse in un diagramma in cui misuriamo la ricchezza attesa $\overline{w}$ sull'asse verticale e la sua varianza σ^2 sull'asse orizzontale. Per semplicità (e senza perdita di generalità), supponiamo che la ricchezza iniziale sia pari a 1, per cui la ricchezza finale $\tilde{w}$ è pari a $1+\tilde{r}_i$, dove

$\tilde{r}_i$ è il tasso di rendimento del titolo o portafoglio *i* in cui tale ricchezza viene investita. Quindi il valore atteso e la varianza della ricchezza sono semplicemente il valore atteso e la varianza del rendimento di tale titolo o portafoglio: $E(w) = 1 + E(\tilde{r}_i)$ e $\sigma^2 = \text{var}(\tilde{r}_i)$.

3.2.1 Curve di indifferenza con utilità quadratica

Se l'utilità è quadratica, in base all'espressione (18) essa può esser scritta come $E\left[u(\tilde{w})\right] = -\phi(\eta - \overline{w})^2 - \phi\sigma^2$. Un dato livello dell'utilità attesa $E\left[u(\tilde{w})\right]$ potrà essere raggiunto con combinazioni alternative della ricchezza attesa $\overline{w}$ e della sua varianza σ^2. Tali combinazioni formeranno una curva di indifferenza, lungo la quale la ricchezza attesa $\overline{w}$ varia in funzione della varianza σ^2 in modo da tener costante l'utilità attesa a un *dato* livello $\overline{u}$. La ricchezza attesa è cioè una funzione $\overline{w}(\sigma^2)$ definita implicitamente dall'equazione della curva di indifferenza di livello $\overline{u}$:

$$u(\overline{w}, \sigma^2) = -\phi\left[\eta - \overline{w}(\sigma^2)\right]^2 - \phi\sigma^2 = \overline{u}\,,$$

Per stabilire l'inclinazione e la curvatura delle curve di indifferenza basta differenziare due volte tale equazione rispetto alla varianza. La derivata prima è:

$$\frac{du}{d\sigma^2} = \frac{\partial u}{\partial \overline{w}}\frac{d\overline{w}}{d\sigma^2} + \frac{\partial u}{\partial \sigma^2} = 2\phi(\eta - \overline{w})\frac{d\overline{w}}{d\sigma^2} - \phi = 0\,, \qquad (19)$$

dove lo zero sul lato destro indica appunto che lungo una curva di indifferenza l'utilità non varia. La derivata seconda è:

$$\frac{d^2u}{d(\sigma^2)^2} = -2\phi\left(\frac{d\overline{w}}{d\sigma^2}\right)^2 + 2\phi(\eta - \overline{w})\frac{d^2\overline{w}}{d(\sigma^2)^2} = 0\,, \qquad (20)$$

dove si è tenuto conto che non solo la ricchezza attesa $\overline{w}$ ma anche la sua derivata $d\overline{w}/d\sigma^2$ è funzione della varianza σ^2.

Dalla (19) si vede che la pendenza della curva di indifferenza è positiva (poiché per ipotesi $\eta > \overline{w}$):

$$\frac{d\overline{w}}{d\sigma^2} = -\frac{\partial u / \partial \sigma^2}{\partial u / \partial \overline{w}} = \frac{1}{2(\eta - \overline{w})} > 0. \qquad (21)$$

In altri termini, il saggio marginale di sostituzione tra ricchezza attesa e rischio è positivo: un soggetto con utilità quadratica è disposto ad accettare maggior rischio soltanto in cambio di un aumento della sua ricchezza attesa.

