Corso di Teoria dei Segnali
Esercizi – Parte III
CdS SNAMO
A.A. 2022/2023
Docente: G. Ferraioli

Esercizio n.1
I risultati di un esperimento sono numeri interi equiprobabili tra 1 e 12 (inclusi). Si considerino i seguenti eventi:
A={numero è pari}
B={numero è divisibile per 3}
C={numero divisibile per 4}
Individuare i seguenti eventi: A, B, C, AB, AC, $\bar{A}$C, $\bar{A}$B e calcolarne le rispettive probabilità.

Esercizio n.2
Si lanciano due dadi. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
A={somma dei dadi è maggiore o uguale ad 8}
B={somma dei dadi è esattamente uguale ad 8}
C={si ottiene almeno un 6 nei due lanci}

Esercizio n.3
Si lanciano due dadi. Siano A e B i seguenti eventi:
A={somma dei dadi è dispari}
B={si ottiene almeno una 6 nei due lanci}
Individuare i seguenti eventi: AB, $A \cup B$, $\bar{A}$B e calcolarne le rispettive probabilità.

Esercizio n.4
Si considerino le cifre 1,2,3,4,5. L'esperimento è il seguente: si sceglie una prima cifra e poi una seconda tra le restanti. Assumendo i risultati equiprobabili, determinare la probabilità che:
a) la prima volta venga scelta una cifra dispari
b) la seconda volta venga scelta una cifra dispari
c) entrambe le volte venga scelta una cifra dispari

Esercizio n. 5
Si estraggono due carte da un mazzo di carte francesi senza jolly. Calcolare la probabilità di ottenere 2 assi; calcolare la probabilità di ottenere almeno una carta di cuori.

Esercizio n.6
Siano A e B due eventi di uno spazio di probabilità. Esprimere i seguenti eventi in termini di operazioni elementari sugli insiemi e calcolarne le probabilità in termini di P(A), P(B), P(AB):
a) A oppure B oppure entrambi
b) Sia A che B
c) B ma non A
d) A oppure B ma non entrambi
e) Al più uno tra A e B

Esercizio n.7
Un dado è truccato in modo che la probabilità di ogni faccia sia proporzionale al numero di punti sulla faccia stessa. Calcolare la probabilità di ottenere un numero pari in un singolo lancio di dadi.

Esercizio n.8
Una persona possiede due automobili. Sia 0.1 la probabilità che al mattino entrambe si mettano in moto, 0.2 la probabilità che solo la seconda si metta in moto e 0.4 la probabilità che nessuna delle due si metta in moto. Calcolare:

- la probabilità che solo la prima automobile si metta in moto;
- la probabilità che almeno una delle due automobili si metta in moto;
- la probabilità che solo una delle due automobili si metta in moto.

Esercizio n.9
In una gara di tiro con l'arco due concorrenti tirano al medesimo bersaglio. La probabilità che il primo concorrente colpisca il bersaglio è 9/10, quella del secondo concorrente è 5/6. Sapendo che i due concorrenti tirano contemporaneamente, calcolare la probabilità che entrambi colpiscano il bersaglio e la probabilità che solo il secondo colpisca il bersaglio

Esercizio n.10
Un'urna contiene 10 biglie numerate da 1 a 10. Se il primo valore estratto è diverso da 1, la biglia viene rimessa nell'urna. Si estrae successivamente una seconda biglia. Calcolare la probabilità che la seconda biglia sia quella col numero 2.

Esercizio n.11
Tizio e Caio hanno a disposizione due monete. Una moneta è onesta, l'altra è truccata con P({Testa})=2/3. Il giudice del gioco sceglie una moneta a caso tra le due e la lancia. Se il risultato del lancio della moneta è Testa, il giudice cambia la moneta. Il giudice effettua un secondo lancio. Tizio vince se il risultato del secondo lancio è Testa. Caio vince se il risultato del secondo lancio è Croce. Calcolare la probabilità di vittoria di Tizio.

Esercizio n.12
Tizio e Caio si recano al supermercato. La probabilità che Tizio e Caio acquistino il pane sono rispettivamente pari a 0.6 e 0.8. Inoltre, la probabilità che entrambi acquistino il pane è 0.5. Sapendo che all'uscita dal supermercato almeno uno ha acquistato il pane, determinare la probabilità che Tizio abbia acquistato il pane. Sapendo che Tizio ha acquistato il pane, stabilire la probabilità che almeno uno abbia acquistato il pane.

