Metodi di misurazione della struttura per scadenza dei tassi di interesse

Contenuti

- La misurazione della struttura per scadenza come problema di algebra lineare
    - Il caso generale
    - Metodi basati sui tassi di parità
    - Interpolazione lineare
    - Tassi swap
    - Esercizi

Il caso generale

$$\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$$

scadenzario

$$\boldsymbol{x}_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm}\}$$

Flusso pagamenti j-esimo titolo

$$V_j = V(t, \boldsymbol{x}_j) \quad j = 1, \dots, n$$

Prezzi dei titoli

Problema:

determinare

$$v_k = v(t, t_k) \quad k = 1, \dots, m$$

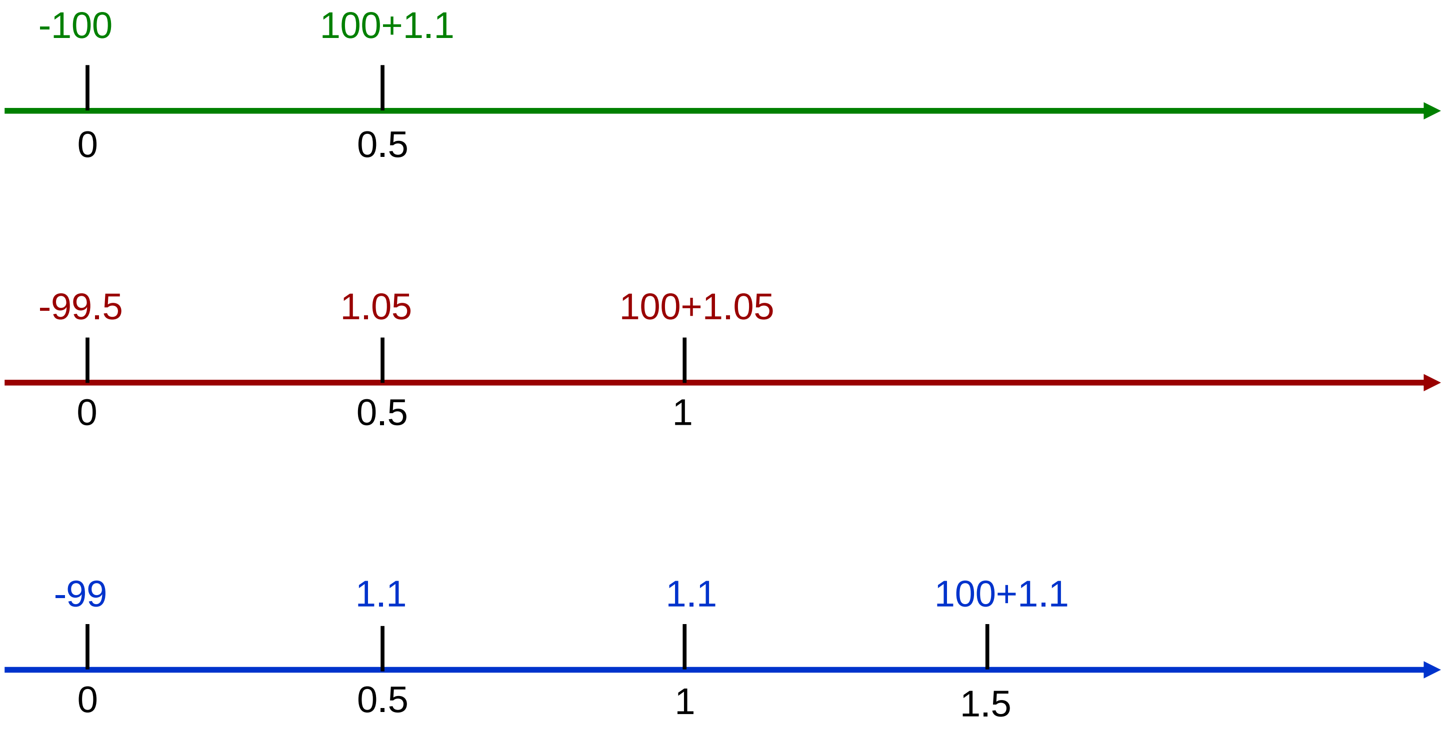
tali che

$$V_j = \sum_{k=1}^{m} x_{jk} v_k \quad j = 1, \dots, n$$

Esempio

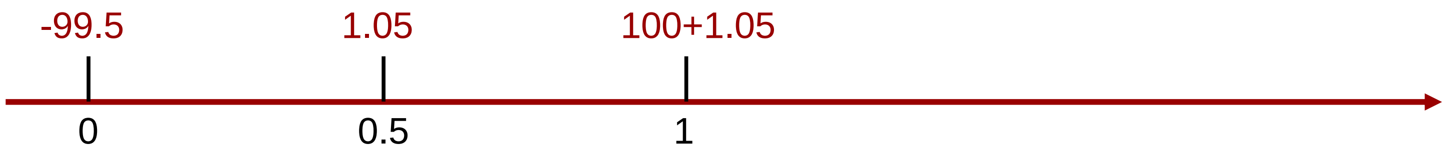
Al tempo t=0, sono quotati i seguenti titoli, tutti con nominale 100 euro:

- un TCF a sei mesi, con prezzo 100 euro, cedola semestrale e tasso nominale annuo 2.2%;
- un TCF a un anno, con tasso nominale annuo 2.1%, cedola semestrale e prezzo 99.5 euro;
- un TCF a un anno e mezzo, con cedola semestrale, prezzo 99 euro e tasso nominale annuo 2.2%.

