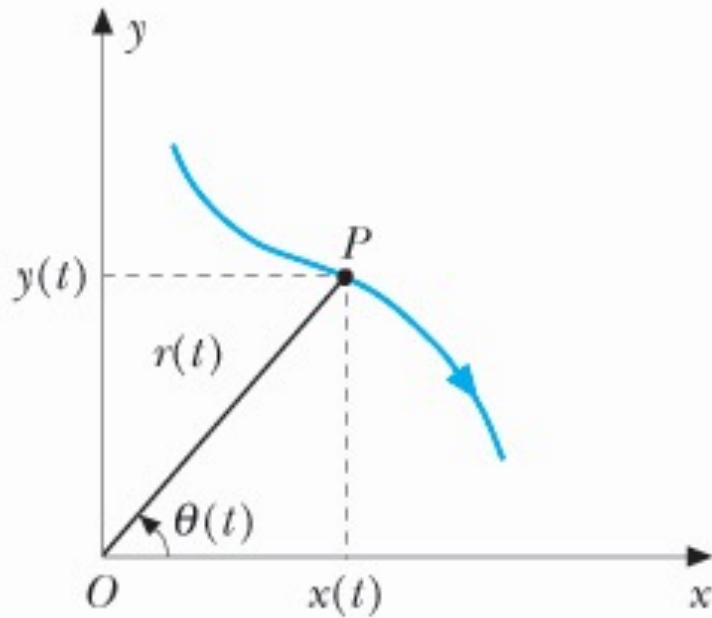


Moto di un Punto Materiale



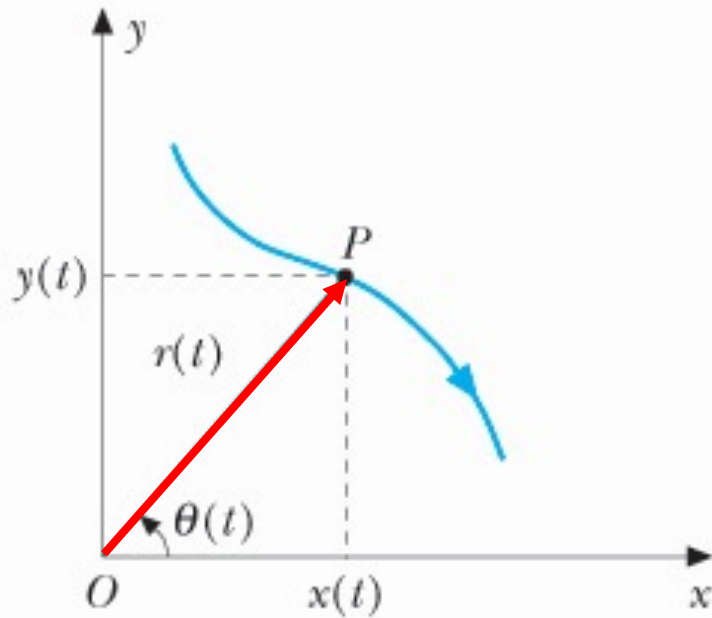
Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di Fisica, Meccanica - Termodinamica
EdiSES, 2007

Moto nel Piano



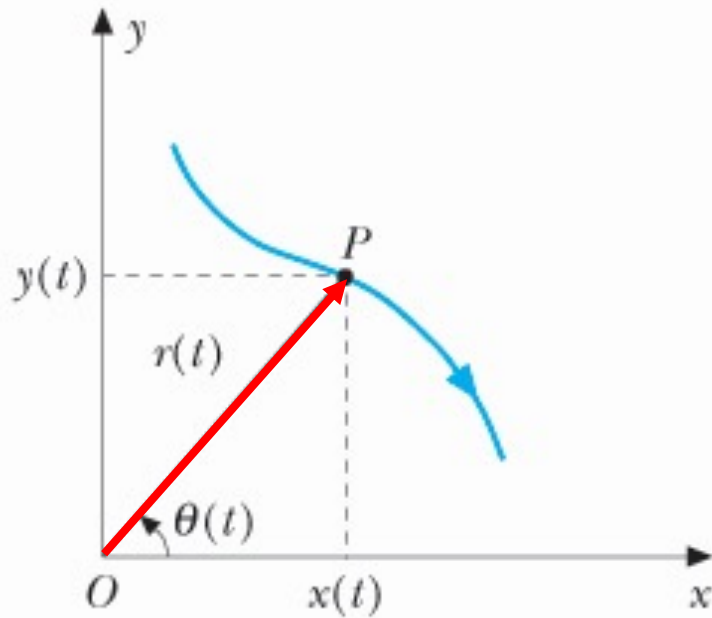
- La direzione istantanea cambia continuamente lungo la traiettoria
- Vettori: $\vec{r}(t)$