Esercizio n.13
Un gruppo di escursionisti organizza una gita in montagna. Il 30% dei partecipanti è fuori allenamento. Si ipotizza che coloro che non sono allenati abbiano una probabilità di raggiungere la meta pari al 60% e quelli allenati abbiano una probabilità pari al 95%.
Qual è la probabilità che un escursionista scelto a caso nel gruppo raggiunga la meta?
Sapendo che ha raggiunto la meta, stabilire la probabilità che si tratti di un escursionista allenato.

Esercizio n.14
Siano A, B e C tre eventi tali che si verificano con probabilità 0.6, 0.65 e 0.5, rispettivamente. E' noto, inoltre, che A e B si verificano contemporaneamente con probabilità uguale a 0.55, mentre A e C si verificano contemporaneamente con probabilità 0.4. Infine, è noto che la probabilità che B si verifichi, nel caso in cui si sia verificato C è pari a 0.9.
Si calcolino $P(A|B)$ e $P(B|A)$.

- Stabilire se A e B sono mutuamente esclusivi.
- Stabilire se B e C sono mutuamente esclusivi.
- Stabilire se A e B sono indipendenti.
- Stabilire se B e C sono indipendenti.

- Si calcoli P(C|B)

Esercizio n.15
Si hanno due monete, una bilanciata e l'altra con due teste. Si sceglie una moneta a caso e si lancia due volte, ottenendo due teste. Qual è la probabilità che si sia scelta la moneta bilanciata?

Esercizio n.16
In un campione di persone il 30% è vegetariano, il 20% dei vegetariani è obeso mentre il 45% delle persone è non vegetariano ed obeso. Estratto a caso una persona si calcoli la probabilità che sia vegetariano sapendo che non è obeso.

Esercizio n.17
Una scatola contiene tre dadi, di cui uno è truccato in modo tale che P(6) = 2/3, mentre gli altri due sono bilanciati. Si estrae a caso un dado e lo si lancia ottenendo un 6. Qual è la probabilità che sia il dado truccato?

Esercizio n.18
Una compagnia di assicurazione ha tre tipologie di clienti: ad alto rischio, a medio rischio, e a basso rischio. In particolare, il 20% dei clienti è ad alto rischio, il 30% è a medio rischio, ed il 50% è a basso rischio. Inoltre, la probabilità che un cliente abbia almeno un incidente durante l'anno è pari a 0.25 per clienti ad alto rischio, a 0.16 per clienti a medio rischio, ed a 0.10 per clienti a basso rischio.

- Determinare la probabilità che un cliente scelto a caso abbia almeno un incidente durante l'anno.
- Determinare la probabilità che un cliente sia ad alto rischio, sapendo che ha avuto almeno un incidente durante l'anno.

Esercizio n.19
Uno studente universitario, per raggiungere l'università, utilizza l'autobus nel 65% dei casi, la metropolitana il 20% delle volte ed il treno in tutti gli altri casi. Lo studente arriva in orario a lezione con probabilità 0.35 quando si serve dell'autobus, con probabilità 0.75 quando fa uso della metropolitana e con probabilità 0.55 quando prende il treno.
Si considerino i seguenti eventi:
A = {lo studente prende l'autobus}, M = {lo studente prende la metropolitana}, T = {lo studente prende il treno}, O = {lo studente arriva in orario a lezione}.

- Stabilire se A e M sono statisticamente indipendenti, motivando la risposta;
- Stabilire se T e O sono mutuamente esclusivi, motivando la risposta;
- Calcolare la $P(A \cap O)$;
- Calcolare la probabilità che uno studente non si sia servito della metropolitana dato che è arrivato in orario a lezione

Esercizio n.20
Un calcolatore elettronico smette di funzionare se entrambi i componenti A e B si guastano. Il componente A si guasta con probabilità 0.01, ed il componente B con probabilità 0.005. Tuttavia, la probabilità che B si guasti aumenta di un fattore 4 se A si è guastato. Calcolare:
a) la probabilità che il calcolatore vada fuori servizio;
b) la probabilità che A sia guasto se B si è guastato.

