SVOLGIMENTO DELLA II PROVA INTERCORSO

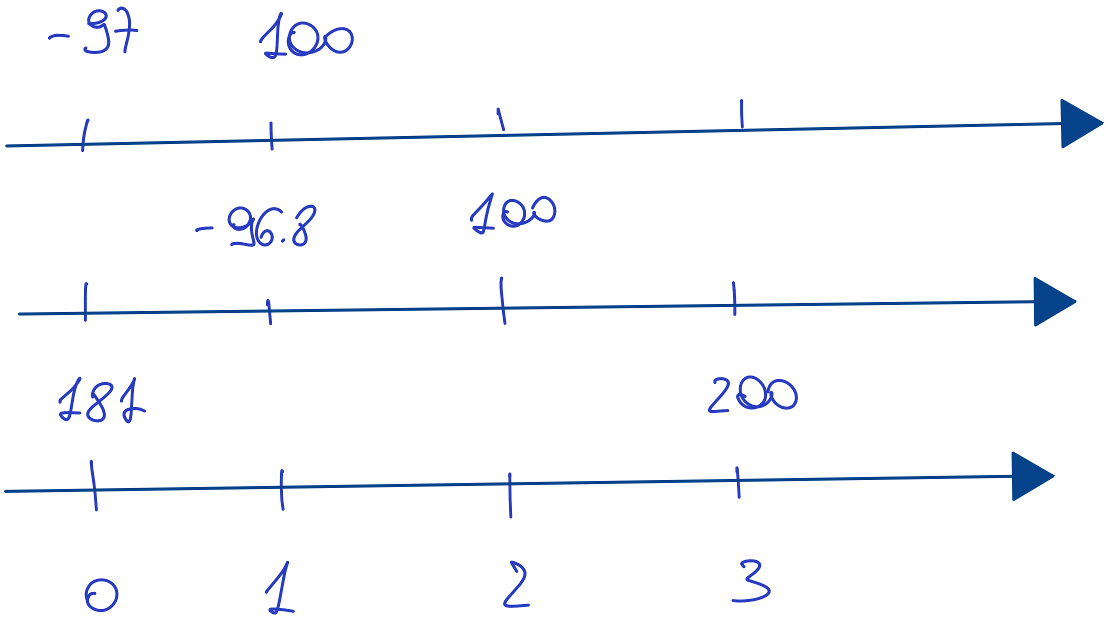
ESERCIZIO 1.1

Si consideri alla data odierna (tempo zero) un mercato in cui sono quotati:

- un titolo a cedola nulla con scadenza un anno, nominale 100 euro e prezzo a pronti 97;
- un titolo a cedola nulla con scadenza due anni, nominale 100 euro e prezzo a termine 96.8, pagabile tra un anno;
- un titolo a cedola nulla con scadenza tre anni, nominale 200 euro e prezzo a pronti 181.

Si determini la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine riferita allo scadenzario {0, 1, 2, 3}.

Si determini quindi in questo mercato il prezzo P di una rendita francese con rata 1000 euro e durata tre anni.



$$v(0,1) = \frac{97}{100} = 0.97$$

$$v(0,1,2) = \frac{96.8}{100} = 0.968$$

$$v(0,3) = \frac{181}{200} = 0.905$$

per il teorema dei prezzi impliciti:

$$v(0,1,2) = \frac{v(0,2)}{v(0,1)} \Rightarrow v(0,1) = v(0,1,2)\, v(0,2) =$$

$$= 0.968 \cdot 0.97 = 0.9390$$

K	$v(0,K)$	$i(0,K)$	$v(0,K-1,K)$	$i(0,K-1,K)$
0				
1	0,9700	3.0928%	0.97	3.0928%
2	0,9390	3.1992%	0.968	3.3058%
3	0,905	3.3833%	0.9638	3.7525%