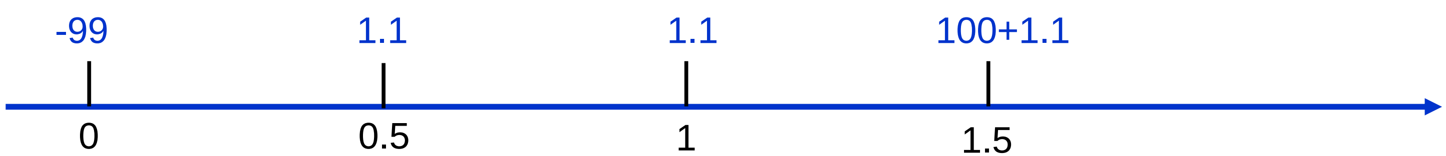


Esempio

$$100 = 101.1v(0,0.5)$$



$$99.5 = 1.05v(0,0.5) + 101.05v(0,1)$$



$$99 = 1.1v(0,0.5) + 1.1v(0,1) + 101.1v(0,1.5)$$

Esempio

$$\begin{cases} 100 = 101.1v(0,0.5) \\ 99.5 = 1.05v(0,0.5) + 101.05v(0,1) \\ 99 = 1.1v(0,0.5) + 1.1v(0,1) + 101.1v(0,1.5) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 101.1 & 0 & 0 \\ 1.05 & 101.05 & 0 \\ 1.1 & 1.1 & 101.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(0,0.5) \\ v(0,1) \\ v(0,1.5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 99.5 \\ 99 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v(0,0.5) = \dfrac{100}{101.1} = 0.9891 \\ v(0,1) = \dfrac{99.5 - 1.05v(0,0.5)}{101.05} = 0.9744 \\ v(0,1.5) = \dfrac{99 - 1.1v(0,0.5) - 1.1v(0,1)}{101.1} = 0.9579 \end{cases}$$

Il sistema di equazioni lineari

$$V_j = \sum_{k=1}^{m} x_{jk} v_k \quad j = 1, \dots, n$$

Sistema di n equazioni lineari in m incognite

Prezzi dei titoli

n numero di titoli
m numero di scadenze

$$X = \{x_{jk}, j = 1, \dots n \; e \; k = 1, \dots, m\}$$ coefficienti

$$\boldsymbol{v} = \{v_k, k = 1, \dots m\}$$ incognite

$$\boldsymbol{V} = \{V_j, j = 1, \dots, n\}$$ termini noti

$$X\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}$$

Esistenza e unicità della soluzione

$$X\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}$$

Matrice di dimensione n x m

$r(X) \leq \min(n, m)$ rango della matrice X

$n - r(X)$ numero di titoli ridondanti

$$\boxed{r(X) = n \leq m}$$

Il sistema è compatibile se: $r(X) = r(X|V) = n$

Il sistema è determinato se: $n = m$

Esempio

Si supponga che al tempo t = 0 siano trattati sul mercato i tre titoli

TCF_1={5, 5, 105}/{1, 2, 3}
TCF_2={4, 104}/{1, 2}
TCF_3 : {9, 109, 105}/{1, 2, 3}

Lo scadenzario comune è **t** = {1, 2, 3}

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 105 \\ 4 & 104 & 0 \\ 9 & 109 & 105 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad r(X) = 2$$

Supponiamo che sia:

$$V_1 = 99€ \quad V_2 = 98€ \quad \Rightarrow \quad V_3 = 99 + 98 = 197€$$

Esempio

$$X|V = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 105 & 99 \\ 4 & 104 & 0 & 98 \\ 9 & 109 & 105 & 197 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad r(X|V) = 2$$

Il sistema è compatibile

$$V_1 = 99€ \quad V_2 = 98€ \quad V_3 = 195€$$

$$X|V = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 105 & 99 \\ 4 & 104 & 0 & 98 \\ 9 & 109 & 105 & 195 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad r(X|V) = 3$$

