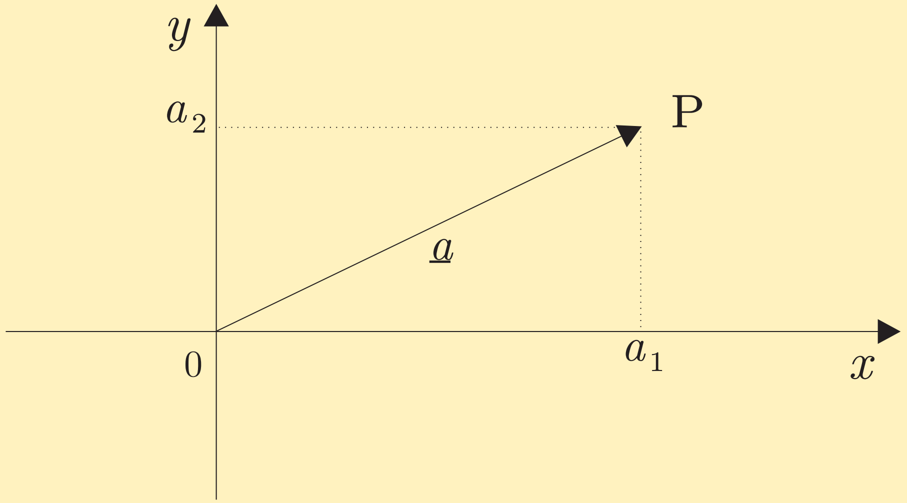
# Determinante e rango di una matrice

# Vettori di $\mathcal{R}^n$

Un vettore $\underline{a}^T = (a_1 \ \ a_2)$ identifica il punto P del piano cartesiano di coordinate $(a_1, a_2)$.

# Vettori di $\mathcal{R}^n$

Un vettore $\underline{a}^T = (a_1 \;\; a_2)$ identifica il punto P del piano cartesiano di coordinate $(a_1, a_2)$.

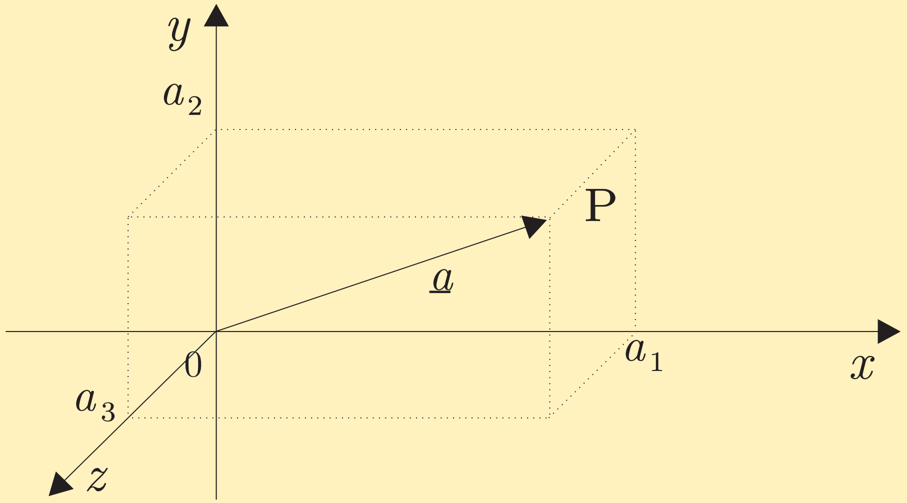


# Vettori di $\mathcal{R}^n$

Un vettore $\underline{a}^T = (a_1 \;\; a_2 \;\; a_3)$ identifica il punto P dello spazio tridimensionale di coordinate $(a_1, a_2, a_3)$.

# Vettori di $\mathcal{R}^n$

Un vettore $\underline{a}^T = (a_1 \;\; a_2 \;\; a_3)$ identifica il punto P dello spazio tridimensionale di coordinate $(a_1, a_2, a_3)$.



