ESERCITAZIONE 13: integrale - 2 parte (integrale definito, aree, funzioni integrali)

ESERCIZIO 1. Calcolare l'area geometrica delle seguenti figure piane, dopo averle rappresentate graficamente:

1.1) la regione racchiusa fra le rette verticali $x = 0$, $x = 2$ e le curve $y = 1 + x^3$ e $y = \cos x$;
1.2) la regione racchiusa fra la retta $y = x$ e la parabola $y = 2 - x^2$;
1.3) l'insieme dei punti (x, y) con $|x| \le 3$ e $0 \le y \le |x|e^{|x|}$;
1.4) la regione racchiusa fra la retta $y = 1-2x$ e la parabola di asse x con vertice in $(0, -1)$ passante per $(1/2, 0)$.

ESERCIZIO 2. Utilizzando le formule di integrazione per parti e di sostituzione, calcolare i seguenti integrali definiti:

2.a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{2x-5}\,dx$,

2.b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\,\sin x\,dx$,

2.c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \Big(\sin 4x + \cos(x-\frac{\pi}{4})\Big)\,dx$,

2.d) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} \log x\,dx$,

2.e) $\displaystyle\int \cos^4 x \sin^3 x\,dx$,

2.f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,\cos x\,dx$,

2.g) $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^x \cos(\pi\,e^x)\,dx$,

2.h) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\tan x}\,dx$,

2.i) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} \frac{1}{x}\log\frac{1}{x}\,dx$,

2.j) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{x}\cos\left(\pi\,\log x\right)\,dx$,

2.k) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - x + 1)\,e^{-x}\,dx$,

2.l) $\displaystyle\int_{-18}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{9-x}}\,dx$,

2.m) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx$

2.n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$,

2.o) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x+7}{x^2+2x-3}\,dx$,

ESERCIZIO 3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ una sua funzione integrale. Per ognuna delle seguenti affermazioni, stabilire se è vera o falsa:

3.a) Se $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $F(x)$ è una funzione strettamente crescente ☐ V ☐ F

3.b) Se $f(x)$ è derivabile e strettamente crescente per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $F(x)$ è una funzione convessa su $\mathbb{R}$ ☐ V ☐ F

3.c) Se $f(x)$ è derivabile e cambia monotonia in $x = 0$, allora $F(x)$ ha un punto di flesso in $x = 0$ ☐ V ☐ F

3.d) Se $f(x)$ è derivabile e cambia monotonia in $x = 0$, allora $F(x)$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale in $x = 0$ ☐ V ☐ F

3.e) Se $f(x)$ è derivabile, cambia monotonia in $x = 0$ e inoltre $f(0) = 0$, allora $F(x)$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale in $x = 0$ ☐ V ☐ F

ESERCIZIO 4. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \log(1+t^2)dt}{x^3}$.

ESERCIZIO 5. Calcolare i seguenti integrali definiti e indefiniti:

5.a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx,$

5.b) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x^4} \, dx,$

5.c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \, dx,$

5.d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} \, dx,$

5.e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{8-12x+6x^2-x^3}} \, dx,$

5.f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \sin^3 x \cos^4 x \, dx,$

5.g) $\displaystyle\int \frac{\cos x \sin x}{2\sin^2 x - 7\sin x + 6} \, dx,$

5.h) $\displaystyle\int \frac{\log x + 2}{x(2\log^2 x - 10\log x + 13)} \, dx,$

5.i) $\displaystyle\int_0^1 x^3 (e^{x^4} - 3)\, e^{x^4} \, dx,$

5.j) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{1+9e^{2x}} \, dx,$

5.k) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x - 4} \, dx,$

5.l) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^{2x}+e^x+1} \, dx$.