Sostituendo la derivata $d\overline{w}/d\sigma^2$ dalla (21) nella (20), troviamo:

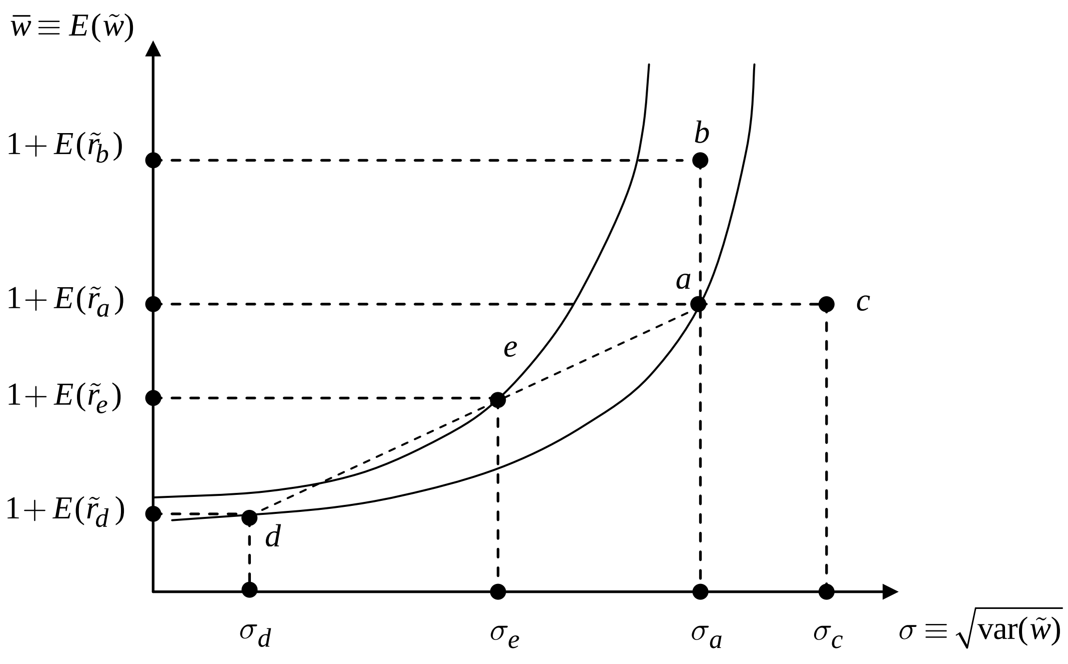
$$\frac{1}{4(\eta - w)^2} - (\eta - \overline{w})\frac{d^2\overline{w}}{d(\sigma^2)^2} = 0\,.$$

Da ciò vediamo che anche la derivata seconda è positiva:

$$\frac{d^2\overline{w}}{d(\sigma^2)^2} = \frac{1}{4(\eta - \overline{w})^3} > 0\,, \tag{22}$$

cosicché le curve di indifferenza sono convesse. In altri termini, il saggio marginale di sostituzione tra ricchezza attesa e rischio è crescente: un soggetto con utilità quadratica è disposto ad accettare aumenti di rischio soltanto in cambio di aumenti via via crescenti della sua ricchezza attesa.

Figura 17. Curve di indifferenza basate sul criterio media-varianza



Le curve di indifferenza sono crescenti e convesse anche in un diagramma in cui sull'asse orizzontale misuriamo la dispersione con la deviazione standard (o scarto quadratico medio) σ invece che con la varianza, come nella Figura 17. Infatti, sostituendo $d\sigma^2 / d\sigma = 2\sigma$ nella (21) e nella (22), si ha:

$$\frac{d\overline{w}}{d\sigma} = \frac{\sigma}{\eta - \overline{w}} > 0, \quad \frac{d^2\overline{w}}{d\sigma^2} = \frac{\sigma}{2(\eta - \overline{w})^3} > 0\,. \tag{23}$$

Chiaramente, curve di livello più elevato (e quindi più vicine all'asse verticale) sono associate a un'utilità attesa più elevata: nella Figura 17 il titolo *e* è preferito ai titoli *a* e *d*.