# Vettori di $\mathcal{R}^n$

Un vettore $\underline{a}^T = (a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots \;\; a_n)$ identifica il punto P dello spazio $n$-dimensionale di coordinate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

# Vettori di $\mathcal{R}^n$

Un vettore $\underline{a}^T = (a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots \;\; a_n)$ identifica il punto P dello spazio $n$-dimensionale di coordinate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Pertanto, indichiamo i vettori come punti di $\mathcal{R}^n$.

# Combinazione lineare di vettori

Assegnati $k$ vettori:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in \mathcal{R}^n$$

# Combinazione lineare di vettori

Assegnati $k$ vettori:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in \mathcal{R}^n$$

e $k$ scalari:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathcal{R},$$

# Combinazione lineare di vettori

Assegnati $k$ vettori:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in \mathcal{R}^n$$

e $k$ scalari:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathcal{R},$$

si dice **combinazione lineare di $\underline{a}_i, i = 1, \ldots, k$, mediante gli scalari $\lambda_i, i = 1, \ldots, k$,**

# Combinazione lineare di vettori

Assegnati $k$ vettori:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in \mathcal{R}^n$$

e $k$ scalari:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathcal{R},$$

si dice **combinazione lineare di $\underline{a}_i, i = 1, \ldots, k$, mediante gli scalari $\lambda_i, i = 1, \ldots, k$,** il vettore:

$$\underline{b} = \lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \underline{a}_k.$$

# Esempio

Siano:

$$\underline{a}_1 = (1, 2, 1)\,,\ \underline{a}_2 = (-1, 0, 3)\,,$$

# Esempio

Siano:

$$\underline{a}_1 = (1, 2, 1)\,,\ \underline{a}_2 = (-1, 0, 3)\,,$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3.$$

# Esempio

Siano:

$$\underline{a}_1 = (1, 2, 1)\,,\ \underline{a}_2 = (-1, 0, 3)\,,$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3.$$

La combinazione lineare di $\underline{a}_1,\ \underline{a}_2$ mediante gli scalari $\lambda_1,\ \lambda_2$ è:

# Esempio

Siano:

$$\underline{a}_1 = (1, 2, 1)\,,\ \underline{a}_2 = (-1, 0, 3)\,,$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3.$$

La combinazione lineare di $\underline{a}_1,\ \underline{a}_2$ mediante gli scalari $\lambda_1,\ \lambda_2$ è:

$$\underline{b} = 2 \cdot (1, 2, 1) - 3 \cdot (-1, 0, 3)$$

# Esempio

Siano:

$$\underline{a}_1 = (1, 2, 1)\,,\ \underline{a}_2 = (-1, 0, 3)\,,$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3.$$

La combinazione lineare di $\underline{a}_1,\ \underline{a}_2$ mediante gli scalari $\lambda_1,\ \lambda_2$ è:

$$\underline{b} = 2 \cdot (1, 2, 1) - 3 \cdot (-1, 0, 3) = (2, 4, 2) + (3, 0, -9)$$

# Esempio

Siano:

$$\underline{a}_1 = (1, 2, 1)\,,\ \underline{a}_2 = (-1, 0, 3)\,,$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3.$$

La combinazione lineare di $\underline{a}_1,\ \underline{a}_2$ mediante gli scalari $\lambda_1,\ \lambda_2$ è:

$$\underline{b} = 2 \cdot (1, 2, 1) - 3 \cdot (-1, 0, 3) = (2, 4, 2) + (3, 0, -9) = (5, 4, -7).$$

# Vettori linearmente dipendenti

$k$ vettori

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in \mathcal{R}^n,$$

# Vettori linearmente dipendenti

$k$ vettori

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in \mathcal{R}^n,$$

si dicono **linearmente dipendenti** se esiste una loro combinazione lineare

# Vettori linearmente dipendenti

$k$ vettori

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in \mathcal{R}^n,$$

si dicono **linearmente dipendenti** se esiste una loro combinazione lineare che esprime il **vettore nullo** ottenuta mediante coefficienti non tutti nulli.

# Esempio

Verifichiamo se i vettori di $\mathcal{R}^4$:

$$\underline{a}_1 = (3, 6, -3, 9),\ \underline{a}_2 = (2, 4, -2, 6)$$

sono linearmente dipendenti.