Moto nel Piano



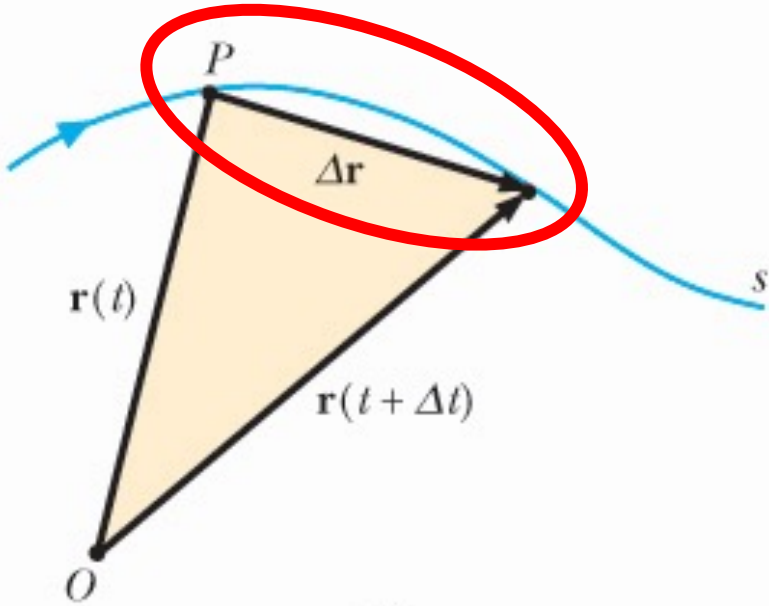
- La direzione istantanea cambia continuamente lungo la traiettoria
- Vettori: $\vec{r}(t)$
- $(x(t), y(t)) \Leftrightarrow (r(t), \theta(t))$
 - $x = r \cos \theta$
 - $y = r \sin \theta$

Moto nel Piano



- La direzione istantanea cambia continuamente lungo la traiettoria
- Vettori: $\vec{r}(t)$
- $(x(t), y(t)) \Leftrightarrow (r(t), \theta(t))$
 - $x = r \cos \theta$
 - $y = r \sin \theta$
- da coordinate cartesiane a coord. polari
 - $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
 - $\tan \theta = \frac{y}{x}$

Moto nel Piano



Il punto materiale si sposta dalla posizione $\vec{r}(t)$ alla posizione $\vec{r}(t + \Delta t)$