3.2.2 Curve di indifferenza con distribuzioni normali

Anche nel caso di distribuzioni normali, le curve di indifferenza sono crescenti e convesse nel piano ($\overline{w},\sigma$).

Per caratterizzarne la pendenza, ripetiamo il ragionamento svolto nel paragrafo precedente. Lungo la curva di indifferenza di livello $\overline{u}$, definita dall'equazione $u(\overline{w},\sigma^2)=\overline{u}$ la ricchezza attesa è una funzione implicita $\overline{w}(\sigma^2)$. Come prima, dalla derivata prima rispetto a σ^2:

$$\frac{du}{d\sigma^2}=\frac{\partial u}{\partial\overline{w}}\frac{d\overline{w}}{d\sigma^2}+\frac{\partial u}{\partial\sigma^2}=0$$

otteniamo la pendenza delle curve di indifferenza nel piano $(\overline{w},\sigma^2)$:

$$\frac{d\overline{w}}{d\sigma^2}=-\frac{\partial u/\partial\sigma^2}{\partial u/\partial\overline{w}},$$

ovvero, nel piano ($\overline{w},\sigma$):

$$\frac{d\overline{w}}{d\sigma}=-2\sigma\frac{\partial u/\partial\sigma^2}{\partial u/\partial\overline{w}}. \tag{24}$$

Per stabilire se tale pendenza è positiva, nulla o negativa, occorre accertare il segno delle derivate parziali $\partial u/\partial\sigma^2$ e $\partial u/\partial\overline{w}$. Ciò può esser fatto con un semplice ragionamento basato sulla Figura 17.

Consideriamo due titoli con uguale varianza ma diverso rendimento atteso, come *a* e *b*: il titolo *b* domina il titolo *a* secondo il criterio del primo ordine, perché il suo rendimento può essere generato aggiungendo una costante positiva al rendimento del titolo *a*.[10] Quindi investire nel titolo *b* assicura una maggior utilità. Poiché i punti *a* e *b* possono essere vicini quanto si vuole, abbiamo $\partial u/\partial\overline{w}>0$.

Poi, consideriamo due titoli con uguale rendimento atteso ma diversa varianza, come *a* e *c* nella Figura 17: essendo entrambe le distribuzioni normali, il rendimento di *c* è un *mean-preserving spread* del rendimento di *a*. Quindi *a* domina *c* secondo il criterio del secondo ordine, e l'aumento della varianza riduce l'utilità di un individuo avverso al rischio. Anche qui, i punti *a* e *c* possono essere scelti vicini a piacere, per cui $\partial u/\partial\sigma^2<0$.

Quindi nella frazione contenuta nell'espressione (24), il numeratore è negativo e il denominatore è positivo. Ne segue che le curve di indifferenza hanno pendenza *positiva*.

Per dimostrare che tali curve sono anche *convesse*, supponiamo che i titoli *a* e *d* che nella Figura 17 giacciono lungo la stessa curva di indifferenza abbiano rendimenti *perfettamente correlati*, pur con

[10] Questa costante positiva può esser vista come una variabile casuale positiva degenerata, cioè con l'intera massa probabilistica concentrata in un punto.

diversa media e varianza. Quindi consideriamo un portafoglio *e*, formato in percentuale λ dal titolo *a* e in percentuale $1-\lambda$ dal titolo *d*. Il rendimento atteso di *e* è pari alla media pesata dei rendimenti attesi di *a* e di *d*:

$$E(\tilde{r}_e) = \lambda E(\tilde{r}_a) + (1-\lambda)E(\tilde{r}_d)\,. \tag{24}$$