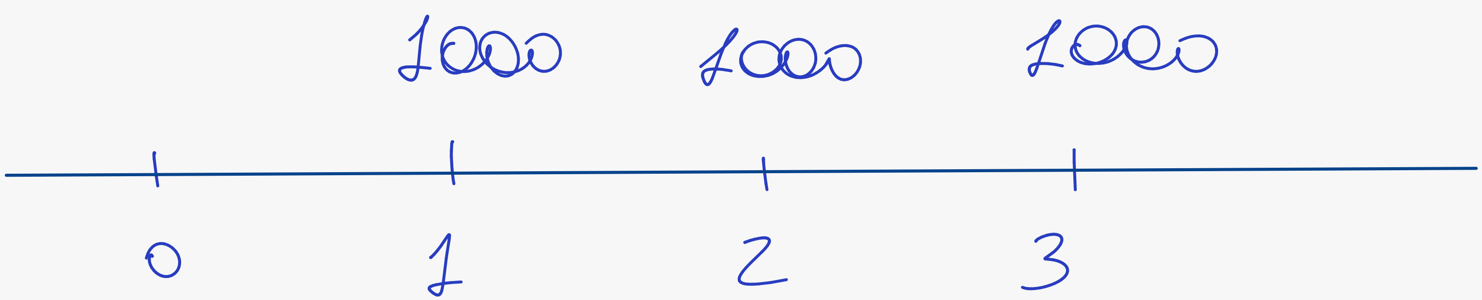
$$i(0,1) = \frac{1}{0.97} - 1 \quad ; \quad i(0,2) = \left(\frac{1}{0.9390}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \quad ;$$

$$i(0,3) = \left(\frac{1}{0.905}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$v(0,2,3) = \frac{v(0,3)}{v(0,2)} = \frac{0.9050}{0.9390} = 0.9638$$

$$i(0,1,2) = \left(\frac{1}{0.968}\right)^{\frac{1}{2-1}} - 1$$

$$i(0,2,3) = \left(\frac{1}{0.9638}\right)^{\frac{1}{3-2}} - 1$$



$$P = 1000\, v(0,1) + 1000\, v(0,2) + 1000\, v(0,3) =$$

$$= 1000\; 0.97 + 1000\; 0.9390 + 1000\; 0.905 =$$

$$= 2813.96$$

ESERCIZIO 1.2

In un mercato in cui la struttura per scadenza è piatta al tasso annuo i = 3.05%, un investitore detiene un portafoglio del valore complessivo di 15000 di euro, formato per il 65% del valore da rendite perpetue a rata annuale costante e per il resto da BOT a 12 mesi. Si calcoli la duration del portafoglio.

L'investitore decide poi di acquistare titoli a cedola nulla con maturità T da decidere, per un valore complessivo di 4800 euro. Si calcoli la maturità che deve essere fissata affinché il portafoglio complessivo dell'investitore abbia una duration di 18 anni.

Rendite perpetue $D(0,R) = \frac{1+i}{i} = \frac{1.035}{0.035} = 33.79$

BOT $D(0,BOT) = \frac{12}{12} = 1$

$$D_{portafoglio} = 0.65 * 33.79 + 0.35 * 1 = 22.3115$$

[come pesi o usare direttamente 0,65 e 0.35 oppure $\frac{9750}{15000}$ e $\frac{5250}{15000}$]

Il nuovo portafoglio è composto dal precedente portafoglio (di cui conosciamo valore (15000) e duration (22.3115)) e dal nuovo TCN