Esercizio n.21
Un segnale telegrafico è costituito da punti e linee. Si supponga che, a causa di disturbi, un punto trasmesso sia ricevuto come linea con probabilità 1/10 ed una linea come punto con probabilità 3/15. Supponendo che il numero di punti trasmessi è quadruplo rispetto a quello delle linee, si calcolino le

probabilità che il simbolo ricevuto coincida con quello trasmesso nel caso in cui il simbolo ricevuto sia un punto

Esercizio n.22
Sia X la variabile aleatoria continua con cdf:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2/2 & 0 < x \le 1 \\ -x^2/2 + 2x - k & 1 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

- Calcolare il valore di k e rappresentare graficamente la pdf della variabile aleatoria X
- Calcolare la probabilità dei seguenti eventi A={0.5<X<2}, B={X=2} e C={X>2}

Esercizio n.23
Sia data la variabile aleatoria continua X avente la seguente cdf:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}xu(x) & x \le k \\ 1 & x > k \end{cases}$$

- Calcolare il valore di k appropriato e calcolare e rappresentare la pdf della variabile aleatoria X.
- Calcolare con che probabilità 0.2 < x ≤ 5.

Esercizio n.24
Sia X la variabile aleatoria continua con pdf:

$$f_X(x) = \begin{cases} ke^{-x} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

- Calcolare il valore di k per cui $f_X(x)$ risulta una valida pdf.
- Calcolare e rappresentare graficamente la cdf della variabile aleatoria X

Esercizio n.25
Sia X la variabile aleatoria continua con pdf:

$$f_X(x) = \begin{cases} x/2 - 1 & 2 < x < k \\ 0 & altrove \end{cases}$$

- Calcolare il valore di k, giustificando la risposta.
- Calcolare e rappresentare graficamente la cdf della variabile aleatoria X
- Calcolare la probabilità dei seguenti eventi A={2<X<3}, B={X=3} e C={X<=3}

Esercizio n.26
Si consideri la seguente funzione:

$$p_X(x) = \begin{cases} kx/6 & x = 0,1,2,3,4,5,6 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

- Si determini il valore di k che assicura che $p_X(x)$ sia una valida pmf.

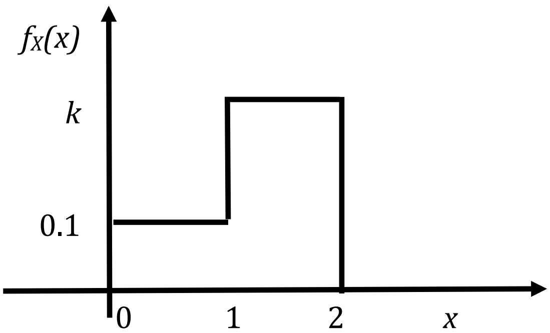
- Rappresentare la pmf e la cdf della variabile aleatoria X e calcolare la probabilità dei seguenti eventi A={X=2}, B={X>2}, C={0≤X≤2}

Esercizio n.27
Un giocatore di freccette colpisce il bersaglio con probabilità 3/5. Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di centri ottenuti dopo il lancio di 3 freccette.
- Calcolare e disegnare la pmf di X e calcolare e disegnare la cdf di X.
- Calcolare la probabilità con cui il giocatore faccia almeno 2 centri.

Esercizio n.28
Si consideri un'urna contenente 10 palline, delle quali 7 sono verdi e 3 rosse. Sia X la variabile aleatoria che rappresenta il numero di palline verdi ottenute effettuando 4 estrazioni con reinserimento dall'urna.
- Calcolare e rappresentare graficamente la cdf e la pmf di X;
- Calcolare la Probabilità P(0.5 < X < 2.5);

Esercizio n. 29
Si consideri il lancio di due dadi aventi le facce marcate con i seguenti numeri: {1,1,3,3,5,6}. Sia X la variabile aleatoria definita come il massimo dei due valori ottenuti. Calcolare la funzione di probabilità di massa della variabile aleatoria X e la funzione di distribuzione cumulativa della variabile aleatoria X;

Esercizio n. 30
La variabile aleatoria *X* ha la seguente pdf $f_X(x)$



- Calcolare il valore di k affinché $f_X(x)$ sia una valida pdf.
- Calcolare e rappresentare graficamente la CDF di *X.*