

Infiniti e infinitesimi

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

oppure, equivalentemente

- x_0 punto di accumulazione per X **al finito**;
- x_0 punto di accumulazione per X **all'infinito**.

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

oppure, equivalentemente

- x_0 punto di accumulazione per X *al finito*;
- x_0 punto di accumulazione per X *all'infinito*.

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

oppure, equivalentemente

- x_0 punto di accumulazione per X **al finito**;
- x_0 punto di accumulazione per X **all'infinito**.

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

oppure, equivalentemente

- x_0 punto di accumulazione per X **al finito**;
- x_0 punto di accumulazione per X **all'infinito**.

Definizione

La funzione $f(x)$ si dice ***infinito*** in x_0 se risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$$

Definizione

La funzione $f(x)$ si dice ***infinito*** in x_0 se risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$$

Confronto tra infiniti

Di fondamentale importanza è l'introduzione di un **criterio** per **confrontare** tra loro due infiniti in un punto x_0 .

Consideriamo due infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$, non necessariamente aventi lo stesso insieme di definizione, il confronto si effettua considerando, intorno ad x_0 , uno dei rapporti^a:



$$\left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| \text{ e } \left| \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right|$$

^aSupporremo che tali rapporti abbiano significato e che x_0 sia di accumulazione per gli insiemi di definizione di entrambi.

Confronto tra infiniti

Di fondamentale importanza è l'introduzione di un **criterio** per **confrontare** tra loro due infiniti in un punto x_0 .

Consideriamo due infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$, non necessariamente aventi lo stesso insieme di definizione, il confronto si effettua considerando, intorno ad x_0 , uno dei rapporti^a:

$$\left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| \text{ e } \left| \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right|$$

^aSupporremo che tali rapporti abbiano significato e che x_0 sia di accumulazione per gli insiemi di definizione di entrambi.

Confronto tra infiniti

Di fondamentale importanza è l'introduzione di un **criterio** per **confrontare** tra loro due infiniti in un punto x_0 .

Consideriamo due infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$, non necessariamente aventi lo stesso insieme di definizione, il confronto si effettua considerando, intorno ad x_0 , uno dei rapporti^a:



$$\left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| \text{ e } \left| \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right|$$

^aSupporremo che tali rapporti abbiano significato e che x_0 sia di accumulazione per gli insiemi di definizione di entrambi.

Confronto tra infiniti

Di fondamentale importanza è l'introduzione di un **criterio** per **confrontare** tra loro due infiniti in un punto x_0 .

Consideriamo due infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$, non necessariamente aventi lo stesso insieme di definizione, il confronto si effettua considerando, intorno ad x_0 , uno dei rapporti^a:



$$\left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| \text{ e } \left| \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right|$$

^aSupporremo che tali rapporti abbiano significato e che x_0 sia di accumulazione per gli insiemi di definizione di entrambi.

Confronto tra infiniti

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare *quattro casi*:

Confronto tra infiniti

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare *quattro casi*:

Confronto tra infiniti

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare *quattro casi*:

Confronto tra infiniti

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare **quattro casi**:

Caso 1

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = +\infty.$$

Si dice che l'infinito $f_1(x)$ è di *ordine superiore* rispetto all'infinito $f_2(x)$ e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) > \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $|f_1(x)|$ tende a $+\infty$ *più rapidamente* rispetto a $|f_2(x)|$.

Caso 1

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = +\infty.$$

Si dice che l'infinito $f_1(x)$ è di *ordine superiore* rispetto all'infinito $f_2(x)$ e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) > \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $|f_1(x)|$ tende a $+\infty$ *più rapidamente* rispetto a $|f_2(x)|$.

Caso 1

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = +\infty.$$

Si dice che l'infinito $f_1(x)$ è di *ordine superiore* rispetto all'infinito $f_2(x)$ e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) > \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $|f_1(x)|$ tende a $+\infty$ *più rapidamente* rispetto a $|f_2(x)|$.

Caso 2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 0.$$

Si dice che l'infinito $f_1(x)$ è di *ordine inferiore* rispetto all'infinito $f_2(x)$ e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) < \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $|f_1(x)|$ tende a $+\infty$ *meno rapidamente* rispetto a $|f_2(x)|$.