La velocità sarà vettoriale

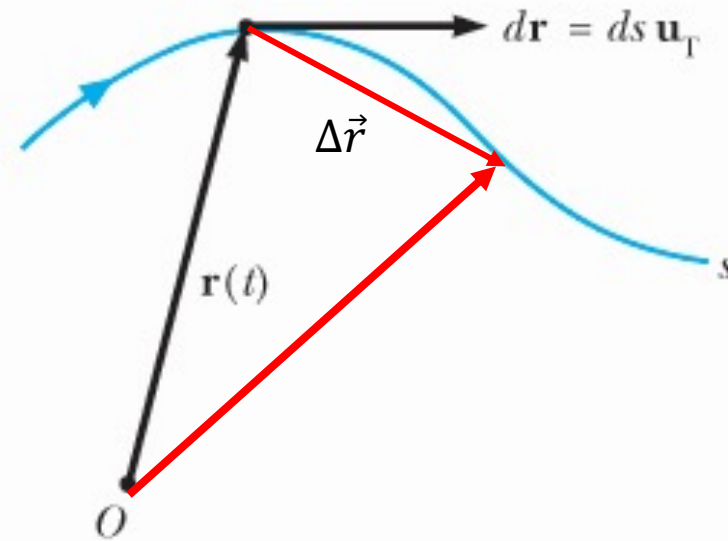
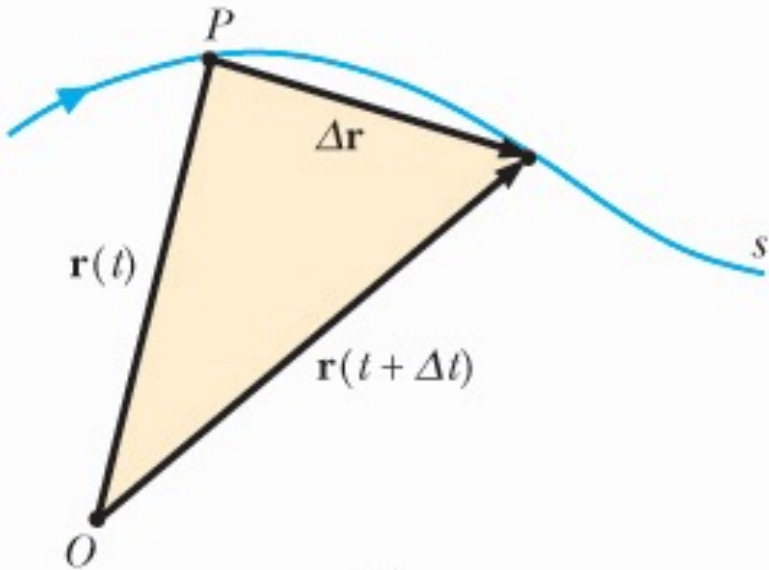
La velocità media: $\vec{v}_m = \frac{(\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t))}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

La velocità istantanea: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$

- Vettore spostamento $\Delta \vec{r}$

Moto nel Piano

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

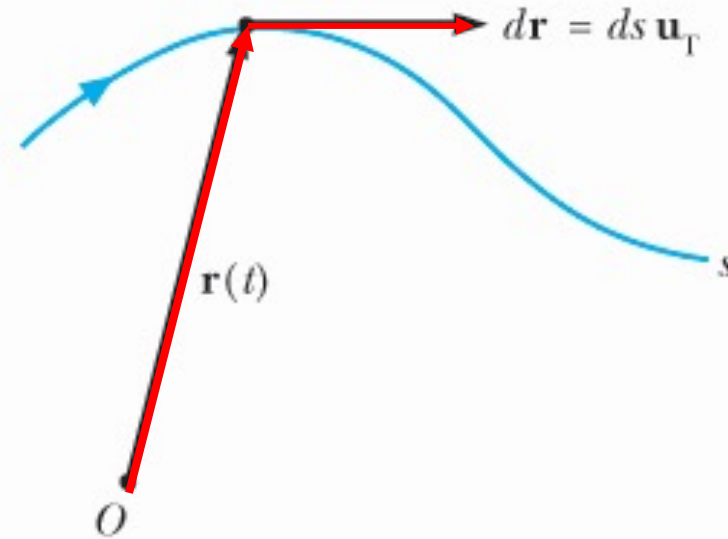
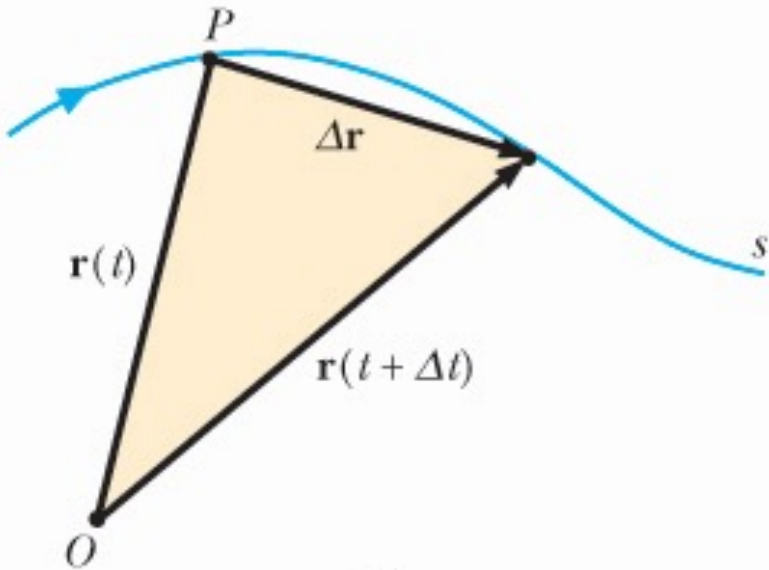