# Esempio

Verifichiamo se i vettori di $\mathcal{R}^4$:

$$\underline{a}_1 = (3, 6, -3, 9),\ \underline{a}_2 = (2, 4, -2, 6)$$

sono linearmente dipendenti.
Osserviamo che:

$$-2\cdot(3, 6, -3, 9)+3\cdot(2, 4, -2, 6)$$

# Esempio

Verifichiamo se i vettori di $\mathcal{R}^4$:

$$\underline{a}_1 = (3, 6, -3, 9),\ \underline{a}_2 = (2, 4, -2, 6)$$

sono linearmente dipendenti.
Osserviamo che:

$$-2\cdot(3, 6, -3, 9)+3\cdot(2, 4, -2, 6) = (-6+6, -12+12, 6-6, 1-8) = (0, 0, 0, 0)$$

# Esempio

Verifichiamo se i vettori di $\mathcal{R}^4$:

$$\underline{a}_1 = (3, 6, -3, 9),\ \underline{a}_2 = (2, 4, -2, 6)$$

sono linearmente dipendenti.
Osserviamo che:

$$-2\cdot(3, 6, -3, 9)+3\cdot(2, 4, -2, 6) = (-6+6, -12+12, 6-6, 1-8) = (0, 0, 0, 0)$$

quindi $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$ sono linearmente dipendenti.

# Osservazione

Nell'esempio precedente abbiamo visto che:

$$-2 \cdot (3, 6, -3, 9) + 3 \cdot (2, 4, -2, 6) = (0, 0, 0, 0)$$

# Osservazione

Nell'esempio precedente abbiamo visto che:

$$-2 \cdot (3, 6, -3, 9) + 3 \cdot (2, 4, -2, 6) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Updownarrow$$

$$-2\underline{a}_1 + 3\underline{a}_2 = \underline{0}.$$

# Osservazione

Nell'esempio precedente abbiamo visto che:

$$-2 \cdot (3, 6, -3, 9) + 3 \cdot (2, 4, -2, 6) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Updownarrow$$

$$-2\underline{a}_1 + 3\underline{a}_2 = \underline{0}.$$

Segue:

$$\underline{a}_1 = \frac{3}{2}\,\underline{a}_2,$$

# Osservazione

Nell'esempio precedente abbiamo visto che:

$$-2 \cdot (3, 6, -3, 9) + 3 \cdot (2, 4, -2, 6) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Updownarrow$$

$$-2\underline{a}_1 + 3\underline{a}_2 = \underline{0}.$$

Segue:

$$\underline{a}_1 = \frac{3}{2}\,\underline{a}_2, \Leftrightarrow \underline{a}_2 = \frac{2}{3}\,\underline{a}_1\,.$$

# Osservazione

Nell'esempio precedente abbiamo visto che:

$$-2 \cdot (3, 6, -3, 9) + 3 \cdot (2, 4, -2, 6) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Updownarrow$$

$$-2\underline{a}_1 + 3\underline{a}_2 = \underline{0}.$$

Segue:

$$\underline{a}_1 = \frac{3}{2}\,\underline{a}_2, \Leftrightarrow \underline{a}_2 = \frac{2}{3}\,\underline{a}_1.$$

In generale, se $k$ vettori sono linearmente dipendenti allora **i vettori corrispondenti ai coefficienti non nulli della combinazione lineare si possono esprimere in funzione degli altri.**

# Vettori linearmente indipendenti

$k$ vettori

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in \mathcal{R}^n,$$

si dicono **linearmente indipendenti**

# Vettori linearmente indipendenti

$k$ vettori

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in \mathcal{R}^n,$$

si dicono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti

# Vettori linearmente indipendenti

$k$ vettori

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in \mathcal{R}^n,$$

si dicono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti

$$\Updownarrow$$

l'unica loro combinazione lineare che esprime il vettore nullo è quella ottenuta mediante coefficienti tutti nulli.

# Vettori linearmente indipendenti

$k$ vettori

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in \mathcal{R}^n,$$

si dicono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti

$$\Updownarrow$$

l'unica loro combinazione lineare che esprime il vettore nullo è quella ottenuta mediante coefficienti tutti nulli.

$$\lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 + \cdots + \lambda_k \cdot \underline{a}_k = \underline{0} \iff \lambda_i = 0, \forall\, i.$$

# Osservazioni

Se $k$ vettori di $\mathcal{R}^n$ sono linearmente indipendenti, allora nessuno di loro può essere espresso come combinazione lineare degli altri.

