DUR_ES1

Sia dato un coupon bond x di valore facciale C = 100 euro, maturity di 2 anni, cedole pagabili semestralmente al tasso nominale annuo i = 3%.

Con riferimento a una struttura dei tassi di interesse a pronti su base annua data da:

$i(0; 0,5) = 1,85\%$,

$i(0; 1) \quad = 2,35\%$,

$i(0; 1,5) = 2,85\%$,

$i(0; 2) \quad = 3,20\%$,

determinare la duration di Macaulay del titolo x.

DUR_ES2

Sia dato un bullet bond $x_1$ di valore facciale C=100 euro, maturity di 2 anni, cedole pagabili semestralmente al tasso nominale annuo i=4%.

Con riferimento a una struttura dei tassi di interesse a pronti su base annua data da:

i(0,0.5) =1.80%,

i(0,1) =2.25%,

i(0,1.5) =3.15%,

i(0,2) =3.70%,

determinare la duration di Macaulay del titolo $x_1$.

Indicato quindi con x il portafoglio composto da una quota $\alpha_1$=1 del titolo $x_1$ e da una quota $\alpha_2$ di uno zero coupon bond $x_2$ che paga 100 euro in t=1.5 anni, determinare $\alpha_2$ in modo che D(0,x)=1.9 anni.

DUR_ES3

Sia dato il titolo $x_1$ che paga un flusso di importi {12,12,12,112} ai tempi t={0.5,1,1.5,2}.
Con riferimento ad una struttura dei tassi a pronti data da

$i(0, 0.5) = 11.25\%$

$i(0, 1) = 11.50\%$

$i(0, 1.5) = 12.05\%$

$i(0, 2) = 12.7\%$,

determinare la duration del titolo $x_1$. Indicato con x il portafoglio composto da una quota $\alpha_1$ del titolo x1 e da una quota $\alpha_2 = 3$ di uno zero coupon bond $x_2$ che paga 100 euro in t = 0.5, determinare $\alpha 1$ in modo che $D(0,x)= 1$.

DUR_ES4

Sia dato un flusso di pagamenti

- z/t= {100,100,100,100}/{1,2,3,4}, dove il tempo è misurato in anni.

Consideriamo un dato mercato dei capitali e supponiamo che la struttura dei tassi di mercato sia, relativamente ai primi quattro anni

- $i(0, 1) = 11.1\%$, $i(0, 2) = 11.3\%$, $i(0, 3) = 11.5\%$, $i(0, 4) = 11.7\%$.

Calcolare il valore attuale e la duration del flusso z rispetto alla struttura del mercato.

Supponiamo inoltre che sul mercato siano disponibili due titoli x e y con valore attuale e duration, calcolati rispetto alla struttura data, rispettivamente

- $W(0,x) = 98$ euro e $D(0;x) = 1$
- $W(0,y) = 102$ euro e $D(0,y) = 3$ anni.

Costruire un portafoglio $\alpha x + \beta y$ con stesso valore attuale e stessa duration del flusso z.

DUR_ES5

Sia dato un titolo a cedola nulla di valore x con vita a scadenza di tre mesi. Si consideri una struttura di interesse caratterizzata da una funzione d’intensità istantanea costante $\delta = 0.06$ anni$^{-1}$. Si determini rispetto a tale struttura la semielasticità rispetto a $\delta$.

DUR_ES6

Sia dato un flusso di pagamenti z={50,100,50,100} relativo allo scadenzario t={1,2,3,4} anni. Si supponga che la struttura di mercato in vigore nell'istante di tempo t=0 sia:

$i(0, 1) = 1.80\%$,

$i(0, 2) = 2.25\%$,

$i(0, 3) = 3.15\%$,

$i(0, 4) = 3.70\%$.

Calcolare il valore attuale e la duration in 0 del titolo z.

Si supponga che sul mercato siano disponibili due titoli x e y con valore attuale e duration, calcolati in riferimento alla struttura data, uguali a V(0;x)=97 euro, D(0;x)=1 anno e V(0;y)=105 euro, D(0;y)=2.5 anni. Costruire un portafoglio con stesso valore attuale e duration del flusso z.