La varianza del rendimento di *e* è pari a:

$$\sigma_e^2 = \lambda^2\sigma_a^2 + (1-\lambda)^2\sigma_d^2 + 2\lambda(1-\lambda)\sigma_{ad}\,,$$

dove $\sigma_{ad} \equiv \mathrm{cov}(\tilde{r}_a, \tilde{r}_d)$ indica la covarianza tra i due rendimenti.[11] Poiché il coefficiente di correlazione tra due variabili è pari alla loro covarianza divisa per il prodotto dei loro scarti quadratici medi ($\rho_{ad} \equiv \sigma_{ad} / \sigma_a\sigma_d$), e poiché in questo caso per ipotesi i due rendimenti sono perfettamente correlati ($\rho_{ad} \equiv 1$), possiamo riscrivere la varianza del rendimento del titolo *e* come segue:

$$\sigma_e^2 = \lambda^2\sigma_a^2 + (1-\lambda)^2\sigma_d^2 + 2\lambda(1-\lambda)\sigma_a\sigma_d\,,$$

che è un quadrato perfetto:

$$\sigma_e^2 = \left[\lambda\sigma_a + (1-\lambda)\sigma_d\right]^2.$$

Quindi la deviazione standard del rendimento di *e* è la media di quelle dei titoli *a* e *d*:

$$\sigma_e = \lambda\sigma_a + (1-\lambda)\sigma_d\,. \tag{25}$$

Considerando insieme la (24) e la (25), vediamo che il portafoglio *e* giace sul segmento che congiunge i punti *a* e *d* nella Figura 17: variando λ, possiamo tracciare il segmento stesso.

Ora, supponiamo che l'individuo investa la sua ricchezza iniziale (1 per ipotesi) nel portafoglio *e*. Il valore finale della ricchezza sarà dato da $1+\tilde{r}_e$, dove $\tilde{r}_e$ è il rendimento di *e* che si è realizzato. *Ex post*, l'utilità dell'investitore sarà:

$$u(1+\tilde{r}_e) \equiv u\left(\lambda(1+\tilde{r}_a) + (1-\lambda)(1+\tilde{r}_d)\right).$$

Per la concavità della funzione $u(\cdot)$, questa utilità sarà maggiore della media pesata di $u(1+\tilde{r}_a)$ e $u(1+\tilde{r}_d)$, cioè le utilità *ex post* se l'investitore avesse comprato il titolo *a* o *d*:

$$u(1+\tilde{r}_e) \equiv u\left(\lambda(1+\tilde{r}_a) + (1-\lambda)(1+\tilde{r}_d)\right) > \lambda u(1+\tilde{r}_a) + (1-\lambda)u(1+\tilde{r}_d)\,.$$

[11] Si ricordi che la varianza della somma di due variabili causali $x + y$ è pari a var(x) + var(y) + 2cov(x,y). Se le variabili x e y sono moltiplicate per costanti α e β, la varianza della somma $\alpha x + \beta y$ è pari a α^2var(x) + β^2var(y) + 2$\alpha\beta$cov(x,y).

Poiché *ex post* l'investimento nel portafoglio *e* conferisce all'individuo un'utilità maggiore dell'investimento nei singoli titoli che lo compongono, ciò sarà vero anche *ex ante*, cioé in valore atteso:

$$E\left[u(1+\tilde{r}_e)\right] > \lambda E\left[u(1+\tilde{r}_a)\right] + (1-\lambda)E\left[u(1+\tilde{r}_d)\right]. \tag{26}$$

In altri termini, il portafoglio *e* dà una maggiore utilità attesa dei titoli *a* e *d*, e quindi giace su una curva di indifferenza di livello più elevato. Questa affermazione vale per ogni punto del segmento $\overline{ad}$, cioé per ogni portafoglio formato con questi due titoli, variando λ. Ciò mostra che, se i rendimenti sono normali, le curve di indifferenza sono non solo crescenti ma anche *convesse*.

Si noti che questo risultato non ha niente a che vedere con i benefici della diversificazione, perché si è ipotizzato che i titoli *a* e *d* abbiano rendimenti perfettamente correlati. Esso deriva invece dal fatto che un individuo con utilità concava preferisce un portafoglio con media e varianza "intermedie" piuttosto che "estreme".