- Vettore spostamento $\Delta \vec{r}$
- $\Delta \vec{r} \rightarrow d\vec{r}$

- Data la traiettoria: s coordinata curvilinea

Moto nel Piano

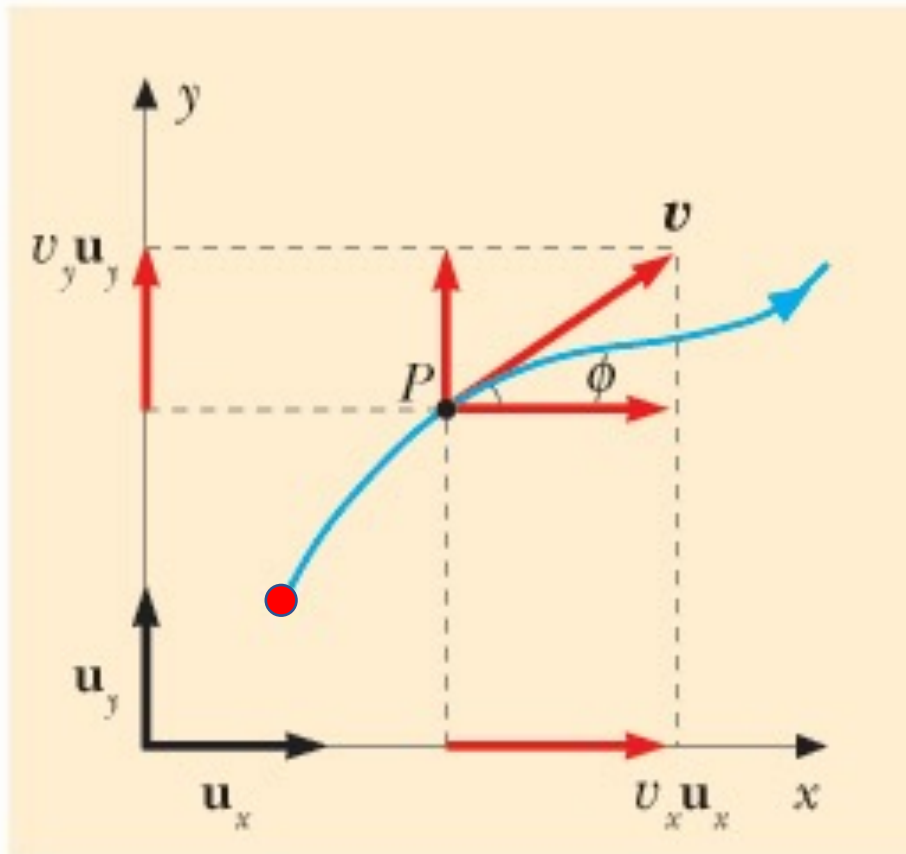
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$



- Vettore spostamento $\Delta \vec{r}$
- $\Delta \vec{r} \rightarrow d\vec{r} = ds \hat{u}_T$

