

# Funzioni di più variabili

# Funzioni di più variabili

Siano  $n > 1$  e  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ .

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Ad esempio

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow 3x - 2y \in \mathbb{R}$$

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow z \log(x + y) \in \mathbb{R}$$

# Funzioni di più variabili

Siano  $n > 1$  e  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ .

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Ad esempio

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow 3x - 2y \in \mathbb{R}$$

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow z \log(x + y) \in \mathbb{R}$$

# Funzioni di più variabili

Siano  $n > 1$  e  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ .

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Ad esempio

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow 3x - 2y \in \mathbb{R}$$

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow z \log(x + y) \in \mathbb{R}$$

# Diagramma di una funzione di più variabili

Se  $D \subseteq \mathbb{R}$ , il grafico di una funzione definita in  $D$  è l'insieme

$$G_r(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} = D \times f(D) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Se  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , il grafico di una funzione  $f$  definita in  $D$  è l'insieme

$$G_r(f) = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) : (x_1, \dots, x_n) \in D\} = D \times f(D) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

Se  $n > 2$  il diagramma di una funzione di più variabili non ammette una interpretazione geometrica.

# Diagramma di una funzione di più variabili

Se  $D \subseteq \mathbb{R}$ , il grafico di una funzione definita in  $D$  è l'insieme

$$G_r(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} = D \times f(D) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Se  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , il grafico di una funzione  $f$  definita in  $D$  è l'insieme

$$G_r(f) = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) : (x_1, \dots, x_n) \in D\} = D \times f(D) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

Se  $n > 2$  il diagramma di una funzione di più variabili non ammette una interpretazione geometrica.

# Diagramma di una funzione di più variabili

Se  $D \subseteq \mathbb{R}$ , il grafico di una funzione definita in  $D$  è l'insieme

$$G_r(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} = D \times f(D) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Se  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , il grafico di una funzione  $f$  definita in  $D$  è l'insieme

$$G_r(f) = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) : (x_1, \dots, x_n) \in D\} = D \times f(D) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

Se  $n > 2$  il diagramma di una funzione di più variabili non ammette una interpretazione geometrica.

# Grafico di una funzione di 2 variabili

Un dominio  $D$  di una funzione  $f$  di due variabili

$$f : (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$$

si rappresenta come una porzione di piano.

Per ogni punto  $P(x, y) \in D$  si individua il punto dello spazio di coordinate  $(x, y, f(x, y))$ .

Se  $n = 2$ , il grafico di  $f$  è un insieme di punti dello spazio  $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$  è una superficie nello spazio tridimensionale.

# Grafico di una funzione di 2 variabili

Un dominio  $D$  di una funzione  $f$  di due variabili

$$f : (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$$

si rappresenta come una porzione di piano.

Per ogni punto  $P(x, y) \in D$  si individua il punto dello spazio di coordinate  $(x, y, f(x, y))$ .

Se  $n = 2$ , il grafico di  $f$  è un insieme di punti dello spazio  $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$  è una superficie nello spazio tridimensionale.

# Grafico di una funzione di 2 variabili

Un dominio  $D$  di una funzione  $f$  di due variabili

$$f : (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$$

si rappresenta come una porzione di piano.

Per ogni punto  $P(x, y) \in D$  si individua il punto dello spazio di coordinate  $(x, y, f(x, y))$ .

Se  $n = 2$ , il grafico di  $f$  è un insieme di punti dello spazio  $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$   
è una superficie nello spazio tridimensionale.

# Grafico di una funzione di 2 variabili

Un dominio  $D$  di una funzione  $f$  di due variabili

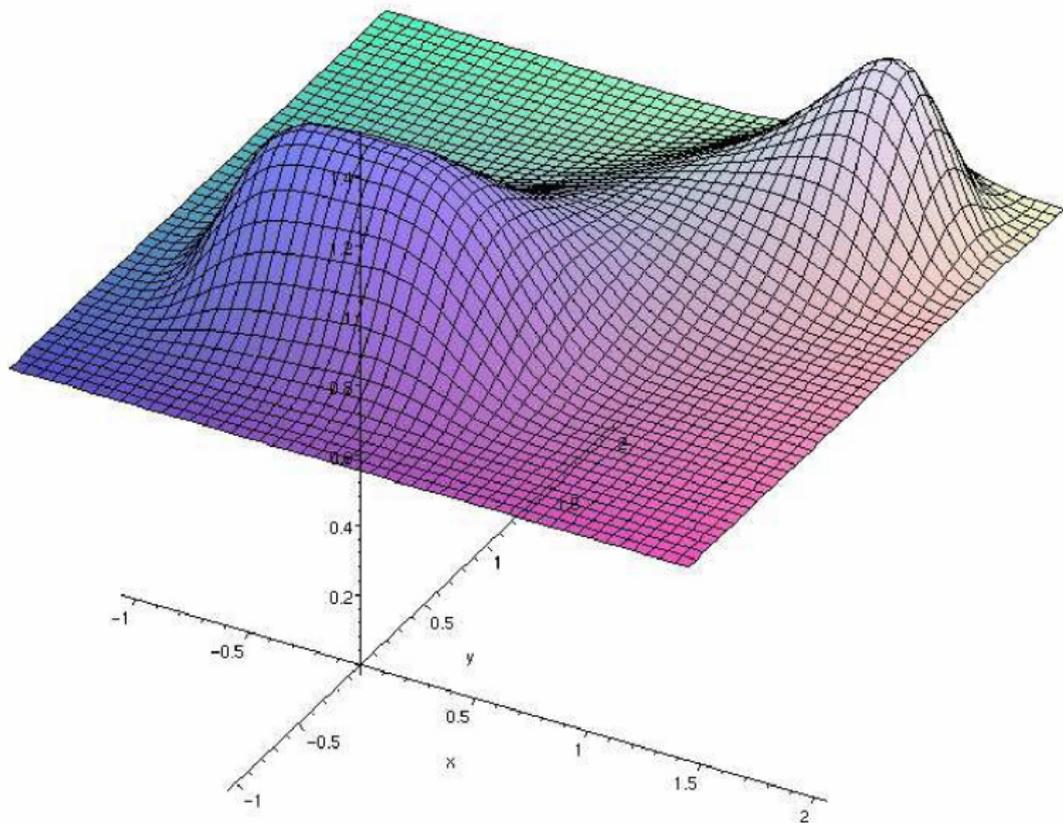
$$f : (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$$

si rappresenta come una porzione di piano.

Per ogni punto  $P(x, y) \in D$  si individua il punto dello spazio di coordinate  $(x, y, f(x, y))$ .