3.2.3 Limiti e "paradossi" del criterio media-varianza

Il criterio media-varianza ha il fascino della semplicità, e per tale motivo è usato estesamente nella teoria della finanza. Tuttavia, quanto detto finora evidenzia anche i limiti di questo criterio. Se lo giustifichiamo con una funzione di utilità quadratica, dobbiamo ricordarci che questa non soddisfa il principio di non-saturazione oltre un certo valore-soglia della ricchezza, e inoltre che essa è caratterizzata da avversione assoluta al rischio crescente, il che come sappiamo è irrealistico. Se giustifichiamo il criterio media-varianza con distribuzioni normali, dobbiamo tener presente che ciò comporta che i rendimenti possano essere illimitatamente negativi, in contrasto con l'ipotesi che non si possa subire una perdita superiore al 100% del capitale finanziario investito (per effetto della responsabilità limitata, un azionista non può perdere più della somma inizialmente investita). Inoltre c'è da notare che le distribuzioni empiriche dei rendimenti sono generalmente asimmetriche e leptocurtiche, e quindi diverse dalla normale.

I limiti del criterio media-varianza come guida nelle scelte di investimento sono illustrati anche dai seguenti due esempi, in cui questo criterio non massimizza l'utilità attesa.

"Paradosso" n. 1:

Si supponga che la ricchezza finale dell'individuo possa assumere 5 valori, elencati nella seconda riga della Tabella 2, e che l'individuo possa scegliere tra due diverse lotterie, *x* o *z*, che assegnano probabilità diverse a tali valori. Le probabilità assegnate dalla funzione di densità del titolo *x*, $f_x(w)$, compaiono nella seconda riga, e quelle assegnate dalla distribuzione del titolo *z*, $h_z(w)$, compaiono nella terza riga. Chiaramente, le due distribuzioni non sono normali, ma potremmo ugualmente giustificare il ricorso al criterio media-varianza con una funzione di utilità quadratica.

Tabella 2. Caso in cui il criterio di media-varianza non massimizza l'utilità attesa di un individuo avverso al rischio

Valore della ricchezza finale:	0,0001	10	20	30	39,9999	Valore medio della ricchezza finale	Varianza della ricchezza finale	Utilità attesa: $E\left[10 \cdot \log(\tilde{w})\right]$
Prob. $f_x(w)$	0	0,33	0,34	0,33	0	20	66	29,01
Prob. $h_z(w)$	0,005	0,20	0,59	0,20	0,005	20	44	28,79

Le due lotterie offrono lo stesso premio atteso, ma la lotteria *z* ha minor varianza, per cui ci si potrebbe attendere che *z* sia preferita a *x* da un individuo avverso al rischio. Invece l'ultima colonna mostra che un individuo con una funzione di utilità logaritmica preferisce la lotteria *x* alla lotteria *z*!

Perché? La ragione è semplice: la distribuzione della ricchezza finale generata dalla lotteria *z* ha minor varianza di quella generata dalla lotteria *x* perché ha più massa probabilistica al centro che sulle code, ma è anche più leptocurtica di quella del titolo *x*, perché assegna un peso positivo ai due rendimenti estremi. Ma lo stato in cui la ricchezza è quasi pari a zero è proprio quello che un individuo avverso al rischio teme molto, per cui preferisce evitare una lotteria come *z* che lo espone con probabilità positiva a questa situazione terribile, nonostante essa abbia minor varianza! Il criterio di media-varianza non dà peso ai momenti superiori al secondo come la curtosi, e quindi non coglie questa differenza tra le due distribuzioni.