- Data la traiettoria: s coordinata curvilinea

Vettore Velocità

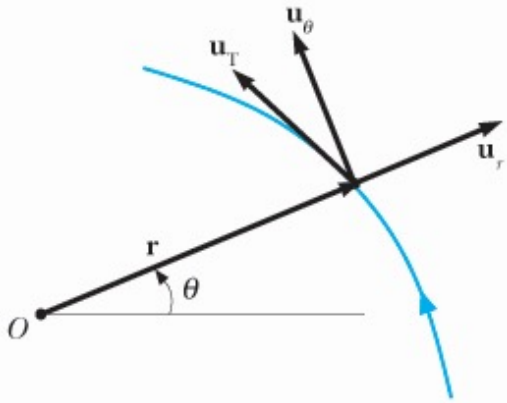


$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

In coordinate Cartesianhe:

$$\vec{v} = \frac{dx(t)}{dt} \hat{u}_x + \frac{dy(t)}{dt} \hat{u}_y$$

Vettore Velocità

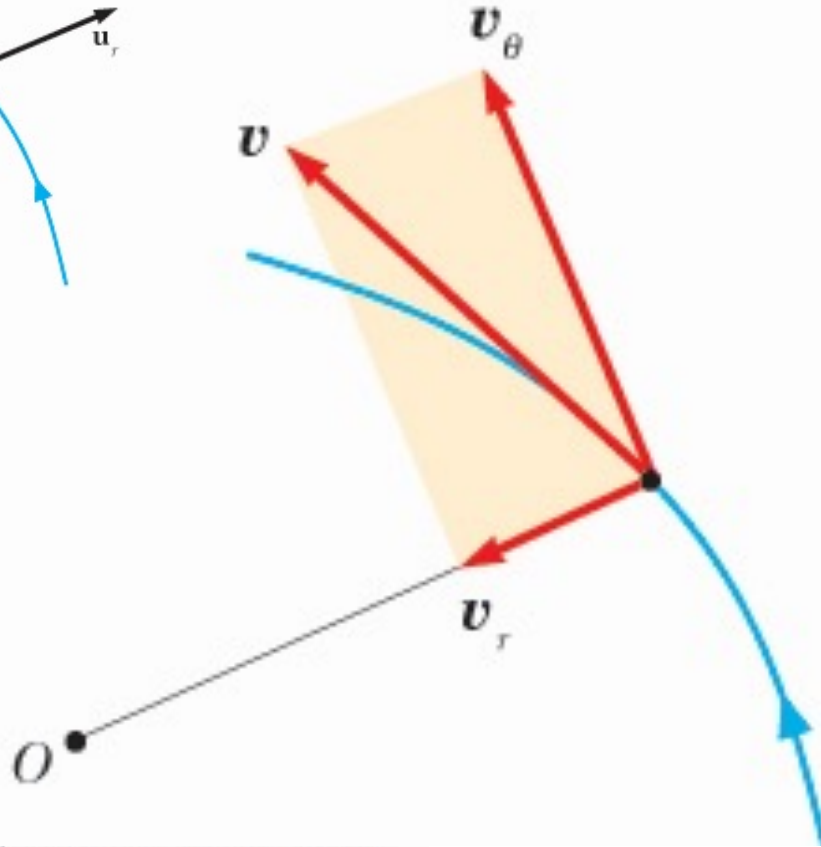


- Studiamo la velocità $\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(r(t)\hat{u}_r)}{dt}$$

In coordinate Polari

$$\vec{v} = \frac{dr(t)}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{u}_\theta$$