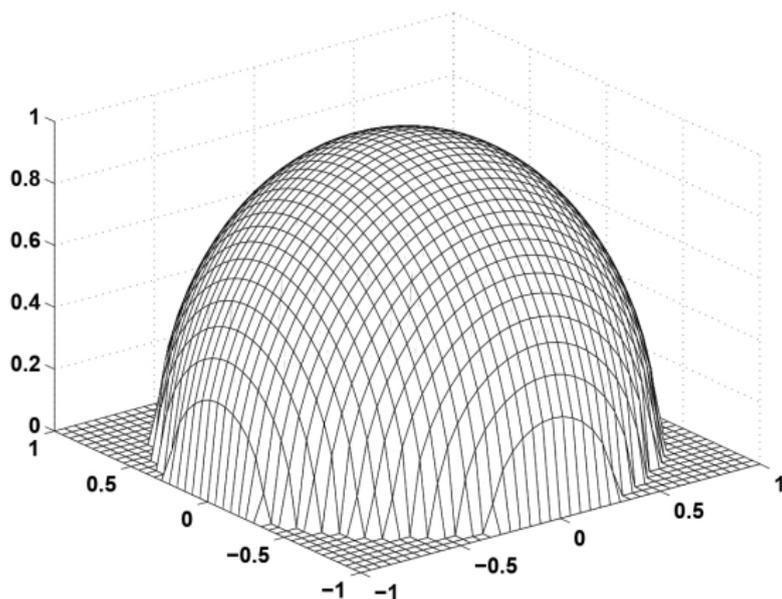
Se  $n = 2$ , il grafico di  $f$  è un insieme di punti dello spazio  $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$  è una superficie nello spazio tridimensionale.

# Esempio



$$f : (x, y) \in D \rightarrow \sqrt{1 - x^2 - y^2} \in \mathbb{R}^+$$

$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \Leftrightarrow$  cerchio di centro  $(0, 0)$  e raggio 1.



# Curve di livello di una funzione di 2 variabili

Sia  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si chiamano **curve o linee di livello di  $f$  le curve del dominio lungo le quali la funzione assume lo stesso valore.**

Fissato un valore  $k$ , le curve di livello  $k$  sono definite dalle soluzioni dell'equazione

$$f(x, y) = k.$$

# Curve di livello di una funzione di 2 variabili

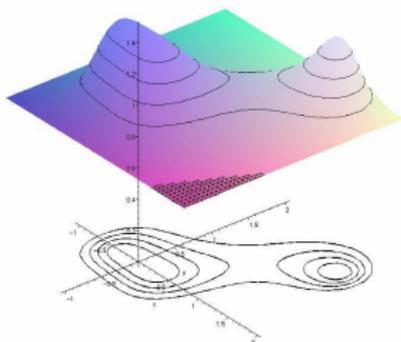
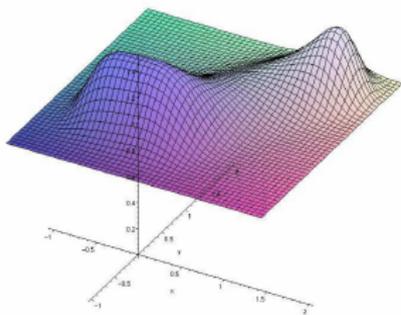
Sia  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si chiamano **curve o linee di livello di  $f$  le curve del dominio lungo le quali la funzione assume lo stesso valore.**

Fissato un valore  $k$ , le curve di livello  $k$  sono definite dalle soluzioni dell'equazione

$$f(x, y) = k.$$

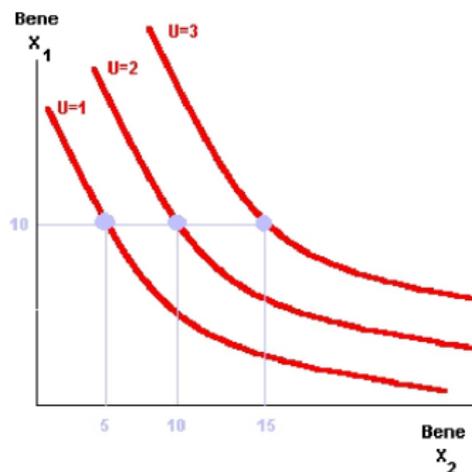
# Curve di livello per funzioni di 2 variabili

Graficamente, si ottengono intersecando il grafico della funzione con il piano di equazione  $z = k$  e proiettando tale intersezione sul piano  $xy$ .



# Curve di indifferenza

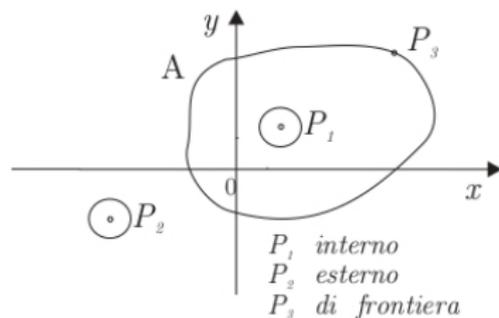
Sia  $U = U(x_1, x_2)$  una funzione che esprime l'utilità del consumatore rispetto al consumo di due beni.  
Le curve di livello rappresentano la combinazione di due beni (paniere) che realizzano lo stesso livello di utilità per il consumatore, sono pertanto nominate **curve di indifferenza**.



# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^2$

Sia  $A$  un insieme di punti del piano. Preso un punto  $P$  si definisce **intorno** di  $P$  un qualunque cerchio di centro  $P$ .

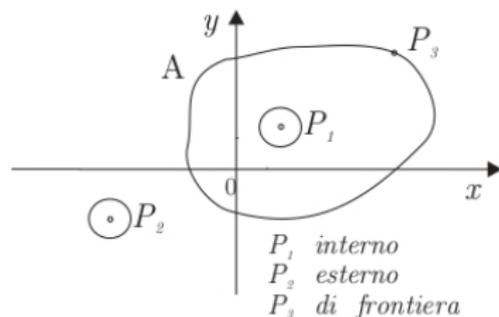
- $P$  è **interno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $A$ ;
- $P$  è **esterno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $\mathbb{R}^2 \setminus A$ ;
- $P$  è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di  $A$  l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$  è di **accumulazione** per  $A$  se per ogni intorno di  $P$  esiste almeno un punto di  $A$  diverso da  $P$  (un punto di  $A$  non di accumulazione si dice **isolato**).



# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^2$

Sia  $A$  un insieme di punti del piano. Preso un punto  $P$  si definisce **intorno** di  $P$  un qualunque cerchio di centro  $P$ .

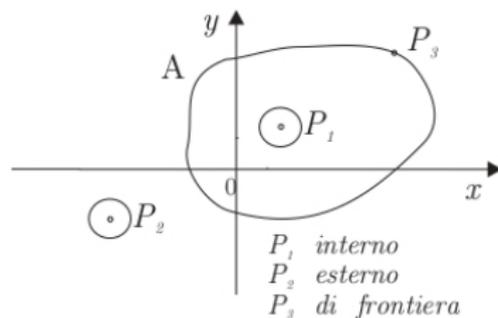
- $P$  è **interno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $A$ ;
- $P$  è **esterno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $\mathbb{R}^2 \setminus A$ ;
- $P$  è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di  $A$  l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$  è di **accumulazione** per  $A$  se per ogni intorno di  $P$  esiste almeno un punto di  $A$  diverso da  $P$  (un punto di  $A$  non di accumulazione si dice **isolato**).



# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^2$

Sia  $A$  un insieme di punti del piano. Preso un punto  $P$  si definisce **intorno** di  $P$  un qualunque cerchio di centro  $P$ .

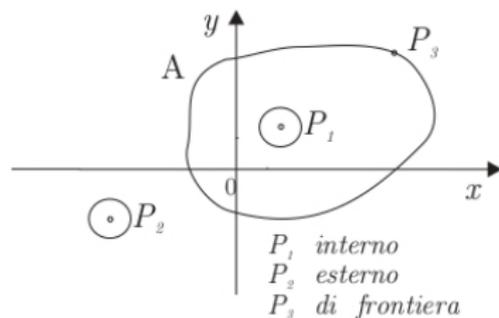
- $P$  è **interno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $A$ ;
- $P$  è **esterno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $\mathbb{R}^2 \setminus A$ ;
- $P$  è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di  $A$  l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$  è di **accumulazione** per  $A$  se per ogni intorno di  $P$  esiste almeno un punto di  $A$  diverso da  $P$  (un punto di  $A$  non di accumulazione si dice **isolato**).



# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^2$

Sia  $A$  un insieme di punti del piano. Preso un punto  $P$  si definisce **intorno** di  $P$  un qualunque cerchio di centro  $P$ .

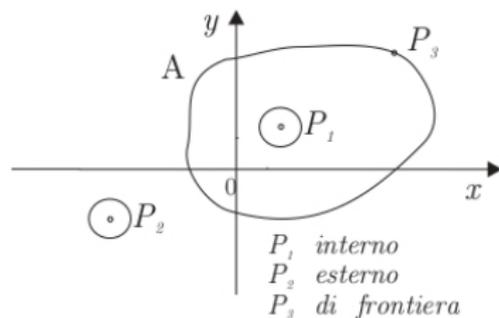
- $P$  è **interno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $A$ ;
- $P$  è **esterno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $\mathbb{R}^2 \setminus A$ ;
- $P$  è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di  $A$  l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$  è di **accumulazione** per  $A$  se per ogni intorno di  $P$  esiste almeno un punto di  $A$  diverso da  $P$  (un punto di  $A$  non di accumulazione si dice **isolato**).



# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^2$

Sia  $A$  un insieme di punti del piano. Preso un punto  $P$  si definisce **intorno** di  $P$  un qualunque cerchio di centro  $P$ .

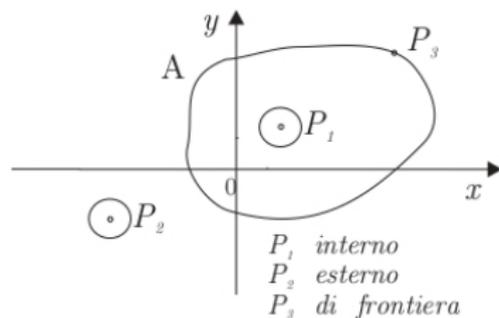
- $P$  è **interno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $A$ ;
- $P$  è **esterno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $\mathbb{R}^2 \setminus A$ ;
- $P$  è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di  $A$  l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$  è di **accumulazione** per  $A$  se per ogni intorno di  $P$  esiste almeno un punto di  $A$  diverso da  $P$  (un punto di  $A$  non di accumulazione si dice **isolato**).



# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^2$

Sia  $A$  un insieme di punti del piano. Preso un punto  $P$  si definisce **intorno** di  $P$  un qualunque cerchio di centro  $P$ .

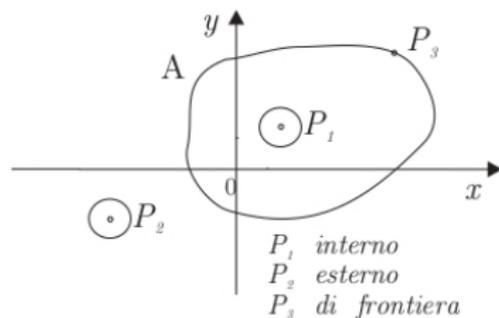
- $P$  è **interno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $A$ ;
- $P$  è **esterno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $\mathbb{R}^2 \setminus A$ ;
- $P$  è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di  $A$  l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$  è di **accumulazione** per  $A$  se per ogni intorno di  $P$  esiste almeno un punto di  $A$  diverso da  $P$  (un punto di  $A$  non di accumulazione si dice **isolato**).



# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^2$

Sia  $A$  un insieme di punti del piano. Preso un punto  $P$  si definisce **intorno** di  $P$  un qualunque cerchio di centro  $P$ .

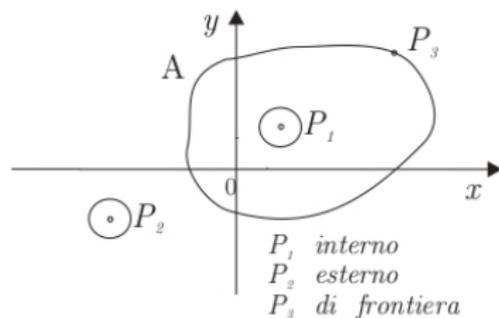
- $P$  è **interno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $A$ ;
- $P$  è **esterno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $\mathbb{R}^2 \setminus A$ ;
- $P$  è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di  $A$  l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$  è di **accumulazione** per  $A$  se per ogni intorno di  $P$  esiste almeno un punto di  $A$  diverso da  $P$  (un punto di  $A$  non di accumulazione si dice **isolato**).



# Elementi di topologia in $\mathbb{R}^2$

Sia  $A$  un insieme di punti del piano. Preso un punto  $P$  si definisce **intorno** di  $P$  un qualunque cerchio di centro  $P$ .

- $P$  è **interno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $A$ ;
- $P$  è **esterno** ad  $A$  se esiste un intorno di  $P$  contenuto in  $\mathbb{R}^2 \setminus A$ ;
- $P$  è di **frontiera** se non è né interno né esterno (si definisce **frontiera** di  $A$  l'insieme dei suoi punti di frontiera);
- $P$  è di **accumulazione** per  $A$  se per ogni intorno di  $P$  esiste almeno un punto di  $A$  diverso da  $P$  (un punto di  $A$  non di accumulazione si dice **isolato**).



Un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  si dice **aperto** se per ogni punto  $P$  di  $A$  esiste un intorno di  $P$  interamente contenuto  $A$ .

Un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  si dice **chiuso** se  $\mathbb{R}^2 \setminus A$  è aperto  
(Nota:  $A$  è chiuso se contiene la sua frontiera).

Un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  si dice **limitato** se esiste un cerchio di raggio finito che lo contiene.

Un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  si dice **aperto** se per ogni punto  $P$  di  $A$  esiste un intorno di  $P$  interamente contenuto  $A$ .

Un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  si dice **chiuso** se  $\mathbb{R}^2 \setminus A$  è aperto  
(Nota:  $A$  è chiuso se contiene la sua frontiera).

Un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  si dice **limitato** se esiste un cerchio di raggio finito che lo contiene.

Un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  si dice **aperto** se per ogni punto  $P$  di  $A$  esiste un intorno di  $P$  interamente contenuto  $A$ .

Un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  si dice **chiuso** se  $\mathbb{R}^2 \setminus A$  è aperto  
(Nota:  $A$  è chiuso se contiene la sua frontiera).

Un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  si dice **limitato** se esiste un cerchio di raggio finito che lo contiene.