DUR_ES7

Sia dato un titolo a cedola fissa di valore nominale C=100 euro, cedola semestrale del 3.5% nominale annuo e vita a scadenza di 2 anni.

Si consideri una struttura di valutazione piatta, di intensità istantanea di interesse $\delta$=0.038 anni$^{-1}$, calcolare:

(a) il valore attuale V e la durata media finanziaria D,

(b) la semielasticità $S_\delta$ rispetto a $\delta$,

(c) la semielasticità $S_i$ rispetto a i.

DUR_ES8

Sia data una operazione finanziaria $x_1/t$ con $x_1 = \{12.5, 10, 12.5, 235\}$, $t = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$, dove il tempo è misurato in anni. Calcolarne la duration rispetto ad una struttura dei tassi a pronti su base annua data da

$i(0, 0.5) = 11.10\%$, $i(0, 1) = 11.30\%$, $i(0, 1.5) = 11.50\%$, $i(0, 2) = 11.70\%$.

Indicato poi con $x$ il portafoglio costituito da una quota $\alpha = 1$ del titolo $x_1$ e da una quota $\beta$ di uno z.c.b. che paga 100 euro in $t = 0.5$, determinare $\beta$ in modo che $D(0, x) = 1$ .

DUR_ES9

Sia dato un bullet bond x di valore nominale 100 euro, maturity 7 anni, cedola annuale e quotato alla pari.

Calcolare il valore attuale e la duration del titolo rispetto alla struttura piatta dei tassi di interesse determinata dal T.I.R. di x, sapendo che questo è uguale a 12.73%.

DUR_ES10

Un portafoglio obbligazionario è formato da:

a) BTP con valore di mercato 10 milioni di euro e duration 8 anni e mezzo;

b) rendite perpetue con rata annuale per un valore attuale di 6 milioni di euro;

c) BOT a 3 mesi per un valore di rimborso di 5 mln di euro.

Assumendo che la struttura per scadenza dei tassi sia piatta al tasso annuo i = 4%, si calcoli il valore V e la duration D del portafoglio.

Il portafoglio viene poi ribilanciato nel seguente modo: tutti i titoli di Stato Italiani vengono venduti a al loro posto viene acquistato un valore pari a V' (incognito) titoli di Stato a cedola nulla Tedeschi a 2 anni, in modo tale che la duration complessiva del nuovo portafoglio sia di 10 anni. Si calcoli il valore V 0 necessario a tale scopo.

$V_{BTP} = 10 \text{ mln} \qquad D_{BTP} = 8{,}5$

$V_2 = 6 \text{ mln} \qquad D_2 = \dfrac{1{,}04}{0{,}04} = 26$

$V_{BOT} = 4951213{,}68 \qquad D_{BOT} = 0{,}25$

$V_p = 10 \text{ mln} + 6 \text{ mln} + 4951213{,}68 = 20951213{,}68$

$$D = D_{BTP}\frac{V_{BTP}}{V_p} + D_2 \frac{V_2}{V_p} + D_{BOT}\frac{V_{BOT}}{V_p} = 11{,}562$$

$$10 = 26 \, \frac{6\,mln}{V_p} + 2 \, \frac{V'}{V_p}$$

$$V_p = 6\,mln + V'$$

$$10 = 26 \, \frac{6\,mln}{6\,mln + V'} + 2 \, \frac{V'}{6\,mln + V'}$$

$$10(6\,mln + V') = 26 \cdot 6\,mln + 2V'$$

$$V'(10 - 2) = 6\,mln\,(26 - 10)$$

$$8V' = 6\,mln \; 16 \qquad V' = \frac{6\,mln \; 16}{8} = 12\,mln$$

DUR_ES11

Una famiglia deve gestire un patrimonio di 50 000 euro e lo investe interamente in BTP con maturità di 5 anni e tasso nominale annuo del 5.5%. Assumendo che sul mercato viga una struttura per scadenza piatta al tasso i = 6%, si calcoli la duration del portafoglio, esprimendola in anni.