Si potrebbe pensare che questo esempio contraddica anche il principio che un individuo avverso al rischio non ama un *mean-preserving spread*. Questo sarebbe un errore: la lotteria *x non* è un un *mean-preserving spread* della *z*, perché essa ha minor massa probabilistica nella parte centrale, maggior massa per valori intermedi della ricchezza *ma anche* minor massa sulla parte estrema delle code. Ciò tuttavia deve mettere in guardia anche contro l'errore di *identificare* un *mean-preserving spread* con un aumento della varianza a parità di media. Un *mean-preserving spread* comporta sempre un aumento della varianza, ma di per sé un aumento della varianza (a parità di media) non garantisce un *mean-preserving spread*!

"Paradosso" n. 2:

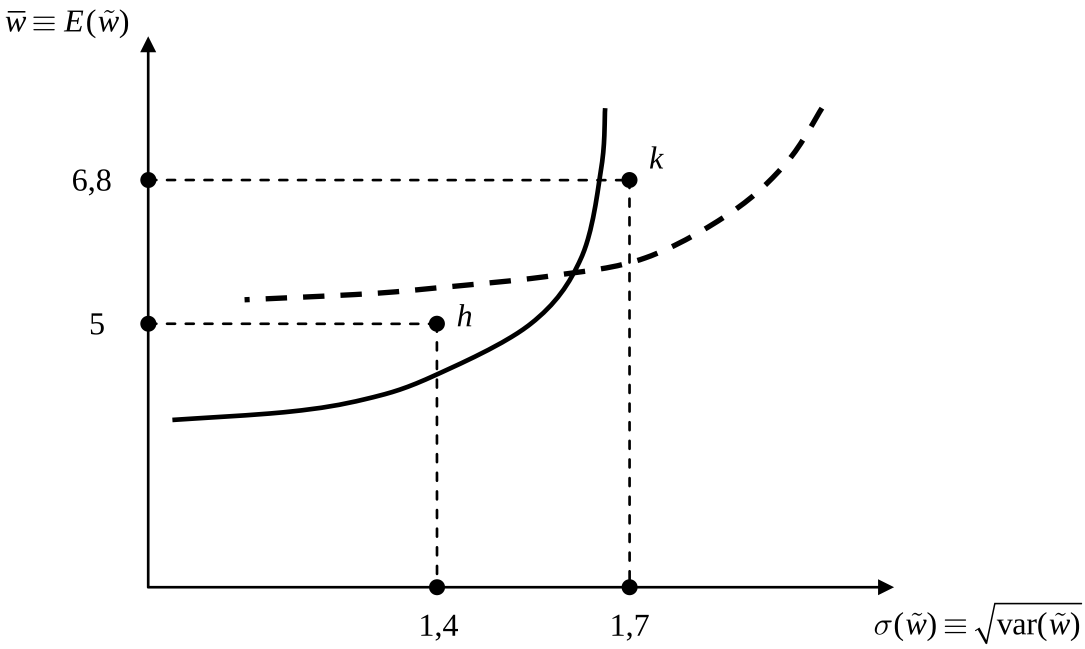
Consideriamo una situazione in cui, a seconda che l'individuo investa la propria ricchezza nel titolo *h* e *k*, la sua ricchezza finale in cinque stati di natura equiprobabili assuma i valori illustrati nella Tabella 3. In questo esempio, le probabilità degli stati di natura sono le stesse ma i rendimenti dei due titoli in ciascuno stato differiscono. Poiché la distribuzione di probabilità dei cinque stati è uniforme (ogni stato ha una probabilità del 20 per cento), anche in questo caso non si può giustificare l'uso del criterio media-varianza sulla base della normalità dei rendimenti, ma tutt'al più sulla base di una funzione di utilità quadratica.