# Limiti di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$ ,

si dice che  $f$  **tende a**  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  al tendere di  $(x, y)$  a  $(x_0, y_0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$$

se

$$\forall I \in I(\ell) \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c.}$$

$$\forall (x, y) \in (U \cap D) \setminus \{(x_0, y_0)\} \Rightarrow f(x, y) \in I.$$

# Limiti di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$ ,  
si dice che  $f$  **tende a**  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  al tendere di  $(x, y)$  a  $(x_0, y_0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$$

se

$$\forall I \in I(\ell) \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c.}$$

$$\forall (x, y) \in (U \cap D) \setminus \{(x_0, y_0)\} \Rightarrow f(x, y) \in I.$$

# Limiti di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$ ,  
si dice che  $f$  **tende a**  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  al tendere di  $(x, y)$  a  $(x_0, y_0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$$

se

$$\forall I \in I(\ell) \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c.}$$

$$\forall (x, y) \in (U \cap D) \setminus \{(x_0, y_0)\} \Rightarrow f(x, y) \in I.$$

# Limiti di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$ ,  
si dice che  $f$  **tende a**  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  al tendere di  $(x, y)$  a  $(x_0, y_0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$$

se

$$\forall I \in I(\ell) \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c.}$$

$$\forall (x, y) \in (U \cap D) \setminus \{(x_0, y_0)\} \Rightarrow f(x, y) \in I.$$

# Continuità di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  punto di  $D$ , si dice che  $f$  è **continua in**  $P_0$  se

$$\forall I \in I(f(x_0, y_0)) \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c. } f(U \cap D) \subseteq I.$$

$f$  è **continua in**  $P_0$  se e solo se è valida una delle due alternative

- 1  $(x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$  e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$

- 2  $(x_0, y_0)$  punto isolato per  $D$ .

Una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **continua in**  $D$  se è **continua in ogni punto di**  $D$ .

# Continuità di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  punto di  $D$ , si dice che  $f$  è **continua in**  $P_0$  se

$$\forall I \in I(f(x_0, y_0)) \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c. } f(U \cap D) \subseteq I.$$

$f$  è **continua in**  $P_0$  se e solo se è valida una delle due alternative

- 1  $(x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$  e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$

- 2  $(x_0, y_0)$  punto isolato per  $D$ .

Una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **continua in**  $D$  se è **continua in ogni punto di**  $D$ .

# Continuità di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  punto di  $D$ , si dice che  $f$  è **continua in**  $P_0$  se

$$\forall I \in I(f(x_0, y_0)) \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c. } f(U \cap D) \subseteq I.$$

$f$  è **continua in**  $P_0$  se e solo se è valida una delle due alternative

- 1  $(x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$  e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$

- 2  $(x_0, y_0)$  punto isolato per  $D$ .

Una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **continua in**  $D$  se è **continua in ogni punto di**  $D$ .

# Continuità di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  punto di  $D$ , si dice che  $f$  è **continua in**  $P_0$  se

$$\forall I \in I(f(x_0, y_0)) \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c. } f(U \cap D) \subseteq I.$$

$f$  è **continua in**  $P_0$  se e solo se è valida una delle due alternative

- 1  $(x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$  e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$

- 2  $(x_0, y_0)$  punto isolato per  $D$ .

Una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **continua in**  $D$  se è **continua in ogni punto di**  $D$ .

# Continuità di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  punto di  $D$ , si dice che  $f$  è **continua in**  $P_0$  se

$$\forall I \in I(f(x_0, y_0)) \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c. } f(U \cap D) \subseteq I.$$

$f$  è **continua in**  $P_0$  se e solo se è valida una delle due alternative

- 1  $(x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$  e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$

- 2  $(x_0, y_0)$  punto isolato per  $D$ .

Una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **continua in**  $D$  se è **continua in ogni punto di**  $D$ .

# Continuità di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  punto di  $D$ , si dice che  $f$  è **continua in**  $P_0$  se

$$\forall I \in I(f(x_0, y_0)) \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c. } f(U \cap D) \subseteq I.$$

$f$  è **continua in**  $P_0$  se e solo se è valida una delle due alternative

- 1  $(x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$  e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$

- 2  $(x_0, y_0)$  punto isolato per  $D$ .

Una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **continua in**  $D$  se è **continua in ogni punto di**  $D$ .

# Continuità di funzioni di 2 variabili

Dati una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  punto di  $D$ , si dice che  $f$  è **continua in**  $P_0$  se

$$\forall I \in I(f(x_0, y_0)) \exists U \in U((x_0, y_0)) \text{ t. c. } f(U \cap D) \subseteq I.$$

$f$  è **continua in**  $P_0$  se e solo se è valida una delle due alternative

- 1  $(x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $D$  e

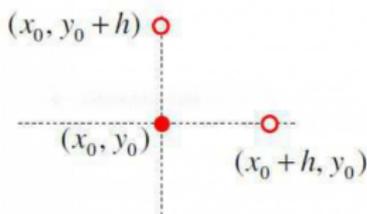
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$

- 2  $(x_0, y_0)$  punto isolato per  $D$ .

Una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **continua in**  $D$  se è **continua in ogni punto di**  $D$ .

# Derivate parziali delle funzioni di 2 variabili

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \equiv (x_0, y_0)$  un punto interno a  $D$ .



Si chiama **derivata parziale prima** della funzione  $f$  **rispetto alla variabile  $x$**  nel punto  $(x_0, y_0)$  e si indica con

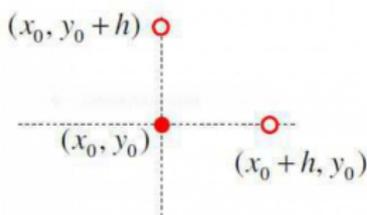
$$f_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

se esiste, il limite del rapporto incrementale rispetto a  $x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

# Derivate parziali delle funzioni di 2 variabili

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \equiv (x_0, y_0)$  un punto interno a  $D$ .



Si chiama **derivata parziale prima** della funzione  $f$  **rispetto alla variabile  $x$**  nel punto  $(x_0, y_0)$  e si indica con

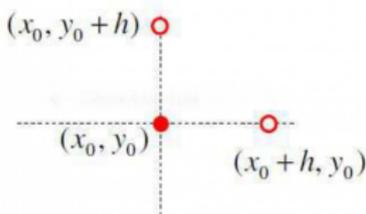
$$f_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

se esiste, il limite del rapporto incrementale rispetto a  $x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

# Derivate parziali delle funzioni di 2 variabili

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \equiv (x_0, y_0)$  un punto interno a  $D$ .



Si chiama **derivata parziale prima** della funzione  $f$  **rispetto alla variabile  $x$**  nel punto  $(x_0, y_0)$  e si indica con

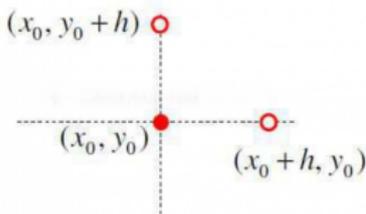
$$f_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

se esiste, il limite del rapporto incrementale rispetto a  $x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

# Derivate parziali delle funzioni di 2 variabili

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \equiv (x_0, y_0)$  un punto interno a  $D$ .



Si chiama **derivata parziale prima** della funzione  $f$  **rispetto alla variabile  $y$**  nel punto  $(x_0, y_0)$  e si indica con

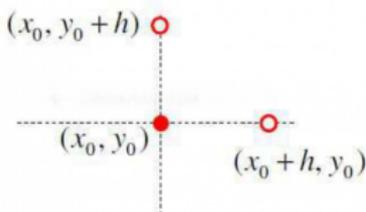
$$f_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

se esiste, il limite del rapporto incrementale rispetto a  $y$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

# Derivate parziali delle funzioni di 2 variabili

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \equiv (x_0, y_0)$  un punto interno a  $D$ .