Il sistema è incompatibile

Metodi basati sui tassi di parità

$$\boldsymbol{t} = \{k, k = 1, \dots, n\}$$

Al tempo t=0 si considerino n coupon bond

1° con scadenza in 1

2° con scadenza in 2

3° con scadenza in 3

…

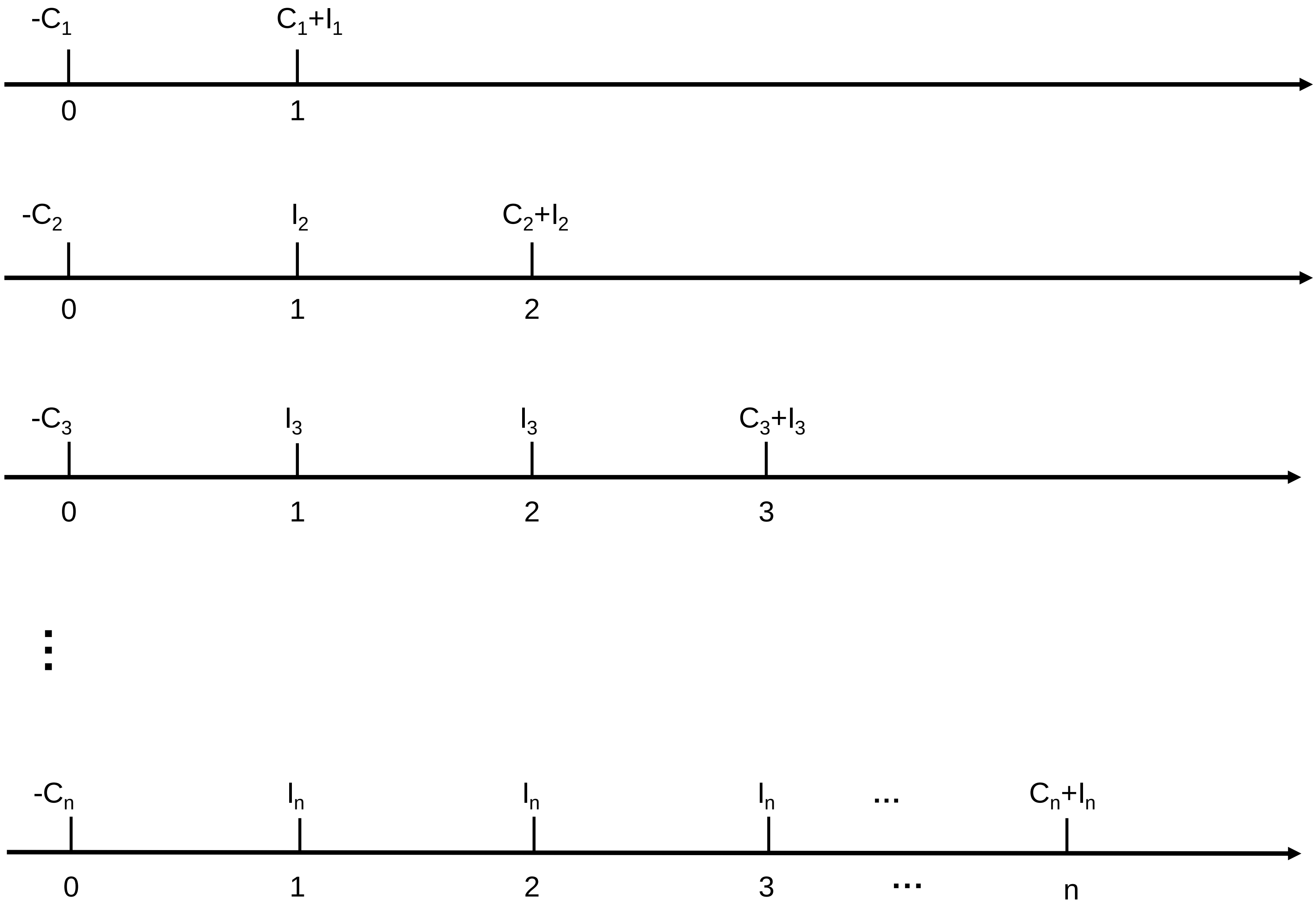
n° con scadenza in n

$\boxed{m_j = j, \; j=1,\dots,n}$

$\boxed{p_j \,, \; j=1,\dots,n}$ Sono quotati i tassi di parità di ciascun titolo