# Osservazioni

Se $k$ vettori di $\mathcal{R}^n$ sono linearmente indipendenti, allora nessuno di loro può essere espresso come combinazione lineare degli altri.

Assegnati $k$ vettori di $\mathcal{R}^n$, se $k > n$, allora i vettori sono necessariamente linearmente dipendenti.

# Determinante di una matrice

Ad ogni matrice **quadrata** A di ordine $n$ si può associare un numero, detto **determinante** di A,

# Determinante di una matrice

Ad ogni matrice **quadrata** A di ordine $n$ si può associare un numero, detto **determinante** di A, indicato con il simbolo $\det(A)$.

# Determinante di una matrice

Ad ogni matrice **quadrata** A di ordine $n$ si può associare un numero, detto **determinante** di A, indicato con il simbolo det(A).

Se $n = 1$, A=$[a_{11}]$, allora:

$$\det(\mathrm{A}) = a_{11};$$

# Determinante di una matrice

Ad ogni matrice **quadrata** A di ordine $n$ si può associare un numero, detto **determinante** di A, indicato con il simbolo det(A).

Se $n = 1$, A$=[a_{11}]$, allora:

$$\det(A) = a_{11};$$

Se $n > 1$:

# Determinante di una matrice

Ad ogni matrice **quadrata** A di ordine $n$ si può associare un numero, detto **determinante** di A, indicato con il simbolo det(A).

Se $n = 1$, A=$[a_{11}]$, allora:

$$\det(\mathrm{A}) = a_{11};$$

Se $n > 1$:

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \, (-1)^{1+j} \, \mathrm{A}_{1j}$$

# Determinante di una matrice

Ad ogni matrice **quadrata** A di ordine $n$ si può associare un numero, detto **determinante** di A, indicato con il simbolo det(A).
Se $n = 1$, A=$[a_{11}]$, allora:

$$\det(\mathrm{A}) = a_{11};$$

Se $n > 1$:

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \, (-1)^{1+j} \, \mathrm{A}_{1j}$$

dove $\mathrm{A}_{1j}$ è il determinante della sottomatrice di A ottenuta eliminando la I riga e la $j$-esima colonna dalla matrice A.

# Esempio

Consideriamo la matrice:

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Esempio

Consideriamo la matrice:

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

- $A_{11} =$

# Esempio

Consideriamo la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

- $A_{11} = 0;$

# Esempio

Consideriamo la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

- $A_{11} = 0;$
- $A_{12} =$

# Esempio

Consideriamo la matrice:

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

- $A_{11} = 0;$
- $A_{12} = -1.$

# Esempio

Consideriamo la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

- $A_{11} = 0;$
- $A_{12} = -1.$

Quindi:

$$\det(B) = a_{11}(-1)^{1+1}A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}A_{12} =$$

# Esempio

Consideriamo la matrice:

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

- $\mathrm{A}_{11} = 0;$
- $\mathrm{A}_{12} = -1.$

Quindi:

$$\det(\mathrm{B}) = a_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{A}_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\mathrm{A}_{12} = 1 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) = 3.$$

# Esempio

In generale, se $n = 2$:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

# Esempio

In generale, se $n = 2$:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si ha:

- $\mathrm{A}_{11} =$

# Esempio

In generale, se $n = 2$:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si ha:

- $\mathrm{A}_{11} = a_{22};$

# Esempio

In generale, se $n = 2$:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si ha:

- $\mathrm{A}_{11} = a_{22}$;
- $\mathrm{A}_{12} =$

# Esempio

In generale, se $n = 2$:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si ha:

- $\mathrm{A}_{11} = a_{22}$;
- $\mathrm{A}_{12} = a_{21}$.

# Esempio

In generale, se $n = 2$:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si ha:

- $\mathrm{A}_{11} = a_{22}$;
- $\mathrm{A}_{12} = a_{21}$.