Si chiama **derivata parziale prima** della funzione  $f$  **rispetto alla variabile  $y$**  nel punto  $(x_0, y_0)$  e si indica con

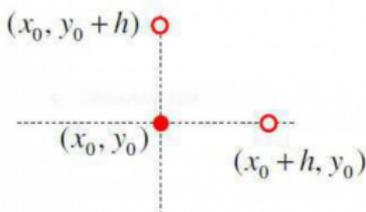
$$f_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

se esiste, il limite del rapporto incrementale rispetto a  $y$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

# Derivate parziali delle funzioni di 2 variabili

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \equiv (x_0, y_0)$  un punto interno a  $D$ .



Si chiama **derivata parziale prima** della funzione  $f$  **rispetto alla variabile  $y$**  nel punto  $(x_0, y_0)$  e si indica con

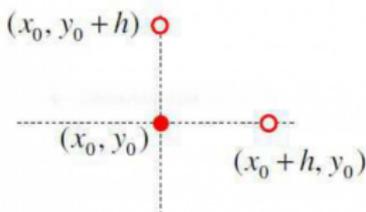
$$f_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

se esiste, il limite del rapporto incrementale rispetto a  $y$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

# Derivate parziali delle funzioni di 2 variabili

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \equiv (x_0, y_0)$  un punto interno a  $D$ .



Si chiama **derivata parziale prima** della funzione  $f$  **rispetto alla variabile  $y$**  nel punto  $(x_0, y_0)$  e si indica con

$$f_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

se esiste, il limite del rapporto incrementale rispetto a  $y$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = x^2 \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \sin y.$$

$$f(x, y) = x^2 + \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y.$$

Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = x^2 \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \sin y.$$

$$f(x, y) = x^2 + \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y.$$

Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = x^2 \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \operatorname{sen} y.$$

$$f(x, y) = x^2 + \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{sen} y.$$

Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = x^2 \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \sin y.$$

$$f(x, y) = x^2 + \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y.$$

Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = x^2 \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \operatorname{sen} y.$$

$$f(x, y) = x^2 + \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{sen} y.$$

Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = x^2 \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \operatorname{sen} y.$$

$$f(x, y) = x^2 + \cos y.$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{sen} y.$$

## Vettore gradiente

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  un punto interno a  $D$ .

Si definisce **vettore gradiente** nel punto  $P$  il vettore delle derivate parziali prime valutate nel punto  $P$

$$\nabla f(P) = (f_{x_1}(P), f_{x_2}(P), \dots, f_{x_n}(P)).$$

Un punto  $P$  di  $D$  che annulla il vettore gradiente (ovvero annulla tutte le derivate prime parziali) si dice **punto stazionario**. Un punto stazionario soddisfa **le condizioni del primo ordine**.

## Vettore gradiente

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  un punto interno a  $D$ .

Si definisce **vettore gradiente** nel punto  $P$  il vettore delle derivate parziali prime valutate nel punto  $P$

$$\nabla f(P) = (f_{x_1}(P), f_{x_2}(P), \dots, f_{x_n}(P)).$$

Un punto  $P$  di  $D$  che annulla il vettore gradiente (ovvero annulla tutte le derivate prime parziali) si dice **punto stazionario**. Un punto stazionario soddisfa **le condizioni del primo ordine**.

## Vettore gradiente

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  un punto interno a  $D$ .

Si definisce **vettore gradiente** nel punto  $P$  il vettore delle derivate parziali prime valutate nel punto  $P$

$$\nabla f(P) = (f_{x_1}(P), f_{x_2}(P), \dots, f_{x_n}(P)).$$

Un punto  $P$  di  $D$  che annulla il vettore gradiente (ovvero annulla tutte le derivate prime parziali) si dice **punto stazionario**. Un punto stazionario soddisfa **le condizioni del primo ordine**.

## Vettore gradiente

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  un punto interno a  $D$ .

Si definisce **vettore gradiente** nel punto  $P$  il vettore delle derivate parziali prime valutate nel punto  $P$

$$\nabla f(P) = (f_{x_1}(P), f_{x_2}(P), \dots, f_{x_n}(P)).$$

Un punto  $P$  di  $D$  che annulla il vettore gradiente (ovvero annulla tutte le derivate prime parziali) si dice **punto stazionario**. Un punto stazionario soddisfa **le condizioni del primo ordine**.

## Vettore gradiente

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  un punto interno a  $D$ .

Si definisce **vettore gradiente** nel punto  $P$  il vettore delle derivate parziali prime valutate nel punto  $P$

$$\nabla f(P) = (f_{x_1}(P), f_{x_2}(P), \dots, f_{x_n}(P)).$$

Un punto  $P$  di  $D$  che annulla il vettore gradiente (ovvero annulla tutte le derivate prime parziali) si dice **punto stazionario**. Un punto stazionario soddisfa **le condizioni del primo ordine**.

## Piano tangente

Siano  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ . Definiamo piano tangente alla superficie di equazione

$$z = f(x, y)$$

nel punto

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

il piano di equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

## Piano tangente

Siano  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ . Definiamo **piano tangente alla superficie di equazione**

$$z = f(x, y)$$

**nel punto**

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

**il piano di equazione**

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

## Piano tangente

Siano  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ . Definiamo **piano tangente alla superficie di equazione**

$$z = f(x, y)$$

**nel punto**

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

**il piano di equazione**

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

## Derivate seconde pure

Se

- 1  $f_x(x, y)$  è derivabile rispetto a  $x$ ;
- 2  $f_y(x, y)$  è derivabile rispetto a  $y$ ;

le loro derivate

$$f_{xx}(x, y) \circ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad f_{yy}(x, y) \circ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

si dicono **derivate parziali seconde pure**.

## Derivate seconde pure

Se

- 1  $f_x(x, y)$  è derivabile rispetto a  $x$ ;
- 2  $f_y(x, y)$  è derivabile rispetto a  $y$ ;

le loro derivate

$$f_{xx}(x, y) \circ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad f_{yy}(x, y) \circ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

si dicono **derivate parziali seconde pure**.

## Derivate seconde miste

Se

- 1  $f_x(x, y)$  è derivabile rispetto a  $y$ ;
- 2  $f_y(x, y)$  è derivabile rispetto a  $x$ ;

le loro derivate

$$f_{xy}(x, y) \circ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad f_{yx}(x, y) \circ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

si dicono **derivate parziali seconde miste**.

## Derivate seconde miste

Se

- 1  $f_x(x, y)$  è derivabile rispetto a  $y$ ;
- 2  $f_y(x, y)$  è derivabile rispetto a  $x$ ;

le loro derivate

$$f_{xy}(x, y) \circ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad f_{yx}(x, y) \circ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

si dicono **derivate parziali seconde miste**.