Un consulente convince la famiglia ad abbassare il rischio dell'investimento, disinvestendo parte dei BTP (per un valore di mercato complessivo V) e acquistando con il ricavato BOT a 3 mesi, in maniera da ottenere una duration del portafoglio di 1 anno. Si calcoli il valore V necessario a tale scopo.

$i_{1/2} = 1,06^{0,5} - 1 = 2,9563\%$ $\quad I = 2,75$

$V(0,I) = 2,75\, a_{\overline{10}|2,9563\%} = 2,75 \dfrac{1 - 1,029563^{-10}}{0,029563} = 23,51$

$V(0,100) = 100\,(1+0,06)^{-5} = 74,73$

$V_{BTP} = 23,51 + 74,73 = 98,24$

$$D_{BTP} = D_I \frac{V(0,I)}{V_p} + 5\,\frac{74,73}{V_p} =$$

$$= D_I \frac{23,51}{98,24} + 5\,\frac{74,73}{96,24} = 2,63\,\frac{23,51}{98,24} + 5\,\frac{74,73}{98,24}$$

$$4,433$$

$$D_I = \frac{1+i_{1/2}}{i_{1/2}} - \frac{m}{\left(1+i_{1/2}\right)^{m}-1} = \frac{1,02963}{0,02963} - \frac{10}{1,02963^{10}-1}$$

$$= 5,26 \rightarrow 2,63$$

$$D_p = D_{BTP} \frac{V_{BTP}}{V_p} + D_{BOT} \frac{V_{BOT}}{V_p}$$

$$D_{BTP} = 4{,}433 \qquad D_{BOT} = 0{,}25 \qquad V_p = 50000$$

$$D_p = 1 \qquad V_{BOT} = V \qquad V_{BTP} = 50000 - V$$

$$1 = 4{,}433 \frac{50000 - V}{50000} + 0{,}25 \frac{V}{50000}$$

$$50000 = 4{,}433 \left(50000 - V\right) + 0{,}25\, V$$

$$V \left(4{,}433 - 0{,}25\right) = 50000 \left(4{,}433 - 1\right)$$

$$V = \frac{50000 \quad 3{,}433}{4{,}433 - 0{,}25}$$

DUR_ES11

In un mercato in cui la struttura per scadenza è piatta al tasso annuo i = 4.36%, un investitore detiene un portafoglio del valore complessivo di 38 mln di euro, formato per il 60% del valore da rendite perpetue a rata annuale costante e per il resto da BOT a 6 mesi. Si calcoli la duration del portafoglio.

L'investitore decide poi di acquistare titoli a cedola nulla con maturità T da decidere, per un valore complessivo di 200 mln di euro. Si calcoli la maturità che deve essere fissata affinché il portafoglio complessivo dell'investitore abbia una duration di 4 anni.

$$D_R = \frac{1+i}{i} = \frac{1{,}0436}{0{,}0436}$$

$$D_P = \underbrace{0{,}6}_{\text{peso rendite}} \cdot \underbrace{\frac{1{,}0436}{0{,}0436}}_{\text{duration rendite}} + \underbrace{0{,}4}_{\text{peso BOT}} \cdot \underbrace{0{,}5}_{\text{Duration BOT}}$$

$$V_P = 200 \text{ mln}$$

$$p_1 = \frac{60\% \; 38 \text{ mln}}{200 \text{ mln}} = 11,4\% \qquad p_2 = \frac{40\% \; 38 \text{ mln}}{200 \text{ mln}} = 7,6\%$$