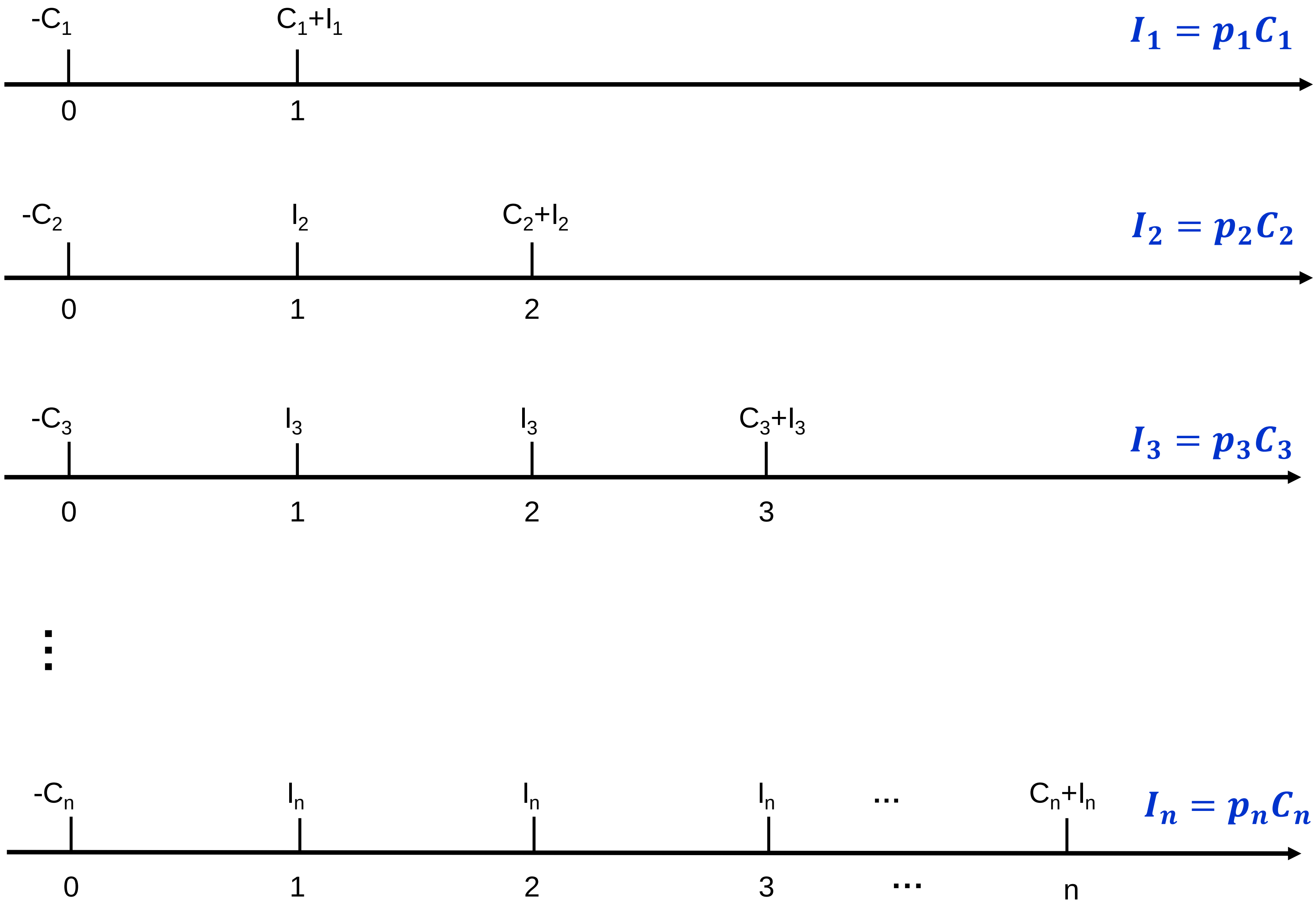
Se usiamo il tasso di parità come tasso cedolare il titolo quota alla pari

I flussi



-C1
C1+I1
0
1
-C2
I2
C2+I2
0
1
2
-C3
I3
I3
C3+I3
0
1
2
3
-Cn
In
In
In
...
Cn+In
0
1
2
3
...
n

