ESERCITAZIONE 11: derivate - 2 parte

ESERCIZIO 1. Utilizzando il teorema di De L'Hôpital oppure i polinomi di Taylor, calcolare i limiti:

1.a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$, 1.b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{x^2}$,

1.c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$, 1.d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^2 \tan x}$.

ESERCIZIO 2. Rispondere alle domande:

2.a) il polinomio di Taylor di grado 2 di $\sqrt[3]{1+x}$ in $x=0$ è $1 + x/3 - 2x^2/9$ ☐ V ☐ F

2.b) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + x/3 - x^2/9$ vicino a $x = 0$ ☐ V ☐ F

2.c) il polinomio di Taylor di grado 2 di $\sin(x^2)$ in $x = 0$ è

☐ x^2, ☐ $\dfrac{1}{2}x^2$, ☐ $x^2 + \dfrac{1}{2}x^4$, ☐ $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^6$.

ESERCIZIO 3.

- Dire se la funzione di legge $\sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$ verifica le ipotesi del Teorema di Rolle sull'intevallo $[-\pi, \pi]$ e determinarne l'immagine.
- Dire se la funzione di legge $\sqrt[3]{x^2(x-1)}$ verifica le ipotesi del Teorema di Rolle sull'intevallo $[0, 1]$ e determinarne l'immagine.

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione $f(x) = (x^2 - 1)\, e^x$.
Per ognuna delle seguenti affermazioni, stabilire se è vera o falsa:

4.a)	il dominio di $f(x)$ è $\mathbb{R}$	☐ V	☐ F
4.b)	per calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ si può applicare il Teorema di de L'Hôpital	☐ V	☐ F
4.c)	$f(x)$ ha un asintoto obliquo per $x \to -\infty$	☐ V	☐ F
4.d)	$y = 0$ è un asintoto orizzontale per $f(x)$	☐ V	☐ F
4.e)	$f(x)$ verifica le ipotesi del Teorema degli zeri nell'intervallo $[-1, 1]$	☐ V	☐ F
4.f)	$f(x)$ verifica le ipotesi del Teorema di Weiertstrass nell'intervallo $[-1, 1]$	☐ V	☐ F
4.g)	$f(x)$ verifica le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 1]$	☐ V	☐ F
4.h)	$f(x)$ è crescente	☐ V	☐ F
4.i)	$f(x)$ è decrescente sull'intervallo $(-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$	☐ V	☐ F
4.j)	$x = \sqrt{2} - 1$ è un punto stazionario	☐ V	☐ F
4.k)	$x = \sqrt{2} - 1$ è un punto di minimo relativo	☐ V	☐ F
4.l)	$x = \sqrt{2} - 1$ è un punto di minimo assoluto	☐ V	☐ F
4.m)	$f(x)$ è convessa	☐ V	☐ F
4.n)	$x = \sqrt{2} - 1$ è un punto di flesso	☐ V	☐ F
4.o)	$x = \sqrt{3} - 2$ è un punto di flesso	☐ V	☐ F

ESERCIZIO 5. Per ognuna delle seguenti funzioni, individuare un punto stazionario e classificarlo utilizzando la derivata seconda.

$$f(x) = x(e^x - 1), \qquad g(x) = x \log\left(\frac{1}{1+x}\right), \qquad h(x) = x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + 2.$$

ESERCIZIO 6. Per ognuna delle seguenti funzioni, studiare l'andamento qualitativo precisando:

I) il dominio, e gli eventuali punti di discontinuità o di prolungabilità
II) il comportamento alle estremità del dominio, rilevando la presenza di eventuali asintoti,
III) la derivata, classificando gli eventuali punti di non derivabilità,
IV) gli estremi locali e gli intervalli di monotonia,
V) gli estremi globali, rilevando gli eventuali massimi e minimi globali,
VI) l'immagine,
VII) la derivata seconda e gli intervalli di convessità, rilevando la presenza di eventuali flessi,
VIII) il grafico.

SUGGERIMENTO: nel caso di funzioni pari o dispari, si studi il comportamento sull'intervallo $[0, +\infty)$ e si deduca l'andamento sul resto del dominio.

6.a) $\dfrac{x}{4-x^2}$,

6.b) $\dfrac{x-1}{x}\, e^x$,

6.c) $x \log x$,

6.d) $\dfrac{x-3}{x^2-3x-10}$

6.e) $\arctan\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$

6.f) $x^2 \exp\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$

6.g) $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

6.h) $\begin{cases} \exp \dfrac{-1}{x^2-1} & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

ESERCIZIO 7. Studiare l'andamento qualitativo della funzione

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

e dedurne l'andamento qualitativo di $e^{f(x)}$, $\arcsin f(x)$.

SUGGERIMENTO: Utilizzare il fatto che $(g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ e $(g(f(x))'' = g''(f(x)) \cdot \big(f'(x)\big)^2 + g'(f(x)) \cdot f''(x)$.