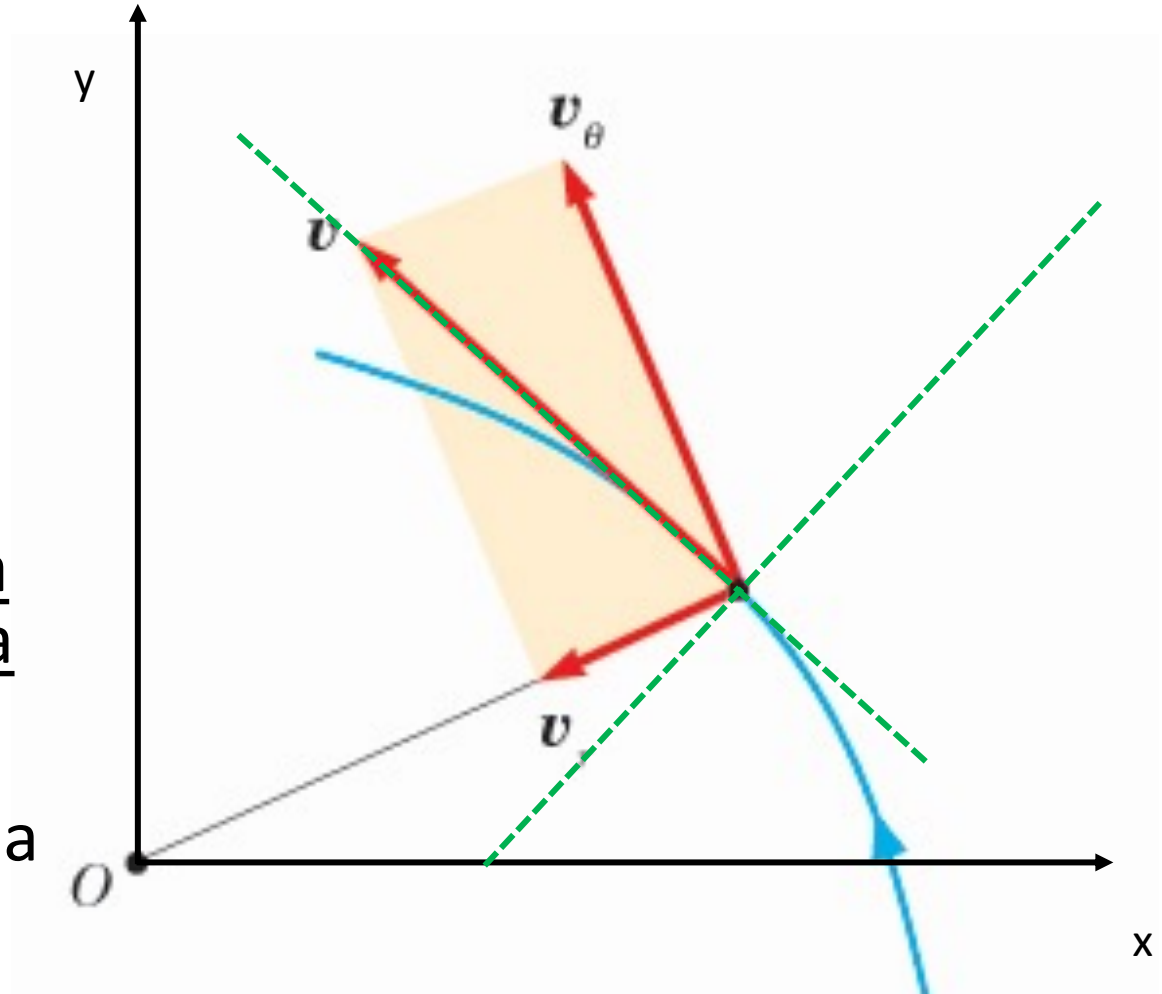


Moto nel Piano: Velocità

- $\vec{r}(t) = r(t)\hat{u}_r + r \cdot \theta(t)\hat{u}_\theta$
- $\vec{v}(t) = v_r(t)\hat{u}_r + v_\theta(t)\hat{u}_\theta$

Ricordiamo che il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria

Fissiamo la direzione tangente alla traiettoria e quella ad essa ortogonale





Se la Velocità Varia si ha l'Accelerazione

- La velocità può variare per due motivi:
 - cambia il modulo
 - cambia la direzione

