

ESERCITAZIONE 9: limiti, continuità, asintoti - 2 parte

ESERCIZIO 1. Verificare che:

- 1.a) x^5 è un infinito di ordine superiore a $3x^2$ per $x \rightarrow +\infty$,
- 1.b) x^5 è un infinitesimo di ordine superiore a $3x^2$ per $x \rightarrow 0$,
- 1.c) $x \sin(1/x)$ è un infinito di ordine inferiore a x per $x \rightarrow +\infty$,
- 1.d) $x + \cos x$ è un infinito dello stesso ordine di x per $x \rightarrow +\infty$,
- 1.e) $\frac{x^3 + 3}{2x}$ è un infinito asintotico a $\frac{x^2}{2}$ per $x \rightarrow +\infty$,
- 1.f) $\frac{1 + x^2}{x}$ è un infinito asintotico a $\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0$,
- 1.g) $\tan x$ è un infinitesimo asintotico a x per $x \rightarrow 0$,
- 1.h) $\sin(x^2)$ e $1 - \cos x$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \rightarrow 0$.

ESERCIZIO 2. Stabilire quali delle seguenti funzioni sono infiniti dell'ordine di x^2 per $x \rightarrow +\infty$.
 Precisare poi quali sono asintotiche a x^2 per $x \rightarrow +\infty$.

$$\log x^2, \quad e^{2x}, \quad \sin x + 3x - x^2, \quad \frac{x^4 - 5x}{x^3 + 2x^2}, \quad \frac{x^3 - 1}{2 + x}, \quad x^2 \log \frac{x}{x - 1}.$$

ESERCIZIO 3. Stabilire quali delle seguenti funzioni sono infiniti dell'ordine di $1/x^2$ per $x \rightarrow 0^+$.
 Precisare poi quali sono asintotiche a $1/x^2$ per $x \rightarrow 0^+$.

$$\log(x^2), \quad e^{2x}, \quad \frac{1 + 3x}{x + 5x^2}, \quad \frac{1 + 3x}{5x^2 + x^5}, \quad \frac{3x}{1 + x^2}, \quad \frac{1}{\sin x^2}.$$

ESERCIZIO 4. Utilizzando in modo opportuno la gerarchia degli infiniti ed il principio di sostituzione degli infiniti (ed eventualmente il cambiamento di variabile), calcolare i seguenti limiti:

4.a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^2}{\sin x - 3x^4}$	[-1/3]	4.b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{1 + 4^x}$	[+\infty]
4.c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^4}{x}$	[0]	4.d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x$	[0]
4.e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + x)}{x}$	[0]	4.f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^2}{\log(x^2)}$	[+\infty]
4.g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$	[1]	4.h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + x} \right)^{x^2}$	[0]
4.i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^8}{1 + \log x - \sqrt[7]{x}}$	[-\infty]	4.j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \log x}{4^{-x} + x}$	[4]

ESERCIZIO 5. Individuare il dominio e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{cccc} \frac{1 - x^3}{4 - x^2}, & \frac{x^2 - 3x}{x - 1}, & xe^{\frac{1}{x}}, & \frac{1}{x}e^x \\ x \log(1 + x), & \frac{\log(2 - x)}{x}, & x \sin x, & x \sin \frac{1}{x}, \\ 2x + \cos x, & x(2 + \cos x), & \frac{2x^2 + \cos x}{x}. & \end{array}$$

ESERCIZIO 6. Stabilire se le seguenti funzioni sono continue in $x = 0$. In caso negativo, classificare il tipo di discontinuità.

$$6.a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1, \end{cases},$$

$$6.b) \quad f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

$$6.c) \quad |x|,$$

$$6.d) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ x - x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$$6.e) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

$$6.f) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x > 0, \\ 1 + x & \text{se } x \leq 0, \end{cases},$$

ESERCIZIO 7. Partendo dalla conoscenza dei limiti notevoli, determinare il comportamento asintotico dei seguenti infinitesimi in $x = 0$, cioè determinare i parametri c e α in modo che la funzione assegnata sia asintotica a $c x^\alpha$ per $x \rightarrow 0$.

$$\sin x^2, \quad \sin^2 x, \quad \tan x, \quad \sinh x, \quad \left(1 + \frac{x}{2}\right)^4 - 1, \quad x \log(1 + x), \quad \cos x - e^x.$$

ESERCIZIO 8. Utilizzando l'algebra dei limiti e le sue estensioni, i limiti notevoli e il principio di sostituzione degli infinitesimi calcolare:

$$8.a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \quad [1]$$

$$8.b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \quad [0]$$

$$8.c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - e^{x^2}} \quad [-1]$$

$$8.d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 + x^2} - 1}{x^2} \quad \left[\frac{1}{5}\right]$$

$$8.e) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{x - 1}{x + 1} \quad [-2]$$

$$8.f) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\cos x - 1} \quad [-\infty]$$

$$8.g) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\log(\cos x)} \quad [2]$$

$$8.h) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^x - 1} \quad [0]$$

$$8.i) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - \sqrt{x})}{e^{x^2} - 1} \quad [-\infty]$$

$$8.j) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^2) \sqrt{\cos x + 3}}{x^2 e^{1+x^5}} \quad [2/e]$$

$$8.k) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + (e^x - 1)^3 + \log(1 + x^2)}{\tan x - 1 + \cos x} \quad [1]$$

$$8.l) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - e^{\frac{1+3x}{x^2}}\right) \quad [-3]$$