## Teorema di Schwarz

Sia  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . **Se**

- 1 esistono le derivate seconde  $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$ ;
- 2 la derivata mista è continua

**allora** esiste la derivata  $f_{yx}$  e

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione

$$f(x, y) = e^{-x} \log y.$$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \log y, & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \frac{1}{y}, \\ f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x} \log y, & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x} \frac{1}{y^2}, \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{-x} \frac{1}{y}, & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione

$$f(x, y) = e^{-x} \log y.$$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \log y, & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \frac{1}{y}, \\ f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x} \log y, & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x} \frac{1}{y^2}, \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{-x} \frac{1}{y}, & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione

$$f(x, y) = e^{-x} \log y.$$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \log y, & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \frac{1}{y}, \\ f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x} \log y, & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x} \frac{1}{y^2}, \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{-x} \frac{1}{y}, & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione

$$f(x, y) = e^{-x} \log y.$$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \log y, & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \frac{1}{y}, \\ f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x} \log y, & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x} \frac{1}{y^2}, \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{-x} \frac{1}{y}, & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione

$$f(x, y) = e^{-x} \log y.$$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \log y, & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \frac{1}{y}, \\ f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x} \log y, & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x} \frac{1}{y^2}, \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{-x} \frac{1}{y}, & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione

$$f(x, y) = e^{-x} \log y.$$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \log y, & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \frac{1}{y}, \\ f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x} \log y, & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x} \frac{1}{y^2}, \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{-x} \frac{1}{y}, & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione

$$f(x, y) = e^{-x} \log y.$$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \log y, & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \frac{1}{y}, \\ f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x} \log y, & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x} \frac{1}{y^2}, \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{-x} \frac{1}{y}, & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

# Massimi e minimi assoluti

Siano  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di massimo assoluto** se per ogni  $(x, y)$  in  $D$

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$  si dice **massimo assoluto**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di minimo assoluto** se per ogni  $(x, y)$  in  $D$

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$  si dice **minimo assoluto**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di estremo assoluto** o **punto estremale assoluto** se è un punto di massimo o di minimo assoluto.

# Massimi e minimi assoluti

Siano  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di massimo assoluto** se per ogni  $(x, y)$  in  $D$

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$  si dice **massimo assoluto**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di minimo assoluto** se per ogni  $(x, y)$  in  $D$

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$  si dice **minimo assoluto**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di estremo assoluto** o **punto estremale assoluto** se è un punto di massimo o di minimo assoluto.

# Massimi e minimi assoluti

Siano  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di massimo assoluto** se per ogni  $(x, y)$  in  $D$

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$  si dice **massimo assoluto**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di minimo assoluto** se per ogni  $(x, y)$  in  $D$

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$  si dice **minimo assoluto**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di estremo assoluto** o **punto estremale assoluto** se è un punto di massimo o di minimo assoluto.

# Massimi e minimi assoluti

Siano  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di massimo assoluto** se per ogni  $(x, y)$  in  $D$

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$  si dice **massimo assoluto**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di minimo assoluto** se per ogni  $(x, y)$  in  $D$

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y),$$

$f(x_0, y_0)$  si dice **minimo assoluto**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di estremo assoluto** o **punto estremale assoluto** se è un punto di massimo o di minimo assoluto.

# Massimi e minimi relativi

Siano  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di massimo relativo** se esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che per ogni  $(x, y)$  in  $D \cap U$   $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ .  $f(x_0, y_0)$  si dice **massimo relativo**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di minimo relativo** se esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che per ogni  $(x, y)$  in  $D \cap U$   $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ .  $f(x_0, y_0)$  si dice **minimo relativo**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di estremo relativo** o **punto estremale relativo** se è un punto di massimo o di minimo relativo.

# Massimi e minimi relativi

Siano  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di massimo relativo** se esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che per ogni  $(x, y)$  in  $D \cap U$   $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ .  $f(x_0, y_0)$  si dice **massimo relativo**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di minimo relativo** se esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che per ogni  $(x, y)$  in  $D \cap U$   $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ .  $f(x_0, y_0)$  si dice **minimo relativo**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di estremo relativo** o **punto estremale relativo** se è un punto di massimo o di minimo relativo.

# Massimi e minimi relativi

Siano  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di massimo relativo** se esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che per ogni  $(x, y)$  in  $D \cap U$   $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ .  $f(x_0, y_0)$  si dice **massimo relativo**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di minimo relativo** se esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che per ogni  $(x, y)$  in  $D \cap U$   $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ .  $f(x_0, y_0)$  si dice **minimo relativo**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di estremo relativo** o **punto estremale relativo** se è un punto di massimo o di minimo relativo.

# Massimi e minimi relativi

Siano  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di massimo relativo** se esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che per ogni  $(x, y)$  in  $D \cap U$   $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ .  $f(x_0, y_0)$  si dice **massimo relativo**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di minimo relativo** se esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che per ogni  $(x, y)$  in  $D \cap U$   $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ .  $f(x_0, y_0)$  si dice **minimo relativo**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di estremo relativo** o **punto estremale relativo** se è un punto di massimo o di minimo relativo.

# Massimi e minimi relativi

Siano  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di massimo relativo** se esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che per ogni  $(x, y)$  in  $D \cap U$   $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ .  $f(x_0, y_0)$  si dice **massimo relativo**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di minimo relativo** se esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che per ogni  $(x, y)$  in  $D \cap U$   $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ .  $f(x_0, y_0)$  si dice **minimo relativo**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di estremo relativo** o **punto estremale relativo** se è un punto di massimo o di minimo relativo.

# Massimi e minimi relativi

Siano  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di massimo relativo** se esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che per ogni  $(x, y)$  in  $D \cap U$   $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ .  $f(x_0, y_0)$  si dice **massimo relativo**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di minimo relativo** se esiste un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  tale che per ogni  $(x, y)$  in  $D \cap U$   $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ .  $f(x_0, y_0)$  si dice **minimo relativo**.

Un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  di  $D$  si dice **punto di estremo relativo** o **punto estremale relativo** se è un punto di massimo o di minimo relativo.

## Teorema di Fermat

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , e  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  un punto interno a  $D$ . Se  $P_0$  è un punto di massimo o di minimo relativo, allora le derivate parziali si annullano in  $P_0$ .

## Osservazione

Se  $P$  è punto interno al dominio, estremale relativo, allora deve essere stazionario.

## Teorema di Fermat

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , e  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  un punto interno a  $D$ . Se  $P_0$  è un punto di massimo o di minimo relativo, allora le derivate parziali si annullano in  $P_0$ .

## Osservazione

Se  $P$  è punto interno al dominio, estrema relativo, allora deve essere stazionario.

## Teorema di Fermat

Siano  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , e  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  un punto interno a  $D$ . Se  $P_0$  è un punto di massimo o di minimo relativo, allora le derivate parziali si annullano in  $P_0$ .

## Osservazione

Se  $P$  è punto interno al dominio, estremale relativo, allora deve essere stazionario.

# Esempio

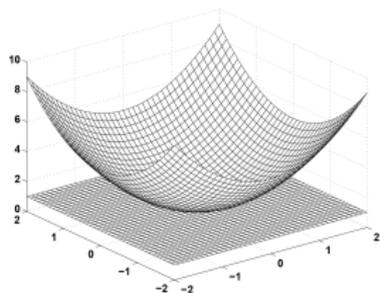
Consideriamo la funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ .

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y$$

Un punto di estremo relativo dovrà soddisfare il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unico possibile punto di massimo o di minimo è  $(0, 0)$ .



# Esempio

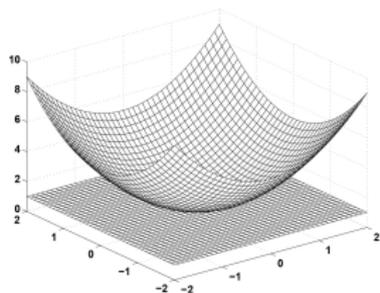
Consideriamo la funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ .

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y$$

Un punto di estremo relativo dovrà soddisfare il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unico possibile punto di massimo o di minimo è  $(0, 0)$ .