Le cedole



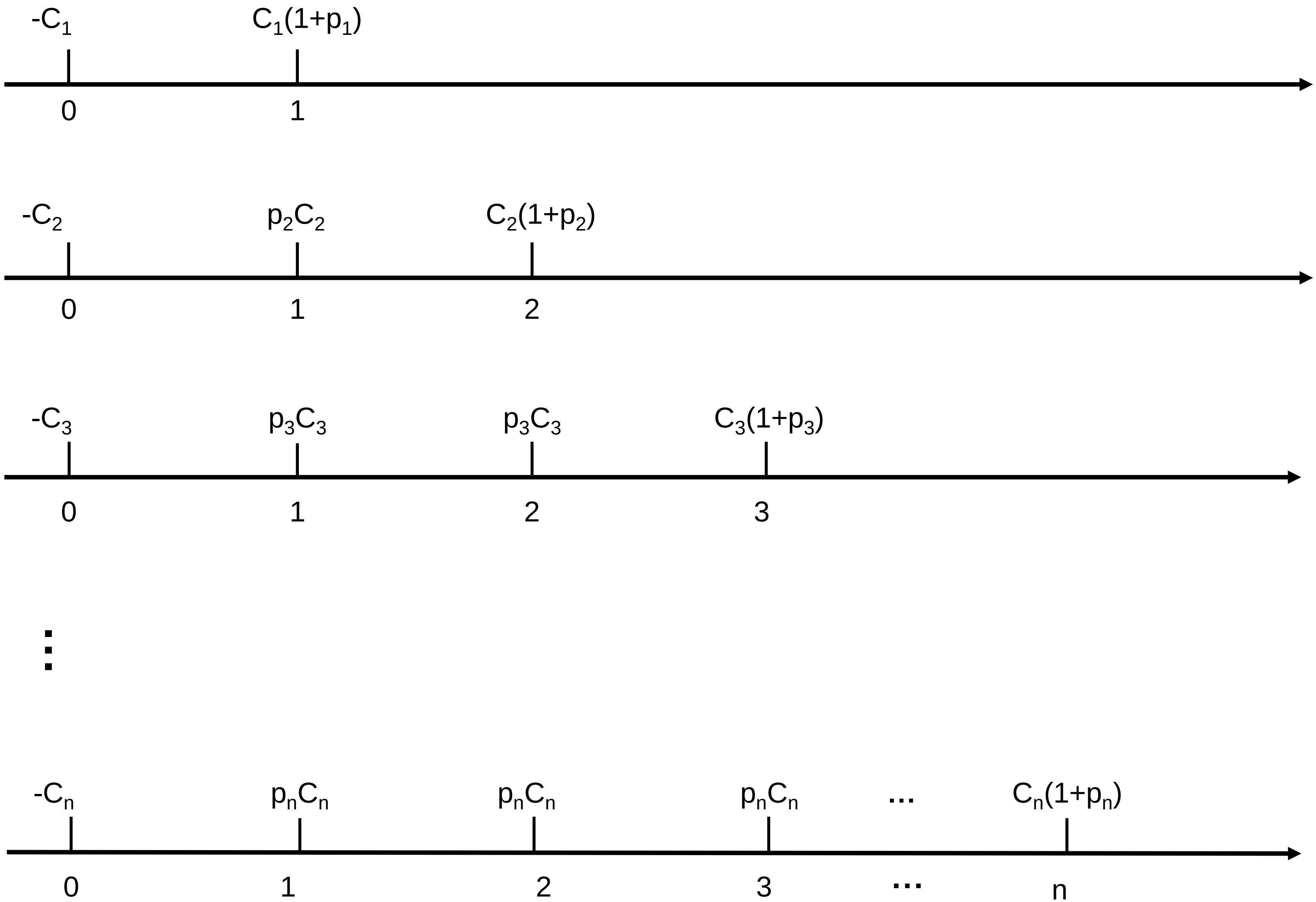
$I_1 = p_1 C_1$

$I_2 = p_2 C_2$

$I_3 = p_3 C_3$

$I_n = p_n C_n$

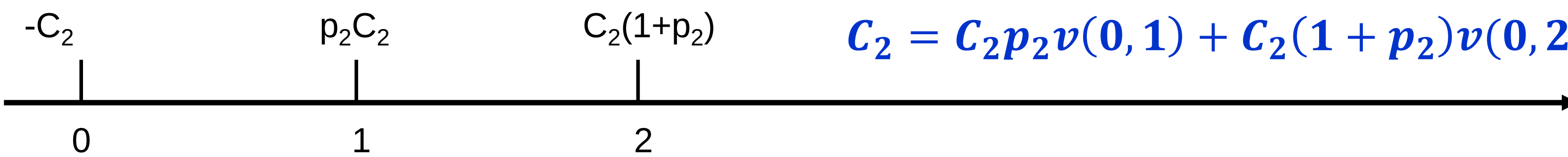
I flussi



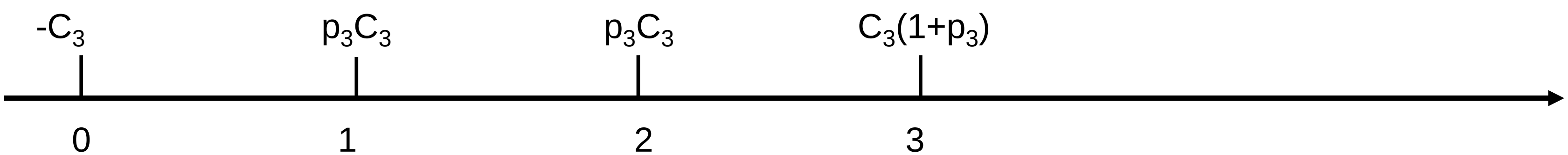
$-C_1$
$C_1(1+p_1)$
0
1
$-C_2$
p_2C_2
$C_2(1+p_2)$
0
1
2
$-C_3$
p_3C_3
p_3C_3
$C_3(1+p_3)$
0
1
2
3
$\vdots$
$-C_n$
p_nC_n
p_nC_n
p_nC_n
...
$C_n(1+p_n)$
0
1
2
3
...
n