$$18 = \frac{15000}{19800} 22.3115 + \frac{4800}{19800} T$$

dove $19800 = 15000 + 4800$

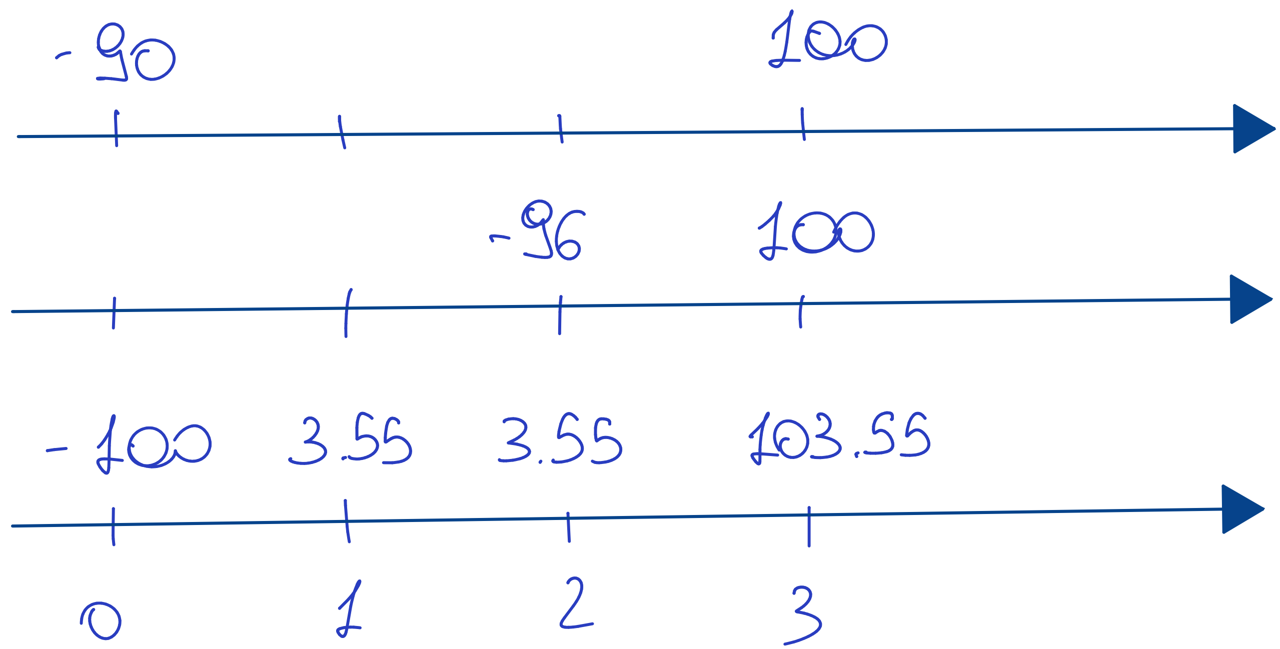
$$T = \frac{18 * 19800 - 15000 * 22.3115}{4800} = 4.5266$$

ESERCIZIO 2.1

Si consideri un mercato in cui, al tempo t = 0, sono quotati i seguenti tre titoli (tutti riferiti a un facciale C = 100):

- un TCN a pronti, con scadenza t_3=3 anni, e prezzo P=90
- un TCN a termine, con scadenza t_3=3 anni con prezzo, da pagare in t_2=2 anni di P=96
- un TCF a pronti, con scadenza t_3=3 anni, cedola annuale, tasso cedolare annuo del 3.55% e quotato alla pari.

Si determini anzitutto la struttura per scadenza dei tassi di interessi a pronti, esprimendola in forma percentuale e su base annua.
Si calcoli in questo mercato il prezzo P di una rendita posticipata di durata m = 3 rate annuali, tutte pari a R = 600.



$$v(0,3) = \frac{90}{100} = 0.90$$

$$v(0,2,3) = \frac{96}{100} = 0.96$$

Per il Teorema dei prezzi impliciti:

$$v(0,2,3) = \frac{v(0,3)}{v(0,2)} \Rightarrow v(0,2) = \frac{v(0,3)}{v(0,2,3)} = \frac{0.90}{0.96} = 0.9375$$

Per il Teorema di linearità del prezzo

$$100 = 3.55\,v(0,1) + 3.55\,v(0,2) + 103.55\,v(0,3)$$

$$v(0,1) = \frac{100 - 3.55\,v(0,2) - 103.55\,v(0,3)}{3.55} =$$

$$= \frac{100 - 3.55 \cdot 0.9375 - 103.55 \cdot 0.90}{3.55} = 0.9794$$

k	$v(0,k)$	$i(0,k)$	$v(0,k-1,k)$	$i(0,k-1,k)$
0				
1	0.9794	2.1032%	0.9794	2.1032%
2	0.9375	3.280%	0.9572	4.4695%
3	0.900	3.574%	0.96	4.1667%