# Esempio

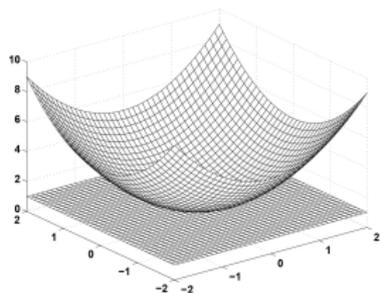
Consideriamo la funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ .

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y$$

Un punto di estremo relativo dovrà soddisfare il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unico possibile punto di massimo o di minimo è  $(0, 0)$ .



# Esempio

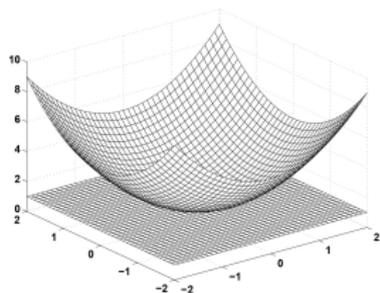
Consideriamo la funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ .

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y$$

Un punto di estremo relativo dovrà soddisfare il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unico possibile punto di massimo o di minimo è  $(0, 0)$ .



# Esempio

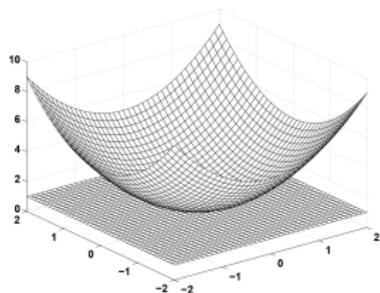
Consideriamo la funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ .

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y$$

Un punto di estremo relativo dovrà soddisfare il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unico possibile punto di massimo o di minimo è  $(0, 0)$ .



# Esempio

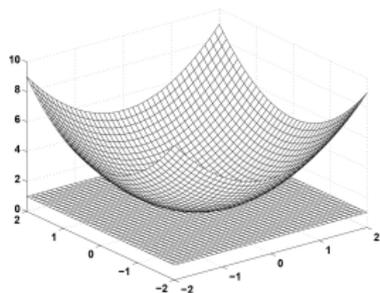
Consideriamo la funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ .

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y$$

Un punto di estremo relativo dovrà soddisfare il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unico possibile punto di massimo o di minimo è  $(0, 0)$ .



## Teorema di Weierstrass

Siano  $D$  un insieme chiuso e limitato di  $\mathbb{R}^2$  e  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua in  $D$ . Allora  $f$  ammette massimo e minimo in  $D$ .

## Teorema di Weierstrass

Siano  $D$  un insieme chiuso e limitato di  $\mathbb{R}^2$  e  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua in  $D$ . Allora  $f$  ammette massimo e minimo in  $D$ .

# Matrice Hessiana

Si definisce **matrice Hessiana** di una funzione  $f$  di 2 variabili la matrice delle derivate seconde

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Si definisce **Hessiano** di una funzione  $f$  il determinante della matrice Hessiana.

$$\det H_f(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y) \cdot f_{yx}(x, y).$$

# Matrice Hessiana

Si definisce **matrice Hessiana** di una funzione  $f$  di 2 variabili la matrice delle derivate seconde

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Si definisce **Hessiano** di una funzione  $f$  il determinante della matrice Hessiana.

$$\det H_f(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y) \cdot f_{yx}(x, y).$$

# Matrice Hessiana

Si definisce **matrice Hessiana** di una funzione  $f$  di 2 variabili la matrice delle derivate seconde

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Si definisce **Hessiano** di una funzione  $f$  il determinante della matrice Hessiana.

$$\det H_f(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y) \cdot f_{yx}(x, y).$$

## Teorema

Sia  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  un punto stazionario di  $f$  (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di  $f(x, y)$ ).

Valgono le seguenti implicazioni

- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di minimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di massimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di sella**.

## Teorema

Sia  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  un punto stazionario di  $f$  (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di  $f(x, y)$ ).

Valgono le seguenti implicazioni

- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di minimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di massimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di sella**.

## Teorema

Sia  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  un punto stazionario di  $f$  (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di  $f(x, y)$ ).

Valgono le seguenti implicazioni

- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di minimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di massimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di sella**.

## Teorema

Sia  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  un punto stazionario di  $f$  (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di  $f(x, y)$ ).

Valgono le seguenti implicazioni

- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di minimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di massimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di sella**.

## Teorema

Sia  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  un punto stazionario di  $f$  (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di  $f(x, y)$ ).

Valgono le seguenti implicazioni

- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di minimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di massimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di sella**.

## Teorema

Sia  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  un punto stazionario di  $f$  (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di  $f(x, y)$ ).

Valgono le seguenti implicazioni

- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di minimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di massimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di sella**.

## Teorema

Sia  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  un punto stazionario di  $f$  (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di  $f(x, y)$ ).

Valgono le seguenti implicazioni

- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di minimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di massimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di sella**.

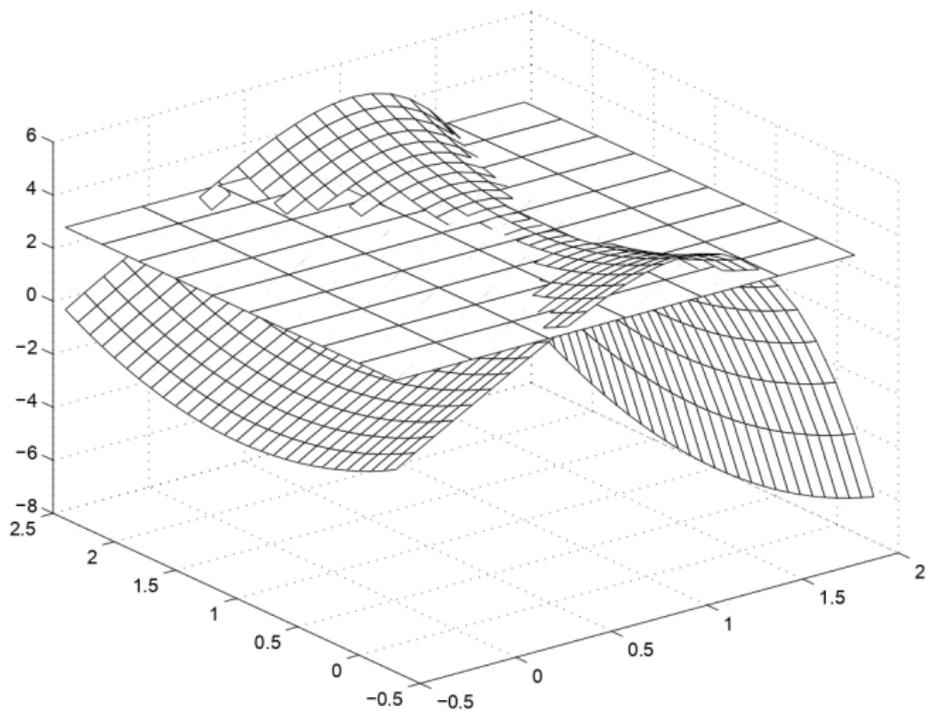
## Teorema

Sia  $P_0 \equiv (x_0, y_0)$  un punto stazionario di  $f$  (punto in cui si annullano le derivate parziali prime di  $f(x, y)$ ).

Valgono le seguenti implicazioni

- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di minimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di massimo relativo**;
- $\det H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P_0$  è un **punto di sella**.