Quindi:

$$\det(\mathrm{A}) = a_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{A}_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\mathrm{A}_{12} =$$

# Esempio

In generale, se $n = 2$:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si ha:

- $\mathrm{A}_{11} = a_{22}$;
- $\mathrm{A}_{12} = a_{21}$.

Quindi:

$$\det(\mathrm{A}) = a_{11}(-1)^{1+1}\mathrm{A}_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\mathrm{A}_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

# Esempio

Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Esempio

Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$A_{11} = \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

# Esempio

Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$A_{11} = \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4, \; A_{12} = \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

# Esempio

Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$A_{11} = \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4, \; A_{12} = \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -4, \; A_{13} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Esempio

Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$A_{11} = \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4, \; A_{12} = \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -4, \; A_{13} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}(-1)^{1+1}A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}A_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}A_{13} \\ &= \end{aligned}$$

# Esempio

Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$A_{11} = \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4,\ A_{12} = \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -4,\ A_{13} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}(-1)^{1+1}A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}A_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}A_{13} \\ &= 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (-4) \end{aligned}$$

# Esempio

Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$A_{11} = \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4, \; A_{12} = \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -4, \; A_{13} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}(-1)^{1+1}A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}A_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}A_{13} \\ &= 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (-4) = 4 + 12 - 20 = -4 \end{aligned}$$

# Proprietà del determinante

Data una matrice quadrata A:

# Proprietà del determinante

Data una matrice quadrata A:

1. Se B è ottenuta scambiando due righe (due colonne) di A, $\det(B) = -\det(A)$.

# Proprietà del determinante

Data una matrice quadrata A:

1. Se B è ottenuta scambiando due righe (due colonne) di A, $\det(B) = -\det(A)$.
2. Se B è ottenuta moltiplicando tutti gli elementi di una riga (colonna) di A per una costante $\lambda \in \mathcal{R}$, si ha: $\det(B) = \lambda \cdot \det(A)$.

# Proprietà del determinante

Data una matrice quadrata A:
1. Se B è ottenuta scambiando due righe (due colonne) di A, $\det(B) = -\det(A)$.
2. Se B è ottenuta moltiplicando tutti gli elementi di una riga (colonna) di A per una costante $\lambda \in \mathcal{R}$, si ha: $\det(B) = \lambda \cdot \det(A)$.
3. Se una riga (colonna) è combinazione lineare di altre righe (colonne), il determinante di A è nullo.

# Proprietà del determinante

Data una matrice quadrata A:

1. Se B è ottenuta scambiando due righe (due colonne) di A, $\det(B) = -\det(A)$.
2. Se B è ottenuta moltiplicando tutti gli elementi di una riga (colonna) di A per una costante $\lambda \in \mathcal{R}$, si ha: $\det(B) = \lambda \cdot \det(A)$.
3. Se una riga (colonna) è combinazione lineare di altre righe (colonne), il determinante di A è nullo. In particolare, se due righe (colonne) di A sono proporzionali, il determinante di A è nullo.

# Proprietà del determinante

Data una matrice quadrata A:

1. Se B è ottenuta scambiando due righe (due colonne) di A, $\det(B) = -\det(A)$.
2. Se B è ottenuta moltiplicando tutti gli elementi di una riga (colonna) di A per una costante $\lambda \in \mathcal{R}$, si ha: $\det(B) = \lambda \cdot \det(A)$.
3. Se una riga (colonna) è combinazione lineare di altre righe (colonne), il determinante di A è nullo. In particolare, se due righe (colonne) di A sono proporzionali, il determinante di A è nullo.
4. $\det(A^T) = \det(A)$.

# Proprietà del determinante

Data una matrice quadrata A:

1. Se B è ottenuta scambiando due righe (due colonne) di A, $\det(B) = -\det(A)$.

2. Se B è ottenuta moltiplicando tutti gli elementi di una riga (colonna) di A per una costante $\lambda \in \mathcal{R}$, si ha: $\det(B) = \lambda \cdot \det(A)$.

3. Se una riga (colonna) è combinazione lineare di altre righe (colonne), il determinante di A è nullo. In particolare, se due righe (colonne) di A sono proporzionali, il determinante di A è nullo.

4. $\det(A^T) = \det(A)$.