$$p_3 = \frac{(200 - 38) \text{ mln}}{200 \text{ mln}} = 81\%$$

$$4 = \frac{1,0436}{0,0436} \, 11,4\% + 0,5 \cdot 7,6\% + T \, 81\%$$

$$T = \frac{4 - \frac{1,0436}{0,0436} \, 0,114 - 0,5 \; 0,076}{0,81} = 1,5226$$

DUR_ES12

La Ducktown University ha debito che consiste in una rendita trentennale con rata mensile di 1 000$. Si calcoli anzitutto il valore V e la duration D (in anni) del debito, sapendo che la struttura per scadenza dei tassi di interesse è piatta, con tasso annuo i=6%. Il direttore amministrativo vuole dimezzare la duration del debito, acquistando titoli per un importo V'. Può scegliere tra titoli a cedola nulla a un anno, titoli a cedola nulla a due anni e titoli a cedola nulla trentennali. Determinare per ciascuna dei tre TCN se è adatto allo scopo, tra quelli adatti, quale sia quello che gli fa spendere di meno e l'importo da spendere nel caso di acquisto di titoli del TCN scelto.

$$i_{1/12} = (1+0{,}06)^{1/12} - 1 = 0{,}4868\%$$

$$V_2 = 1000\, a_{\overline{360}|i_{1/12}} = 169\,662{,}67\ €$$

$$D_2 = \frac{1+i_{1/12}}{i_{1/12}} - \frac{m}{(1+i_{1/12})^m - 1} = 130{,}54 \text{ mesi}$$

$$D_a = 10{,}8787$$

$$\frac{10{,}8787}{2} = 10{,}8787 \frac{169662{,}67}{169662{,}67+V'} + \frac{1}{2} \frac{V'}{169662{,}67+V'}$$

$$\frac{10{,}8787}{2}\left(169662{,}67+V'\right) = 10{,}8787 \; 169662{,}67 + \frac{1}{2} V'$$

$$V'\left(\frac{10{,}8787}{2} - \frac{1}{2}\right) = 10{,}8787 \cdot 169662{,}67 \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$V' = \frac{10{,}8787 \cdot 169662{,}67 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{10{,}8787}{2} - (1 \circ 2)}$$

Sia X un titolo con prezzo $P = 120{,}35$ e duration 3,21. Oggi il tasso di rendimento è $i = 3{,}4\%$, ma si prevede una variazione che porterà il tasso a 3,21%. Calcolare approssimativamente il nuovo prezzo del titolo

$$\Delta i = 0{,}0321 - 0{,}034 = -0{,}0019$$

$$\frac{V'}{V} = -\frac{D}{1+i} \qquad \frac{\Delta V}{V \Delta i} = -\frac{D}{1+i}$$

$$\Delta V = -\frac{D}{1+i} \cdot V \cdot \Delta i = -\frac{3{,}21}{1{,}034} \, 120{,}35 \left(-0{,}0019\right) =$$

$$0{,}7099 \qquad P' = 120{,}35 + 0{,}7099 = 121{,}06$$

ESERCIZIO

Calcolare valore e duration del portafoglio

- 10 quote di un titolo con prezzo 95 e dur 3,2
- 7 quote di un titolo $P_2 = 101$ $D_2 = 4.3$
- 5 quote di un titolo $P_3 = 99$ $D_3 = 2$

$$p_1 = \frac{\alpha_1 P_1}{P} = \frac{10 \cdot 95}{2152} = 0{,}4414$$

$$P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 10 \cdot 95 + 7 \cdot 101 + 5 \cdot 99 =$$

$\boxed{2152}$ prezzo del portafogio

$$p_2 = \frac{7 \cdot 101}{2152} = 0,3286$$

$$p_1 = 0,4414$$

$$p_3 = \frac{5 \cdot 99}{2152} = 0,23$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 = 100\%$$

$$D_p = D_1 p_1 + D_2 p_2 + D_3 p_3 =$$

$$= 3,2 \cdot 0,4414 + 4,3 \cdot 0,3286 + 2 \cdot 0,23 = 3,2855$$

# ESERCIZIO

30% $\to D_1 = 3$

50% $\to D_2 = 4$

20% $\to D_3 = 8$

$W = 100$ €

$i = 9\%$

come varia il valore del portafoglio se il tasso corrente si oppone di un 1%

$$\frac{V'}{V} = -\frac{D}{1+i} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V \Delta i} = -\frac{D}{1+i}$$