Equazione di parità

$$C_1 = C_1(1+p_1)v(0,1)$$



$$C_2 = C_2 p_2 v(0,1) + C_2(1+p_2)v(0,2)$$



$$C_3 = C_3 p_3 v(0,1) + C_3 p_3 v(0,2) + C_3(1+p_3)v(0,3)$$

⋮

$$C_n = C_n p_n v(0,1) + C_n p_n v(0,2) + \cdots + C_n(1+p_n)v(0,n)$$

Il sistema di equazioni

$$\begin{cases} C_1 = C_1(1+p_1)v(0,1) \\ C_2 = C_2 p_2 v(0,1) + C_2(1+p_2)v(0,2) \\ C_3 = C_3 p_3 v(0,1) + C_3 p_3 v(0,2) + C_3(1+p_3)v(0,3) \\ \quad \vdots \\ C_n = C_n p_n v(0,1) + C_n p_n v(0,2) + \cdots + C_n(1+p_n)v(0,n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = (1+p_1)v(0,1) \\ 1 = p_2 v(0,1) + (1+p_2)v(0,2) \\ 1 = p_3 v(0,1) + p_3 v(0,2) + (1+p_3)v(0,3) \\ \quad \vdots \\ 1 = p_n v(0,1) + p_n v(0,2) + \cdots + (1+p_n)v(0,n) \end{cases}$$

Il sistema di equazioni

$$
\begin{cases}
1 = (1+p_1)v(0,1) \\
1 = p_2 v(0,1) + (1+p_2)v(0,2) \\
1 = p_3 v(0,1) + p_3 v(0,2) + (1+p_3)v(0,3) \\
\quad\vdots \\
1 = p_n v(0,1) + p_n v(0,2) + \cdots + (1+p_n)v(0,n)
\end{cases}
$$

$$\boxed{Xv = V}$$

$$
\begin{pmatrix}
1+p_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
p_2 & 1+p_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\
p_j & p_j & \dots & 1+p_j & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
p_n & p_n & \dots & p_n & \dots & 1+p_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
v(0,1) \\ v(0,2) \\ \vdots \\ v(0,j) \\ \vdots \\ v(0,n)
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1
\end{pmatrix}
$$

La matrice dei coefficienti

$$X = \begin{pmatrix} 1+p_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & 1+p_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_j & p_j & \cdots & 1+p_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n & p_n & \cdots & p_n & \cdots & 1+p_n \end{pmatrix}$$

- L'indice di riga identifica il titolo
- L'indice di colonna identifica la scadenza
- Il titolo j-esimo scade in j
- k<j vuol dire che il titolo non è ancora scaduto
- k=j siamo alla data di scadenza del titolo
- k>j il titolo è scaduto

$$\begin{cases} x_{jk} = p_j & per \quad k < j \\ x_{jk} = 1 + p_j & per \quad k = j \\ x_{jk} = 0 & per \quad k > j \end{cases}$$

Esistenza e unicità della soluzione

$$X = \begin{pmatrix} 1+p_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & 1+p_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_j & p_j & \dots & 1+p_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n & p_n & \dots & p_n & \dots & 1+p_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{r(X) = r(X|V) = n}}$$

Il sistema ammette una soluzione unica

La soluzione

$$\begin{cases} 1 = (1+p_1)v(0,1) \\ 1 = p_2 v(0,1) + (1+p_2)v(0,2) \\ 1 = p_3 v(0,1) + p_3 v(0,2) + (1+p_3)v(0,3) \\ \vdots \\ 1 = p_n v(0,1) + p_n v(0,2) + \cdots + (1+p_n)v(0,n) \end{cases}$$

$$v(0,1) = \frac{1}{1+p_1}$$

$$v(0,2) = \frac{1 - p_2 v(0,1)}{1+p_2}$$

$$v(0,3) = \frac{1 - p_3 v(0,1) - p_3 v(0,2)}{1+p_3} = \frac{1 - p_3 \sum_{j=1}^{2} v(0,j)}{1+p_3}$$