5. Se B è ottenuta sommando ad una riga (colonna) di A un'altra riga (colonna) di A, eventualmente moltiplicata per uno scalare.

# Proprietà del determinante

Data una matrice quadrata A:

1. Se B è ottenuta scambiando due righe (due colonne) di A, $\det(B) = -\det(A)$.
2. Se B è ottenuta moltiplicando tutti gli elementi di una riga (colonna) di A per una costante $\lambda \in \mathcal{R}$, si ha: $\det(B) = \lambda \cdot \det(A)$.
3. Se una riga (colonna) è combinazione lineare di altre righe (colonne), il determinante di A è nullo. In particolare, se due righe (colonne) di A sono proporzionali, il determinante di A è nullo.
4. $\det(A^T) = \det(A)$.
5. Se B è ottenuta sommando ad una riga (colonna) di A un'altra riga (colonna) di A, eventualmente moltiplicata per uno scalare. $\det(B) = \det(A)$.

# Determinante di matrici diagonali e triangolari

Se una matrice quadrata A è diagonale, triangolare superiore o triangolare inferiore, allora il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi diagonali.

# Determinante di matrici diagonali e triangolari

Se una matrice quadrata A è diagonale, triangolare superiore o triangolare inferiore, allora il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi diagonali.

Sia, ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

# Determinante di matrici diagonali e triangolari

Se una matrice quadrata A è diagonale, triangolare superiore o triangolare inferiore, allora il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi diagonali.

Sia, ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\det(\mathrm{A}) \; = \; 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

# Determinante di matrici diagonali e triangolari

Se una matrice quadrata A è diagonale, triangolare superiore o triangolare inferiore, allora il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi diagonali.

Sia, ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot (-3)) \end{aligned}$$

# Determinante di matrici diagonali e triangolari

Se una matrice quadrata A è diagonale, triangolare superiore o triangolare inferiore, allora il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi diagonali.

Sia, ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{A}) &= 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot (-3)) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \end{aligned}$$

# Minori di una matrice

Sia A una matrice di dimensione $m \times n$:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

# Minori di una matrice

Sia A una matrice di dimensione $m \times n$:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si dice **minore di** di A di ordine $k$ il determinante di una **sottomatrice quadrata di ordine** $k$ estratta da A.

# Minori di una matrice

Sia A una matrice di dimensione $m \times n$:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si dice **minore di** di A di ordine $k$ il determinante di una **sottomatrice quadrata di ordine** $k$ estratta da A.
L'ordine massimo dei minori di una matrice di dimensione $m \times n$ è $\min\{m, n\}$.

# Minori di una matrice

Sia A una matrice di dimensione $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si dice **minore di** di A di ordine $k$ il determinante di una **sottomatrice quadrata di ordine** $k$ estratta da A.

L'ordine massimo dei minori di una matrice di dimensione $m \times n$ è $\min\{m, n\}$.

Una matrice quadrata di ordine $n$ ha un unico minore di ordine $n$, dato dal suo determinante.

# Esempio

Calcoliamo i minori della matrice:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

# Esempio

Calcoliamo i minori della matrice:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice ha

- 6 minori di ordine 1:

# Esempio

Calcoliamo i minori della matrice:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice ha

- 6 minori di ordine 1:

$$\det(0) = 0,\ \det(8) = 8,\ \ldots,\ \det(3) = 3$$

# Esempio

Calcoliamo i minori della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice ha

- 6 minori di ordine 1:

$$\det(0) = 0, \ \det(8) = 8, \ \ldots, \ \det(3) = 3$$

- 3 minori di ordine 2:

# Esempio

Calcoliamo i minori della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice ha

- 6 minori di ordine 1:

$$\det(0) = 0,\ \det(8) = 8,\ \ldots,\ \det(3) = 3$$

- 3 minori di ordine 2:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = -8,$$

# Esempio

Calcoliamo i minori della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice ha

- 6 minori di ordine 1:

$$\det(0) = 0,\ \det(8) = 8,\ \ldots,\ \det(3) = 3$$

- 3 minori di ordine 2:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = -8,\ \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -2,$$