Caso 2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 0.$$

Si dice che l'infinito $f_1(x)$ è di *ordine inferiore* rispetto all'infinito $f_2(x)$ e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) < \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $|f_1(x)|$ tende a $+\infty$ *meno rapidamente* rispetto a $|f_2(x)|$.

Caso 3

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = l \neq 0.$$

Gli infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

$|f_1(x)|$ e $|f_2(x)|$ tendono a $+\infty$ *con la stessa rapidità*.

Caso 3

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = l \neq 0.$$

Gli infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

$|f_1(x)|$ e $|f_2(x)|$ tendono a $+\infty$ *con la stessa rapidità*.

Caso 3

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = l \neq 0.$$

Gli infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

$|f_1(x)|$ e $|f_2(x)|$ tendono a $+\infty$ *con la stessa rapidità*.

Caso 3

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = l \neq 0.$$

Gli infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

$|f_1(x)|$ e $|f_2(x)|$ tendono a $+\infty$ *con la stessa rapidità*.

Caso 3: Infiniti equivalenti

Se in particolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 1.$$

Gli infiniti si dicono *equivalenti* e si scrive:

$$f_1(x) \text{equiv}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Caso 3: Infiniti equivalenti

Se in particolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 1.$$

Gli infiniti si dicono *equivalenti* e si scrive:

$$f_1(x) \text{equiv}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Caso 3: Infiniti equivalenti

Se in particolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 1.$$

Gli infiniti si dicono *equivalenti* e si scrive:

$$f_1(x) \text{equiv}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Caso 4

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si dice che gli infiniti $f_1(x)$ e $f_2(x)$ ***non sono confrontabili***.

Obiettivo

Ci si propone adesso di determinare *numericamente*, ove possibile, l'*ordine* di un infinito.

Infinito campione

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Indicheremo con $f_\infty(x)$ l'**infinito campione**, convenzionalmente di **ordine 1**, in x_0 ovvero:

$$f_\infty(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-x_0)}, & x_0 \in \mathbb{R}, \\ x, & x_0 = \pm\infty. \end{cases}$$

Considerato un infinito $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di **ordine α** (rispetto all'infinito campione), se esiste un valore $\alpha > 0$ per cui risulti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|f_{\infty}(x)|^{\alpha}} = \ell \neq 0.$$

Si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha.$$

In generale

In generale, considerato un infinito $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di **ordine minore**, **uguale** o **maggiore** di α (rispetto all'infinito campione), secondo che sia di ordine **minore**, **uguale** o **maggiore** dell'infinito $|f_\infty(x)|^\alpha$.

In generale

In generale, considerato un infinito $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di **ordine minore**, **uguale** o **maggiore** di α (rispetto all'infinito campione), secondo che sia di ordine **minore**, **uguale** o **maggiore** dell'infinito $|f_\infty(x)|^\alpha$.

In generale

In generale, considerato un infinito $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di **ordine minore**, **uguale** o **maggiore** di α (rispetto all'infinito campione), secondo che sia di ordine **minore**, **uguale** o **maggiore** dell'infinito $|f_\infty(x)|^\alpha$.

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} 2x^3.$$

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} 2x^3.$$

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} 2x^3.$$

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} 2x^3.$$

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} 2x^3.$$

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} 2x^3.$$

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} 2x^3.$$

Esempio 1

Sia $f(x) = 2x^3 + x + 1$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{x^3} = 2.$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{2x^3} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} 2x^3.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) \text{ equiv}_{x \rightarrow +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) \text{ equiv}_{x \rightarrow +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} x.$$

Esempio 2

Sia $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} x.$$

Ordine arbitrariamente piccolo/grande

Se per ogni $\alpha > 0$ l'infinito $f(x)$ risulta *sempre* di **ordine inferiore** oppure *sempre* di **ordine superiore** rispetto all'infinito campione di ordine α , ossia:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|f_\infty(x)|^\alpha} = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|f_\infty(x)|^\alpha} = +\infty, \forall \alpha > 0$$

allora si dice che l'infinito $f(x)$ è rispettivamente di ordine **arbitrariamente piccolo**, **arbitrariamente grande**.