$$\vdots$$

$$v(0,k) = \frac{1 - p_k \sum_{j=1}^{k-1} v(0,j)}{1+p_k}$$

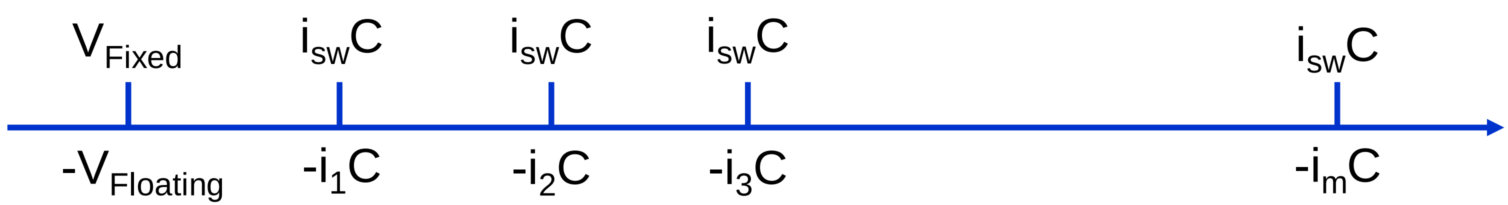
Il bootstrap

$$v(t,t+k)=\frac{1-p_k\sum_{j=1}^{k-1}v(t,t+j)}{1+p_k}$$

$$i(t,t+k)=\left(\frac{1+p_k}{1-p_k\sum_{j=1}^{k-1}v(t,t+j)}\right)^{\frac{1}{k}}-1$$

Equazione del bootstrap

I tassi swap come tassi di parità

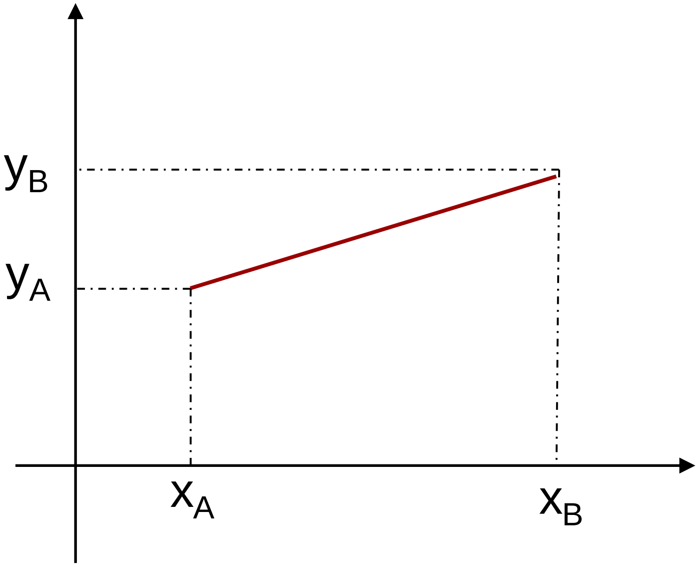


$$V_{Fixed} = V_{Floating}$$
$$V_{Floating} = C$$

$$\Rightarrow \quad V_{Fixed} = C \qquad i_{sw} = par\ yield$$

Interpolazione

E’ una procedura approssimata che consente di ricavare da tabelle valori non riportati esplicitamente.

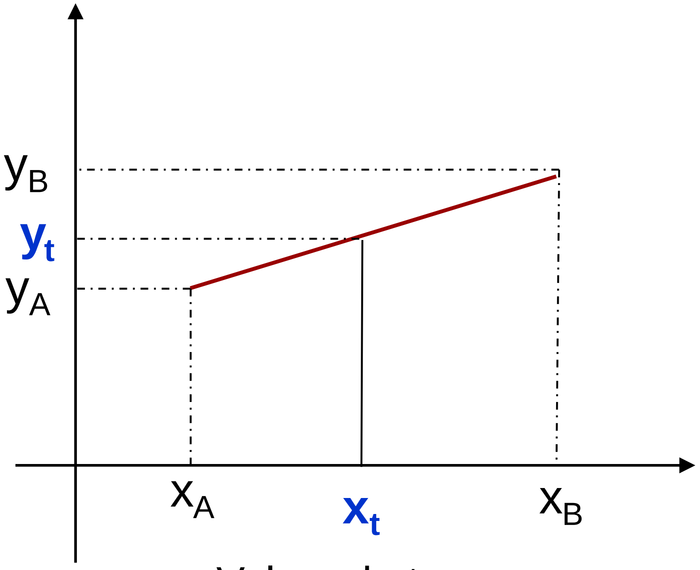


$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

$$y = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}(y_B - y_A) + y_A$$

Interpolazione

E’ una procedura approssimata che consente di ricavare da tabelle valori non riportati esplicitamente.