Tabella 3. Caso in cui il criterio di media-varianza non massimizza l'utilità attesa

Stato	Pessimo	Cattivo	Medio	Buono	Ottimo	Media della ricchezza finale: $E(\tilde{w}_i)$	Deviazione standard della ricchezza finale: $\sigma(\tilde{w}_i)$
Probabilità	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20		
Ricchezza finale con il titolo *h*	3	4	5	6	7	5	1,4
Ricchezza finale con il titolo *k*	4	6	7	8	9	6,8	1,7

Sia la media che la deviazione standard della ricchezza finale sono maggiori per il titolo *k* che per il titolo *h*. Si potrebbe quindi pensare che un individuo molto avverso al rischio preferisca il titolo *h*, e uno meno avverso al rischio possa preferire il titolo *k*. La Figura 18 rappresenta questa situazione nel piano $(E(\tilde{w}_i), \sigma(\tilde{w}_i))$, in cui l'individuo più avverso al rischio ha curve di indifferenza più ripide (continue) e quello meno avverso al rischio ha curve di indifferenza più piatte (tratteggiate).

Figura 18. Scelta tra i due titoli *h* e *k* con il criterio media-varianza



Tuttavia, il ragionamento suggerito dalla Figura 18 è erroneo. Osservando la Tabella 3, è facile vedere che il titolo *k* domina stocasticamente il titolo *h* secondo il criterio del *primo* ordine, e che quindi nessun investitore, per quanto avverso al rischio, preferirà il titolo *h*. Di nuovo, ciò mostra i limiti di un criterio che considera solo i primi due momenti della distribuzione dei rendimenti.

Appendice

Derivazione della curvatura della curva di indifferenza con lotterie moltiplicative

In questo caso, la curva di indifferenza è data dalla funzione $x_2(x_1)$ che soddisfa:

$$pu(w \cdot x_1) + (1-p)u(w \cdot x_2(x_1)) \equiv u(w) .$$

Differenziando questa identità rispetto a x_1 nel punto corrispondente alla ricchezza iniziale *w*,

$$pu'(w)w + (1-p)u'(w)w \frac{dx_2}{dx_1} = 0 ,$$

si ottiene che la pendenza della curva di indifferenza è, come nell'equazione (7), pari a:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p}{1-p} .$$

Differenziando nuovamente l'identità di partenza rispetto a x_1, otteniamo:

$$pu''(w)w^2 + (1-p)u''(w)w^2 \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)^2 + (1-p)u'(w)w \frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = 0 .$$

Sostituendo dx_2 / dx_1 dall'espressione precedente e semplificando, otteniamo la curvatura della curva di indifferenza:

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = \frac{p}{(1-p)^2} \left[-w \frac{u''(w)}{u'(w)} \right] \equiv \frac{p}{(1-p)^2} R(w) .$$

Quindi quando consideriamo una (piccola) lotteria di tipo moltiplicativo, la curvatura della curva di indifferenza risulta essere proporzionale all'avversione al rischio relativo.

Esercizi

1. Il Sig. Rossi ha una ricchezza pari a € 4, e possiede un biglietto della lotteria che vale € 12 con probabilità ½ o 0 con probabilità ½. Le sue preferenze sono descritte dalla funzione di utilità è $u(w) = \sqrt{w}$. Qual è la sua utilità attesa? Qual è il minimo prezzo *p* al quale è disposto a vendere il biglietto della lotteria?

2. Se sei esposto al rischio di guadagnare € 1.000 con probabilità del 50% e di perderli con la stessa probabilità e puoi acquistare una polizza di assicurazione che rimuove il rischio al costo di € 500, a quale livello di ricchezza iniziale w_0 sarai indifferente tra sopportare il rischio e pagare l'assicurazione, posto che la tua funzione di utilità sia $u(w) = -1/w$?

3. Calcola le misure del premio per il rischio secondo Markowitz e secondo Pratt-Arrow per una lotteria in cui c'è il 20% di probabilità di perdere € 100 e l'80% di guadagnare € 25, una funzione di utilità esponenziale negativa $U(w) = -e^{-0{,}001w}$ e una ricchezza iniziale pari a € 4000. Ripeti i calcoli supponendo che i premi della lotteria siano entrambi moltiplicati per 100. Perché i risultati sono così diversi in questo caso?