Ordine arbitrariamente piccolo/grande

Se per ogni $\alpha > 0$ l'infinito $f(x)$ risulta *sempre* di **ordine inferiore** oppure *sempre* di **ordine superiore** rispetto all'infinito campione di ordine α , ossia:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|f_\infty(x)|^\alpha} = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|f_\infty(x)|^\alpha} = +\infty, \forall \alpha > 0$$

allora si dice che l'infinito $f(x)$ è rispettivamente di ordine **arbitrariamente piccolo**, **arbitrariamente grande**.

Ordine arbitrariamente piccolo/grande

Se per ogni $\alpha > 0$ l'infinito $f(x)$ risulta *sempre* di **ordine inferiore** oppure *sempre* di **ordine superiore** rispetto all'infinito campione di ordine α , ossia:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|f_\infty(x)|^\alpha} = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|f_\infty(x)|^\alpha} = +\infty, \forall \alpha > 0$$

allora si dice che l'infinito $f(x)$ è rispettivamente di ordine **arbitrariamente piccolo**, **arbitrariamente grande**.

Tabella

	Infinito	x_0	ordine
a)	$\log_a x$	$+\infty$	arbitrariamente piccolo
b)	$\log_a x$	0	arbitrariamente piccolo
c)	$a^x, a > 1$	$+\infty$	arbitrariamente grande
d)	$a^x, 0 < a < 1$	$-\infty$	arbitrariamente grande

Definizione

La funzione $f(x)$ si dice ***infinitesimo*** in x_0 se risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

Definizione

La funzione $f(x)$ si dice ***infinitesimo*** in x_0 se risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

Confronto tra infinitesimi

Come per gli infiniti, si introduce un criterio per **confrontare** tra loro due infinitesimi in un punto x_0 , nelle ipotesi precedentemente introdotte.

Confronto tra infinitesimi

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni infinitesime in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare *quattro casi*:

Confronto tra infinitesimi

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni infinitesime in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare *quattro casi*:

Confronto tra infinitesimi

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni infinitesime in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare *quattro casi*:

Confronto tra infinitesimi

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni infinitesime in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Consideriamo il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si possono presentare **quattro casi**:

Caso 1

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 0.$$

Si dice che l'infinitesimo $f_1(x)$ è di *ordine superiore* rispetto all'infinitesimo $f_2(x)$ e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) > \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $f_1(x)$ tende a 0 *più rapidamente* rispetto a $f_2(x)$.

Caso 1

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 0.$$

Si dice che l'infinitesimo $f_1(x)$ è di *ordine superiore* rispetto all'infinitesimo $f_2(x)$ e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) > \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $f_1(x)$ tende a 0 *più rapidamente* rispetto a $f_2(x)$.

Caso 1

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 0.$$

Si dice che l'infinitesimo $f_1(x)$ è di *ordine superiore* rispetto all'infinitesimo $f_2(x)$ e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) > \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $f_1(x)$ tende a 0 *più rapidamente* rispetto a $f_2(x)$.

Caso 2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = +\infty.$$

Si dice che l'infinitesimo $f_1(x)$ è di *ordine inferiore* rispetto all'infinitesimo $f_2(x)$ e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) < \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $f_1(x)$ tende a 0 *meno rapidamente* rispetto a $f_2(x)$.

Caso 2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = +\infty.$$

Si dice che l'infinitesimo $f_1(x)$ è di *ordine inferiore* rispetto all'infinitesimo $f_2(x)$ e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) < \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Con linguaggio intuitivo: $f_1(x)$ tende a 0 *meno rapidamente* rispetto a $f_2(x)$.

Caso 3

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = l \neq 0.$$

Gli infinitesimi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

$f_1(x)$ e $f_2(x)$ tendono a 0 *con la stessa rapidità*.

Caso 3

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = l \neq 0.$$

Gli infinitesimi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

$f_1(x)$ e $f_2(x)$ tendono a 0 *con la stessa rapidità*.