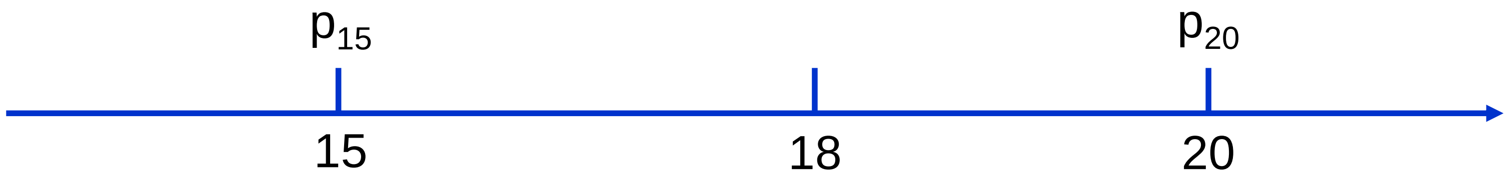


$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

$$y = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}(y_B - y_A) + y_A$$

$$y_t = \frac{x_t - x_A}{x_B - x_A}(y_B - y_A) + y_A$$

Interpolazione



$$y_t = \frac{x_t - x_A}{x_B - x_A}(y_B - y_A) + y_A$$

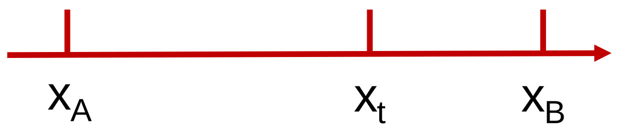
$$p_{18} = \frac{18 - 15}{20 - 15}(p_{20} - p_{15}) + p_{15}$$

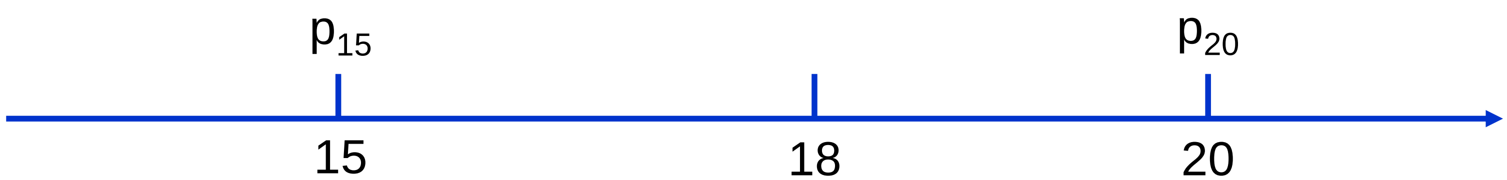
Interpolazione

$$y_t = \frac{x_t - x_A}{x_B - x_A}(y_B - y_A) + y_A = \frac{x_t y_B - x_t y_A - x_A y_B + x_A y_A + x_B y_A - x_A y_A}{x_B - x_A}$$

$$= \frac{x_t y_B - x_t y_A - x_A y_B + x_B y_A}{x_B - x_A} = \frac{-x_t y_A + x_B y_A}{x_B - x_A} + \frac{x_t y_B - x_A y_B}{x_B - x_A}$$

$$\boxed{= \frac{x_B - x_t}{x_B - x_A} y_A + \frac{x_t - x_A}{x_B - x_A} y_B}$$





$$p_{18} = \frac{20 - 18}{20 - 15} p_{15} + \frac{18 - 15}{20 - 15} p_{20}$$

Esempio

Si supponga che all'istante t = 0 siano osservati sul mercato i tassi di parità p1 = 3%, p2 = 4%, p3 = 5% relativi a tre titoli con cedola fissa annuale e maturity di 1, 2 e 3 anni. Determinare la struttura dei tassi di interesse.

titolo 1 : {103, 0, 0} / {1, 2, 3}
titolo 2 : {4, 104, 0} / {1, 2, 3}
titolo 3 : {5, 5, 105} / {1, 2, 3}

$$X = \begin{pmatrix} 103 & 0 & 0 \\ 4 & 104 & 0 \\ 5 & 5 & 105 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1.03 & 0 & 0 \\ 0.04 & 1.04 & 0 \\ 0.05 & 0.05 & 1.05 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1.03 & 0 & 0 \\ 0.04 & 1.04 & 0 \\ 0.05 & 0.05 & 1.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(0,1) \\ v(0,2) \\ v(0,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v(0,1) = \frac{1}{1.03} = 0.9709$$

$$v(0,2) = \frac{1 - 0.04 \cdot 0.9709}{1.04} = 0.9242$$

$$v(0,3) = \frac{1 - 0.05 \cdot 0.9709 - 0.05 \cdot 0.9242}{1.05} = 0.8621$$

$$i(0,1) = \frac{1}{0.9709} - 1 = 3\%$$

$$i(0,2) = \left(\frac{1}{0.9242}\right)^{1/2} - 1 = 4.0202\%$$

$$i(0,3) = \left(\frac{1}{0.8621}\right)^{1/3} - 1 = 5.0689\%$$

Struttura ZCS

La struttura dei tassi a pronti ricavata dai tassi swap quotati con il bootstrap, è «completata» sulle scadenze inferiori all'anno con le quotazioni dei tassi del mercato monetario (tassi Euribor).

La struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti ricavata dai tassi swap è detta anche *struttura zero-coupon swap*.

Dal punto di vista di chi quota sono date, per ciascuna scadenza, le quotazioni:

- denaro (bid), quando chi quota paga fisso;
- lettera (ask), quando chi quota riceve fisso;
- **mid**: media aritmetica della quotazione denaro (più bassa) e della quotazione lettera (più alta).

Perciò si parla di strutture zcs denaro, lettera e mid.