# Esempio



Determinare i punti di estremo relativo della funzione

$$f(x, y) = -x^4 + y^2 + 4x - 2y + 1.$$

Le derivate parziali

$$f_x(x, y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x, y) = 2y - 2,$$

si annullano contemporaneamente in

$$P \equiv (1, 1).$$

Determinare i punti di estremo relativo della funzione

$$f(x, y) = -x^4 + y^2 + 4x - 2y + 1.$$

Le derivate parziali

$$f_x(x, y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x, y) = 2y - 2,$$

si annullano contemporaneamente in

$$P \equiv (1, 1).$$

$$f_x(x, y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x, y) = 2y - 2$$

Le derivate parziali seconde in  $P$ , valgono

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2 \Rightarrow f_{xx}(1, 1) = -12;$$

$$f_{xy}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(1, 1) = 0;$$

$$f_{yx}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(1, 1) = 0;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1, 1) = 2;$$

$\det H_f(1, 1) = -24 < 0 \Rightarrow$  la funzione ammette **un punto di sella** in  $P$ .

$$f_x(x, y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x, y) = 2y - 2$$

Le derivate parziali seconde in  $P$ , valgono

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2 \Rightarrow f_{xx}(1, 1) = -12;$$

$$f_{xy}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(1, 1) = 0;$$

$$f_{yx}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(1, 1) = 0;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1, 1) = 2;$$

$\det H_f(1, 1) = -24 < 0 \Rightarrow$  la funzione ammette **un punto di sella** in  $P$ .

$$f_x(x, y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x, y) = 2y - 2$$

Le derivate parziali seconde in  $P$ , valgono

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2 \Rightarrow f_{xx}(1, 1) = -12;$$

$$f_{xy}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(1, 1) = 0;$$

$$f_{yx}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(1, 1) = 0;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1, 1) = 2;$$

$\det H_f(1, 1) = -24 < 0 \Rightarrow$  la funzione ammette **un punto di sella** in  $P$ .

$$f_x(x, y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x, y) = 2y - 2$$

Le derivate parziali seconde in  $P$ , valgono

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2 \Rightarrow f_{xx}(1, 1) = -12;$$

$$f_{xy}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(1, 1) = 0;$$

$$f_{yx}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(1, 1) = 0;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1, 1) = 2;$$

$\det H_f(1, 1) = -24 < 0 \Rightarrow$  la funzione ammette **un punto di sella** in  $P$ .

$$f_x(x, y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x, y) = 2y - 2$$

Le derivate parziali seconde in  $P$ , valgono

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2 \Rightarrow f_{xx}(1, 1) = -12;$$

$$f_{xy}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(1, 1) = 0;$$

$$f_{yx}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(1, 1) = 0;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1, 1) = 2;$$

$\det H_f(1, 1) = -24 < 0 \Rightarrow$  la funzione ammette **un punto di sella** in  $P$ .

$$f_x(x, y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x, y) = 2y - 2$$

Le derivate parziali seconde in  $P$ , valgono

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2 \Rightarrow f_{xx}(1, 1) = -12;$$

$$f_{xy}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(1, 1) = 0;$$

$$f_{yx}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(1, 1) = 0;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1, 1) = 2;$$

$\det H_f(1, 1) = -24 < 0 \Rightarrow$  la funzione ammette un punto di sella in  $P$ .

$$f_x(x, y) = -4x^3 + 4, \quad f_y(x, y) = 2y - 2$$

Le derivate parziali seconde in  $P$ , valgono

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2 \Rightarrow f_{xx}(1, 1) = -12;$$

$$f_{xy}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{xy}(1, 1) = 0;$$

$$f_{yx}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{yx}(1, 1) = 0;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1, 1) = 2;$$

$\det H_f(1, 1) = -24 < 0 \Rightarrow$  la funzione ammette **un punto di sella** in  $P$ .

Determinare i punti di estremo relativo della funzione

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2.$$

Le derivate parziali

$$f_x(x, y) = 2x + y, \quad f_y(x, y) = 2y + x,$$

si annullano contemporaneamente nell'origine  $P = (0, 0)$ .

Determinare i punti di estremo relativo della funzione

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2.$$

Le derivate parziali

$$f_x(x, y) = 2x + y, \quad f_y(x, y) = 2y + x,$$

si annullano contemporaneamente nell'origine  $P = (0, 0)$ .

$$f_x(x, y) = 2x + y, \quad f_y(x, y) = 2y + x$$

Le derivate parziali seconde in  $P$ , valgono

$$f_{xx}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 2;$$

$$f_{xy}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 1;$$

$$f_{yx}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{yx}(0, 0) = 1;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 2;$$

$\det H_f(0, 0) = 3 > 0$  e  $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0 \Rightarrow P$  è un **punto di minimo relativo**.

$$f_x(x, y) = 2x + y, \quad f_y(x, y) = 2y + x$$

Le derivate parziali seconde in  $P$ , valgono

$$f_{xx}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 2;$$

$$f_{xy}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 1;$$

$$f_{yx}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{yx}(0, 0) = 1;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 2;$$

$\det H_f(0, 0) = 3 > 0$  e  $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0 \Rightarrow P$  è un punto di minimo relativo.

$$f_x(x, y) = 2x + y, \quad f_y(x, y) = 2y + x$$

Le derivate parziali seconde in  $P$ , valgono

$$f_{xx}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 2;$$

$$f_{xy}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 1;$$

$$f_{yx}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{yx}(0, 0) = 1;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 2;$$

$\det H_f(0, 0) = 3 > 0$  e  $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0 \Rightarrow P$  è un punto di minimo relativo.

$$f_x(x, y) = 2x + y, \quad f_y(x, y) = 2y + x$$

Le derivate parziali seconde in  $P$ , valgono

$$f_{xx}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 2;$$

$$f_{xy}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 1;$$

$$f_{yx}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{yx}(0, 0) = 1;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 2;$$

$\det H_f(0, 0) = 3 > 0$  e  $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0 \Rightarrow P$  è un punto di minimo relativo.

$$f_x(x, y) = 2x + y, \quad f_y(x, y) = 2y + x$$

Le derivate parziali seconde in  $P$ , valgono

$$f_{xx}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 2;$$

$$f_{xy}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 1;$$

$$f_{yx}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{yx}(0, 0) = 1;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 2;$$

$\det H_f(0, 0) = 3 > 0$  e  $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0 \Rightarrow P$  è un punto di minimo relativo.

$$f_x(x, y) = 2x + y, \quad f_y(x, y) = 2y + x$$

Le derivate parziali seconde in  $P$ , valgono

$$f_{xx}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 2;$$

$$f_{xy}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 1;$$

$$f_{yx}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{yx}(0, 0) = 1;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 2;$$

$\det H_f(0, 0) = 3 > 0$  e  $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0 \Rightarrow P$  è un punto di minimo relativo.

$$f_x(x, y) = 2x + y, \quad f_y(x, y) = 2y + x$$

Le derivate parziali seconde in  $P$ , valgono

$$f_{xx}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 2;$$

$$f_{xy}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 1;$$

$$f_{yx}(x, y) = 1 \Rightarrow f_{yx}(0, 0) = 1;$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 2;$$

$\det H_f(0, 0) = 3 > 0$  e  $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0 \Rightarrow P$  è un **punto di minimo relativo**.

# Esempio