Caso 3

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = l \neq 0.$$

Gli infinitesimi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

$f_1(x)$ e $f_2(x)$ tendono a 0 *con la stessa rapidità*.

Caso 3

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = l \neq 0.$$

Gli infinitesimi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono dello *stesso ordine* e si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

$f_1(x)$ e $f_2(x)$ tendono a 0 *con la stessa rapidità*.

Caso 3: Infinitesimi equivalenti

Se in particolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 1.$$

Gli infinitesimi si dicono *equivalenti* e si scrive:

$$f_1(x) \text{equiv}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Caso 3: Infinitesimi equivalenti

Se in particolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 1.$$

Gli infinitesimi si dicono *equivalenti* e si scrive:

$$f_1(x) \text{equiv}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Caso 3: Infinitesimi equivalenti

Se in particolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = 1.$$

Gli infinitesimi si dicono *equivalenti* e si scrive:

$$f_1(x) \text{equiv}_{x \rightarrow x_0} f_2(x).$$

Caso 4

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right|$$

Si dice che gli infinitesimi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ ***non sono confrontabili***.

Obiettivo

Ci si propone adesso di determinare *numericamente*, ove possibile, l'*ordine* di un infinitesimo.

Infinitesimo campione

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Indicheremo con $f_0(x)$ l'**infinitesimo campione**, convenzionalmente di **ordine 1**, in x_0 , ovvero:

$$f_0(x) = \begin{cases} (x - x_0), & x_0 \in \mathbb{R}, \\ \frac{1}{x}, & x_0 = \pm\infty. \end{cases}$$

Ordine di un infinitesimo

Considerato un infinitesimo $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di **ordine α** (rispetto all'infinitesimo campione), se esiste un valore $\alpha > 0$ per cui risulti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|f_0(x)|^\alpha} = \ell \neq 0.$$

Si scrive:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha.$$

In generale

In generale, considerato un infinitesimo $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di **ordine minore**, **uguale** o **maggiore** di α (rispetto all'infinitesimo campione), secondo che sia di ordine **minore**, **uguale** o **maggiore** dell'infinitesimo $|f_0(x)|^\alpha$.

Ordine di un infinitesimo

In generale

In generale, considerato un infinitesimo $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di **ordine minore**, **uguale** o **maggiore** di α (rispetto all'infinitesimo campione), secondo che sia di ordine **minore**, **uguale** o **maggiore** dell'infinitesimo $|f_0(x)|^\alpha$.

Ordine di un infinitesimo

In generale

In generale, considerato un infinitesimo $f(x)$ in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dirà di **ordine minore**, **uguale** o **maggiore** di α (rispetto all'infinitesimo campione), secondo che sia di ordine **minore**, **uguale** o **maggiore** dell'infinitesimo $|f_0(x)|^\alpha$.

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.

$f(x)$ è un infinitesimo in 1.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x)}{2(x - 1)} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} \right| = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 1} 2(x - 1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.

$f(x)$ è un infinitesimo in 1.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x)}{2(x - 1)} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} \right| = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 1} 2(x - 1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.

$f(x)$ è un infinitesimo in 1.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x)}{2(x - 1)} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} \right| = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 1} 2(x - 1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.

$f(x)$ è un infinitesimo in 1.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x)}{2(x - 1)} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} \right| = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 1} 2(x - 1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.

$f(x)$ è un infinitesimo in 1.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x)}{2(x - 1)} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} \right| = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 1} 2(x - 1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.

$f(x)$ è un infinitesimo in 1.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x)}{2(x - 1)} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} \right| = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 1} 2(x - 1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.

$f(x)$ è un infinitesimo in 1.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x)}{2(x - 1)} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} \right| = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 1} 2(x - 1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.

$f(x)$ è un infinitesimo in 1.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x)}{2(x - 1)} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} \right| = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 1} 2(x - 1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.

$f(x)$ è un infinitesimo in 1.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x)}{2(x - 1)} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} \right| = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 1} 2(x - 1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.

$f(x)$ è un infinitesimo in 1.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x)}{2(x - 1)} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} \right| = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 1} 2(x - 1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.