La struttura a termine non era richiesta. Per completezza la riporto comunque

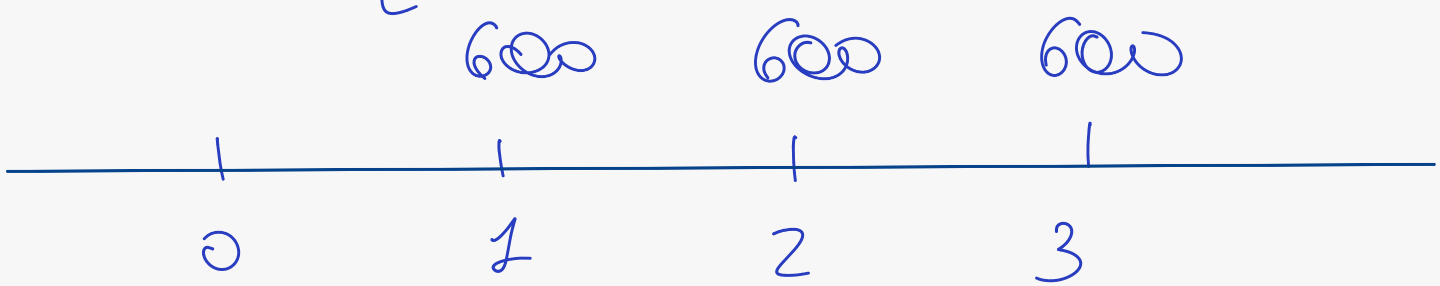
$$i(0,1) = \frac{1}{0.9794} - 1 \quad ; \quad i(0,2) = \left(\frac{1}{0.9375}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$i(0,3) = \left(\frac{1}{0.90}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$v(0,1,2) = \frac{v(0,2)}{v(0,1)} = \frac{0.9375}{0.9794}$$

$$i(0,1,2) = \left[\frac{1}{v(0,1,2)}\right]^{\frac{1}{2-1}} - 1 = \frac{1}{0.9572} - 1$$

$$i(0,2,3) = \left[\frac{1}{v(0,2,3)}\right]^{\frac{1}{3-2}} - 1$$



$$P = 600\, v(0,1) + 600\, v(0,2) + 600\, v(0,3) =$$

$$= 600 \cdot 0.9794 + 600 \cdot 0.9375 + 600\; 0.9 = 1690.14$$

ESERCIZIO 2.2

Al tempo t = 0, la struttura per scadenza dei tassi di interesse è piatta al tasso i = 4.5%. Il signor Rossi possiede un portafoglio del valore di 96 000 euro investito interamente in BTP di maturità 6 anni, e t.n.a. del 6%. Si calcoli la duration del portafoglio. Giudicando la duration eccessiva, il signor Rossi decide di ridurla vendendo una quota del portafoglio, dal valore V espresso in euro, e re-investendola in BOT a sei mesi. Quanto deve essere la quota V affinché la duration complessiva risulti pari a tre anni?

Il portafoglio contiene una sola tipologia di contratto, quindi la duration del portafoglio sarà uguale alla duration del BTP

Il BTP scade tra 6 anni, ci saranno quindi 12 cedole semestrali

$$i_{1/2} = (1+0.045)^{\frac{1}{2}} - 1 = 2.2252\%$$

$$I = \frac{0.06}{2} 100 = 3$$

$$V_{BTP} = I\, a_{\overline{12}|2.2252\%} + 100\,(1+0.045)^{-6} =$$

$$= 31.2916 + 76.7896 = 108.08$$

La duration della rendita di rate uguali alle cedole è

$$D(0,T) = \frac{1+i_{1/2}}{i_{1/2}} - \frac{n}{(1+i_{1/2})^n - 1} = 6.2380 \text{ semestri}$$

$$D(0,T) = \frac{6.2380}{2} = 3.1190 \text{ anni}$$

$$D(0,BTP) = D(0,T)\,\frac{V(0,T)}{V_{BTP}} + 6\,\frac{100\,v(0,6)}{V_{BTP}} =$$

$$= 3.1190\,\frac{31.2916}{108.08} + 6\,\frac{76.7896}{108.08} = 5.1659$$

Il prezzo di un BTP è di 108.08 quindi con 96000 euro riesco a comprare una quantità di titoli pari a

$$\frac{96000}{108.08} = 888.22$$

Se il sig. Rossi investe V euro in BOT, investirà in BTP la quantità 96000 − V quindi

$$3 = D_{BTP} \frac{96000 - V}{96000} + 0.5 \frac{V}{96000}$$

dove 0.5 è la duration in anni del BOT con scadenza 6 mesi

$$3 * 96000 = 5.1659\,(96000 - V) + 0.5\,V$$

quindi

$$V\,(0.5 - 5.1659) = 96000\,(3 - 5.1659)$$

$$V = \frac{96000\,(3 - 5.1659)}{0.5 - 5.1659} = 44562.99$$