# Esempio

Calcoliamo i minori della matrice:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice ha

- 6 minori di ordine 1:

$$\det(0) = 0,\ \det(8) = 8,\ \ldots,\ \det(3) = 3$$

- 3 minori di ordine 2:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = -8,\ \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -2,\ \det\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

# Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

# Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice ha

- 9 minori di ordine 1:

$$\det(1) = 1,\ \det(2) = 2,\ \det(1) = 1,\ \ldots$$

# Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice ha

- 9 minori di ordine 1:

$$\det(1) = 1,\ \det(2) = 2,\ \det(1) = 1,\ \ldots$$

- 9 minori di ordine 2:

# Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice ha

- 9 minori di ordine 1:

$$\det(1) = 1, \ \det(2) = 2, \ \det(1) = 1, \ \ldots$$

- 9 minori di ordine 2:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -5,$$

# Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice ha

- 9 minori di ordine 1:

$$\det(1) = 1,\ \det(2) = 2,\ \det(1) = 1,\ \ldots$$

- 9 minori di ordine 2:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -5,\ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1,$$

# Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice ha

- 9 minori di ordine 1:

$$\det(1) = 1, \ \det(2) = 2, \ \det(1) = 1, \ \ldots$$

- 9 minori di ordine 2:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -5, \ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1, \ \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 7, \ \ldots$$

# Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice ha

- 9 minori di ordine 1:

$$\det(1) = 1, \ \det(2) = 2, \ \det(1) = 1, \ \ldots$$

- 9 minori di ordine 2:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -5, \ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1, \ \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 7, \ \ldots$$

- 1 minore di ordine 3: $\det(\mathsf{A}) = -5$

# Rango di una matrice

Sia A una matrice di dimensione $m \times n$.

# Rango di una matrice

Sia A una matrice di dimensione $m \times n$. Si dice **rango** o **caratteristica** di A r(A),

# Rango di una matrice

Sia A una matrice di dimensione $m \times n$. Si dice **rango** o **caratteristica** di A r(A), il massimo numero di vettori colonna (o riga) di A linearmente indipendenti.

# Rango di una matrice

Sia A una matrice di dimensione $m \times n$. Si dice **rango** o **caratteristica** di A r(A), il massimo numero di vettori colonna (o riga) di A linearmente indipendenti. **Esso corrisponde all'ordine massimo dei minori di** A **diversi da zero**.

# Rango di una matrice

Sia A una matrice di dimensione $m \times n$. Si dice **rango** o **caratteristica** di A r(A), il massimo numero di vettori colonna (o riga) di A linearmente indipendenti. **Esso corrisponde all'ordine massimo dei minori di** A **diversi da zero**.
Se r(A) $= k$:

1. esiste un minore di ordine $k$ diverso da zero;

# Rango di una matrice

Sia A una matrice di dimensione $m \times n$. Si dice **rango** o **caratteristica** di A r(A), il massimo numero di vettori colonna (o riga) di A linearmente indipendenti. **Esso corrisponde all'ordine massimo dei minori di** A **diversi da zero**.

Se r(A) $= k$:

1. esiste un minore di ordine $k$ diverso da zero;
2. ogni minore di A di ordine $k + 1$ è nullo.

# Esempio

Calcoliamo il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

# Esempio

Calcoliamo il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = 8,$$

# Esempio

Calcoliamo il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = 8,$$

quindi r(A)=3.

# Esempio

Calcoliamo il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

# Esempio

Calcoliamo il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = 0,$$

# Esempio

Calcoliamo il rango della matrice:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathrm{A}) = 0,$$

questo implica r(A)$< 3$.

# Esempio

Calcoliamo il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = 0,$$

questo implica r(A)$< 3$.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 4.$$

# Esempio

Calcoliamo il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = 0,$$

questo implica r(A)$< 3$.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 4.$$

Quindi r(A)=2.

# Esempio

Calcoliamo il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

# Esempio

Calcoliamo il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = -8,$$

# Esempio

Calcoliamo il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = -8,$$

quindi r(A)$= 2$.

# Osservazione

Per verificare se $k$ vettori sono linearmente indipendenti,

# Osservazione

Per verificare se $k$ vettori sono linearmente indipendenti, basta considerare la matrice formata dai vettori e controllare se la matrice ha rango $k$.