4. Supponi che i rendimenti dei titoli siano distribuiti normalmente. Paragona i portafogli *A* e *B*, sia in base alla dominanza stocastica di primo ordine che a quella di secondo ordine:

Caso 1	**Caso 2**	**Caso 3**
$\sigma_A > \sigma_B$	$\sigma_A = \sigma_B$	$\sigma_A < \sigma_B$
$E_A = E_B$	$E_A > E_B$	$E_A < E_B$

5. Considera le due seguenti lotterie: la lotteria A ti dà diritto a un premio pari a 0 con probabilità del 40% e un premio pari a 10 con probabilità del 60%, mentre la lotteria B di dà diritto a un premio di 2 e un premio di 10 con probabilità del 50% ciascuno.
   a) Una delle due due lotterie è preferibile all'altra in base al criterio della dominanza stocastica del primo ordine? E in base al criterio della dominanza stocastica del secondo ordine? Illustra la tua risposta con il grafico delle due funzioni di distribuzione $F_A(w)$ e $F_B(w)$, e confronta i loro livelli nel primo caso e le aree ad esse sottostanti nel secondo caso.
   b) Supponi che la tua ricchezza iniziale sia pari a zero, e che le tue preferenze siano descritte da una funzione lineare della media e della varianza $u = \mathrm{E}(\tilde{w}) - b\,\mathrm{var}(\tilde{w})$. Quale lotteria preferirai? La tua risposta dipende dalla grandezza del parametro *b*?
   c) Se invece le tue preferenze sono descritte dalla funzione $u = \mathrm{E}\left(\sqrt{\tilde{w}}\right)$, quale lotteria preferirai? Se questa risposta è diversa da quella ottenuta al punto b, spiega perché.

6. Hai una ricchezza iniziale w, che include una bella motocicletta il cui valore corrente è x. C'è una probabilità p che te la rubino. Puoi assicurarti garantendoti un indennizzo di € q in caso di furto (copertura assicurativa) ma devi pagare un premio di € πq, dove π è il premio per euro di copertura. Le tue preferenze sono descritte da una funzione di utilità logaritmica: $u(\cdot) = \log(\cdot)$, il cui argomento è la ricchezza finale.

   a) Qual è la copertura ottimale q^*? Come varia in funzione dell'entità del danno x? Perché?

   b) Se alla fine la moto viene rubata, la compagnia di assicurazioni avrà incassato il premio di € $\pi \cdot q$ ma deve pagare € q di indennizzo; se non viene rubata, la compagnia di assicurazioni avrà incassato il premio € $\pi \cdot q$. Scrivi il profitto atteso della compagnia, e trova il premio π per euro di copertura che dovrà applicare se la concorrenza spinge tale profitto atteso a zero.

   c) Qual è la copertura ottimale q^* in questo scenario di concorrenza perfetta?

   d) Supponi ora che le compagnie di assicurazione non siano in concorrenza perfetta: ciascuna di esse può imporre una percentuale di ricarico (*markup*) ϕ (supponendo che $\phi < 1 - p$) per ogni euro di copertura assicurativa, cosicché i suoi profitti per assicurato saranno ϕq invece di essere pari a zero. Calcola la nuova copertura ottimale preselta dall'assicurato, indicandola con q^{**} per distinguerla da quella calcolata nei punti precedenti, dimostra che q^{**} è minore di q^*, e spiega intuitivamente perché.

   e) Ancora con riferimento al punto d), mostra come q^{**} varia all'aumentare della perdita x dovuta al furto e della ricchezza iniziale w, e spiega la ragione intuitiva di questi risultati.

   f) Ancora con riferimento al punto d), mostra come q^{**} varia all'aumentare del *markup*, per valori piccoli del *markup* stesso. (Suggerimento: calcola la derivata parziale di q^{**} rispetto a ϕ e valutala per $\phi = 0$.)