$f(x)$ è un infinitesimo in 1.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x)}{2(x - 1)} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} \right| = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 1} 2(x - 1).$$

Esempio 3

Sia $f(x) = x^2 - 1$.

$f(x)$ è un infinitesimo in 1.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x)}{2(x - 1)} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)} \right| = 1.$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 1} 2(x - 1).$$

Ordine arbitrariamente piccolo/grande

Se per ogni $\alpha > 0$ l'infinitesimo $f(x)$ risulta *sempre* di **ordine inferiore** oppure *sempre* di **ordine superiore** rispetto all'infinitesimo campione di ordine α , ossia:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|f_0(x)|^\alpha} = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|f_0(x)|^\alpha} = 0, \forall \alpha > 0$$

allora si dice che l'infinitesimo $f(x)$ è rispettivamente di ordine **arbitrariamente piccolo**, **arbitrariamente grande**.

Ordine arbitrariamente piccolo/grande

Se per ogni $\alpha > 0$ l'infinitesimo $f(x)$ risulta *sempre* di **ordine inferiore** oppure *sempre* di **ordine superiore** rispetto all'infinitesimo campione di ordine α , ossia:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|f_0(x)|^\alpha} = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|f_0(x)|^\alpha} = 0, \forall \alpha > 0$$

allora si dice che l'infinitesimo $f(x)$ è rispettivamente di ordine **arbitrariamente piccolo**, **arbitrariamente grande**.

Ordine arbitrariamente piccolo/grande

Se per ogni $\alpha > 0$ l'infinitesimo $f(x)$ risulta *sempre* di **ordine inferiore** oppure *sempre* di **ordine superiore** rispetto all'infinitesimo campione di ordine α , ossia:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|f_0(x)|^\alpha} = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|f_0(x)|^\alpha} = 0, \forall \alpha > 0$$

allora si dice che l'infinitesimo $f(x)$ è rispettivamente di ordine **arbitrariamente piccolo**, **arbitrariamente grande**.

Tabella

	Infinitesimo	x_0	ordine
a)	$a^x, a > 1$	$-\infty$	arbitrariamente grande
b)	$a^x, 0 < a < 1$	$+\infty$	arbitrariamente grande

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\sin x$	0	1	x
$\operatorname{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\arcsin x$	0	1	x
$\operatorname{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\sin x$	0	1	x
$\operatorname{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\arcsin x$	0	1	x
$\operatorname{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\sin x$	0	1	x
$\operatorname{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\arcsin x$	0	1	x
$\operatorname{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\sin x$	0	1	x
$\operatorname{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\arcsin x$	0	1	x
$\operatorname{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\sin x$	0	1	x
$\operatorname{tg} x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\arcsin x$	0	1	x
$\operatorname{arctg} x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Casi particolari

Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
$\text{sen}x$	0	1	x
$\text{tg}x$	0	1	x
$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
$\text{arcsen}x$	0	1	x
$\text{arctg}x$	0	1	x
$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
$\log(1+x)$	0	1	x
$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
$e^x - 1$	0	1	x

Prodotto

Se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono due infiniti (infinitesimi) in x_0 di ordini rispettivamente α_1 ed α_2 allora il prodotto $f_1(x)f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) di ordine $\alpha_1 + \alpha_2$:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \alpha_1, \quad \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \alpha_2$$



$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = \alpha_1 + \alpha_2.$$

il prodotto $f_1(x)f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) in x_0 **equivalente** al prodotto degli infiniti (infinitesimi) campione equivalenti, rispettivamente a $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Prodotto

Se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono due infiniti (infinitesimi) in x_0 di ordini rispettivamente α_1 ed α_2 allora il prodotto $f_1(x)f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) di ordine $\alpha_1 + \alpha_2$:

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \alpha_1, \quad \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \alpha_2$$



$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = \alpha_1 + \alpha_2.$$

il prodotto $f_1(x)f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) in x_0 **equivalente** al prodotto degli infiniti (infinitesimi) campione equivalenti, rispettivamente a $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Esempio 4

Sia $f(x) = x^3\sqrt{4x^2 - 1}$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$, dato dal prodotto di due infiniti in $+\infty$:

$$f(x) = f_1(x)f_2(x)$$

dove

$$f_1(x) = x^3$$

$$f_2(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 3;$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 1; f_2(x) \text{equiv}_{x \rightarrow +\infty} 2x$$

e dunque:

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 + 1 = 4$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 0} = x^3 \cdot 2x = 2x^4$$

Esempio 5

Sia $f(x) = \log(x^2 + 1)\text{sen}3x$.