# Osservazione

Per verificare se $k$ vettori sono linearmente indipendenti, basta considerare la matrice formata dai vettori e controllare se la matrice ha rango $k$.

In particolare, $n$ vettori di $\mathcal{R}^n$ sono linearmente indipendenti se la matrice A di ordine $n$ formata da essi ha determinante diverso da zero.

# Esempio

Verifichiamo se i vettori:

$$\underline{a}_1 = (2 \;\; 2 \;\; 1), \;\; \underline{a}_2 = (1 \;\; 2 \;\; 3), \;\; \underline{a}_3 = (3 \;\; 2 \;\; 1),$$

sono linearmente indipendenti.

# Esempio

Verifichiamo se i vettori:

$$\underline{a}_1 = (2 \;\; 2 \;\; 1), \;\; \underline{a}_2 = (1 \;\; 2 \;\; 3), \;\; \underline{a}_3 = (3 \;\; 2 \;\; 1),$$

sono linearmente indipendenti.
Calcoliamo il rango della matrice:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Esempio

Verifichiamo se i vettori:

$$\underline{a}_1 = (2 \;\; 2 \;\; 1), \;\; \underline{a}_2 = (1 \;\; 2 \;\; 3), \;\; \underline{a}_3 = (3 \;\; 2 \;\; 1),$$

sono linearmente indipendenti.
Calcoliamo il rango della matrice:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathrm{A}) = 4,$$

# Esempio

Verifichiamo se i vettori:

$$\underline{a}_1 = (2 \;\; 2 \;\; 1), \;\; \underline{a}_2 = (1 \;\; 2 \;\; 3), \;\; \underline{a}_3 = (3 \;\; 2 \;\; 1),$$

sono linearmente indipendenti.
Calcoliamo il rango della matrice:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathrm{A}) = 4,$$

$$\Downarrow$$

r(A)=3

# Esempio

Verifichiamo se i vettori:

$$\underline{a}_1 = (2 \;\; 2 \;\; 1), \;\; \underline{a}_2 = (1 \;\; 2 \;\; 3), \;\; \underline{a}_3 = (3 \;\; 2 \;\; 1),$$

sono linearmente indipendenti.
Calcoliamo il rango della matrice:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathrm{A}) = 4,$$

$$\Downarrow$$

r(A)=3 $\Rightarrow$ i vettori sono linearmente indipendenti.

# Teorema di Rouchè-Capelli

Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è **compatibile**

# Teorema di Rouchè-Capelli

Il sistema A$\underline{x} = \underline{b}$ è **compatibile** $\Leftrightarrow r(A) = r(A_b)$.

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2$

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.
La matrice completa $A_b$ è di ordine $3$.

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.
La matrice completa $A_b$ è di ordine $3$.

$$det(A_b) = 2$$

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.
La matrice completa $A_b$ è di ordine $3$.

$$det(A_b) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$r(A_b) = 3$$

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.
La matrice completa $A_b$ è di ordine $3$.

$$det(A_b) = 2$$

$$\Downarrow$$

$r(A_b) = 3 \Rightarrow$ il sistema è **incompatibile**.

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{cases}$$

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.
La matrice completa $A_b$ è di ordine $3$.

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.
La matrice completa $A_b$ è di ordine $3$.

$$det(A_b) = 0$$

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.
La matrice completa $A_b$ è di ordine $3$.

$$det(A_b) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r(A_b) < 3$$

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.
La matrice completa $A_b$ è di ordine $3$.

$$det(A_b) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r(A_b) < 3$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.
La matrice completa $A_b$ è di ordine $3$.

$$det(A_b) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r(A_b) < 3$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\Downarrow$$

$$r(A) = r(A_b) = 2$$

# Esempio

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{cases}$$

La matrice A del sistema ha dimensione $3 \times 2 \Rightarrow r(A) \leq 2$.
La matrice completa $A_b$ è di ordine $3$.

$$det(A_b) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r(A_b) < 3$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\Downarrow$$

$r(A) = r(A_b) = 2 \Rightarrow$ il sistema è **compatibile**.