$f(x)$ è un infinitesimo in 0, dato dal prodotto di due infinitesimi in zero:

$$f(x) = f_1(x)f_2(x)$$

dove

$$f_1(x) = \log(x^2 + 1)$$

$$f_2(x) = \text{sen}3x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x + 1)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 + 1)}{x^2} = 1$$

↓

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 2$$

$$f_1(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 0} x^2$$

Esempio 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}3x}{3x} = 1$$

↓

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 1$$

$$f_2(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 0} 3x$$

e dunque:

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 + 1 = 3$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 0} = x^2 \cdot 3x = 3x^3$$

Somma e differenza

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti (infinitesimi) in x_0 di ordini rispettivamente α_1 ed α_2 con $\alpha_1 \neq \alpha_2$, allora la loro somma o differenza $f_1(x) \pm f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) in x_0 che ha per ordine il maggiore (minore) dei numeri α_1 ed α_2 .

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \alpha_1 > \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \alpha_2$$



$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \pm f_2(x) = \alpha_1(\alpha_2).$$

Somma e differenza

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti (infinitesimi) in x_0 di ordini rispettivamente α_1 ed α_2 con $\alpha_1 \neq \alpha_2$, allora la loro somma o differenza $f_1(x) \pm f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) in x_0 che ha per ordine il maggiore (minore) dei numeri α_1 ed α_2 .

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \alpha_1 > \text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \alpha_2$$

⇓

$$\text{ord}_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \pm f_2(x) = \alpha_1(\alpha_2).$$

Somma e differenza

La somma $f_1(x) \pm f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) in x_0 **equivalente**, tenuto conto del segno, all'infinito (infinitesimo) di ordine maggiore (minore).

Se $\alpha_1 = \alpha_2$ allora la loro somma o differenza è ancora un infinito (infinitesimo) dello stesso ordine.

N.B. Fa eccezione il caso in cui $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono **equivalenti**.

Somma e differenza

La somma $f_1(x) \pm f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) in x_0 **equivalente**, tenuto conto del segno, all'infinito (infinitesimo) di ordine maggiore (minore).

Se $\alpha_1 = \alpha_2$ allora la loro somma o differenza è ancora un infinito (infinitesimo) dello stesso ordine.

N.B. Fa eccezione il caso in cui $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono **equivalenti**.

Somma e differenza

La somma $f_1(x) \pm f_2(x)$ è un infinito (infinitesimo) in x_0 **equivalente**, tenuto conto del segno, all'infinito (infinitesimo) di ordine maggiore (minore).

Se $\alpha_1 = \alpha_2$ allora la loro somma o differenza è ancora un infinito (infinitesimo) dello stesso ordine.

N.B. Fa eccezione il caso in cui $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono **equivalenti**.

Esempio 6

Sia $f(x) = x^2 + \text{sen}^3 x$.

$f(x)$ è un infinitesimo in 0 dato dalla somma di due infinitesimi in 0:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

dove

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = \text{sen}^3 x$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^3x}{x^3} = 1$$

⇓

$$\text{ord}_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 3$$

$$f_2(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 0} x^3$$

e dunque:

$$\text{ord}_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 0} x^2$$

Esempio 7

Sia $f(x) = x^3 + 4x^4 - 2^x$.

$f(x)$ è un infinito in $+\infty$ dato dalla differenza di due infiniti in $+\infty$:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

dove

$$f_1(x) = x^3 + 4x^4$$

$$f_2(x) = -2^x$$

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 4$$

$$f_1(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 0} 4x^4$$

$ord_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$ arbitrariamente grande

e dunque:

$ord_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ arbitrariamente grande

$$f(x) \text{equiv}_{x \rightarrow 0} = -2^x$$