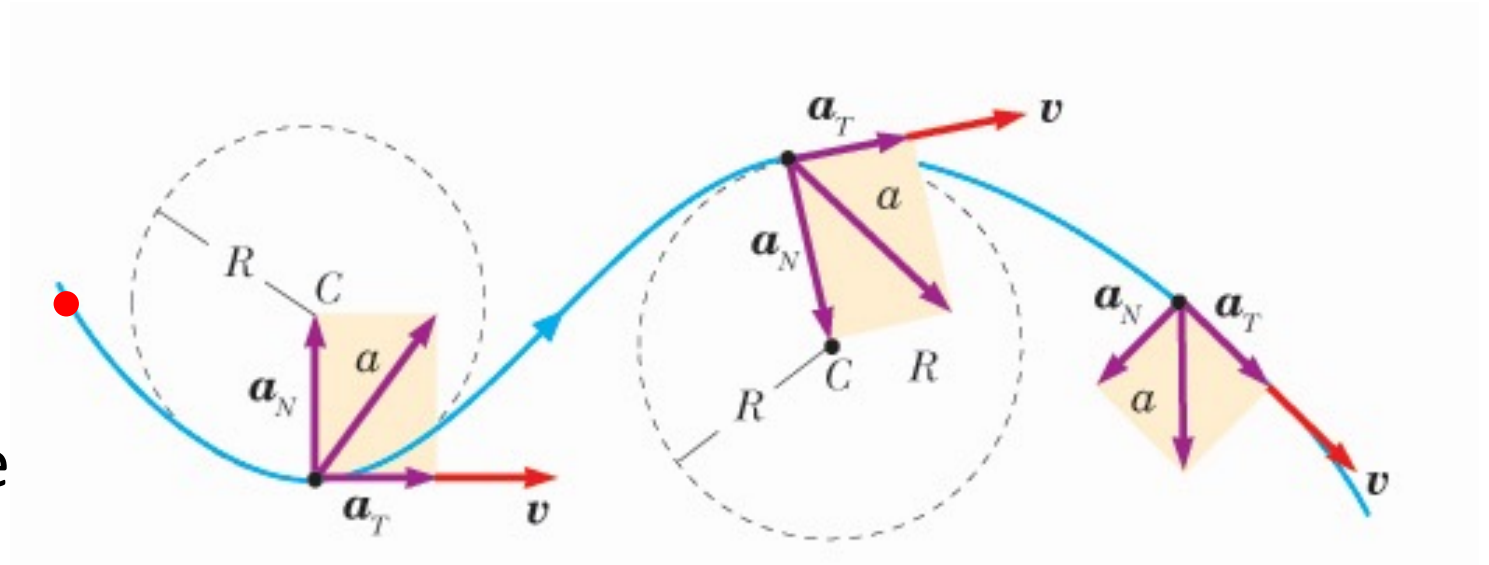
Vettore Accelerazione

- La velocità può variare per due motivi:
 - cambia il modulo
 - cambia la direzione
- La accelerazione avrà due contributi:
 - Dovuto alla variazione in modulo
 - Dovuto alla variazione di direzione

$$\vec{v}(t) = v(t) \cdot \hat{v}(t)$$

Vettore Accelerazione

- La velocità può variare per due motivi:
 - cambia il modulo
 - cambia la direzione
- La accelerazione avrà due contributi:
 - Dovuto alla variazione in modulo
 - Dovuto alla variazione di direzione



Vettore Accelerazione

- La velocità può variare per due motivi:

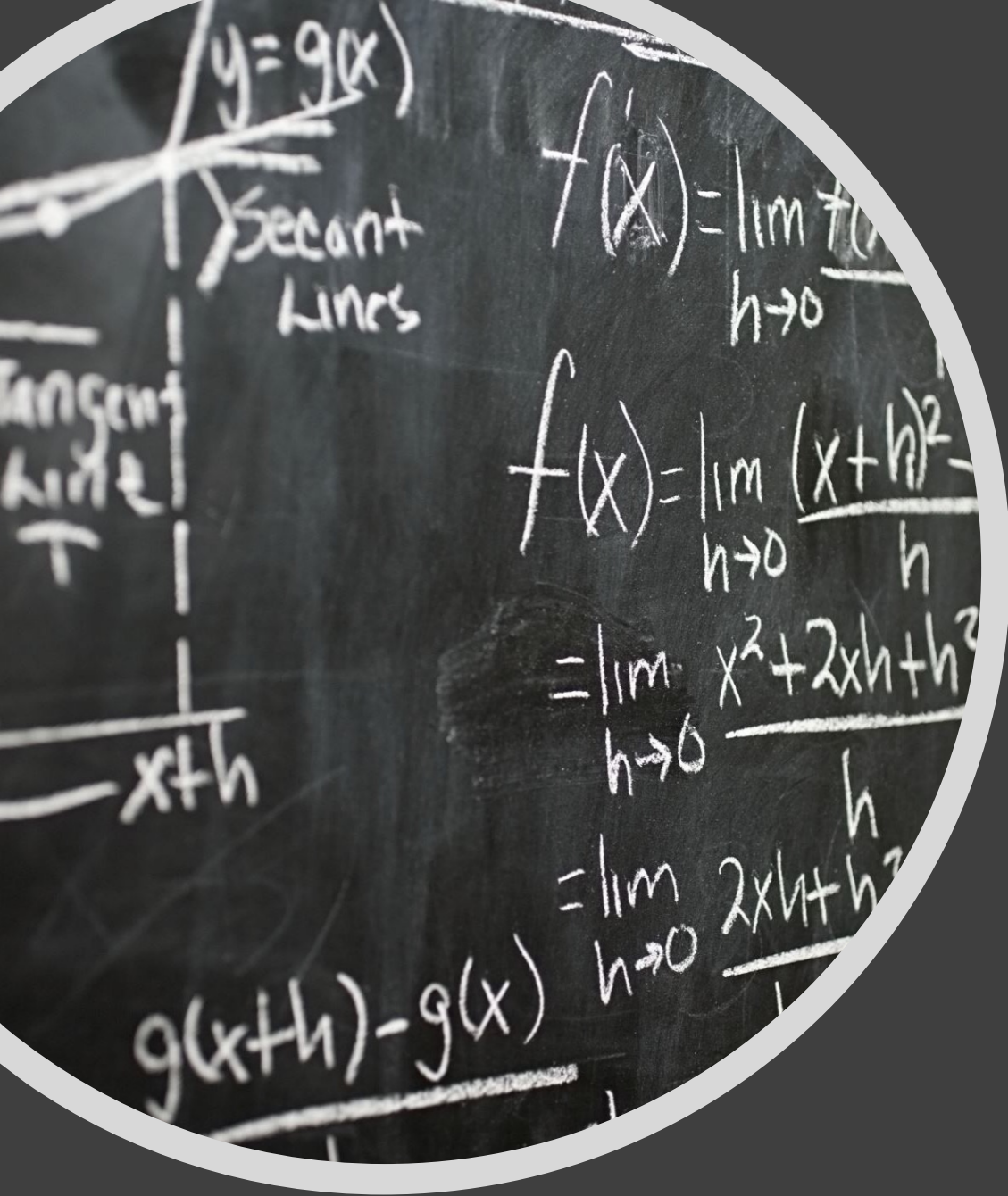
- cambia il modulo
- cambia la direzione

$$\vec{v}(t) = v(t) \cdot \hat{v}(t)$$

- La accelerazione avrà due contributi:

- Dovuto alla variazione in modulo
- Dovuto alla variazione di direzione

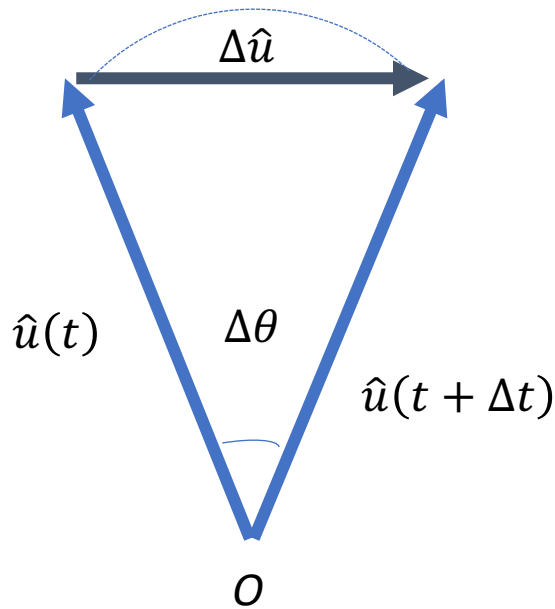
$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \hat{v}(t) + v(t) \cdot \frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$



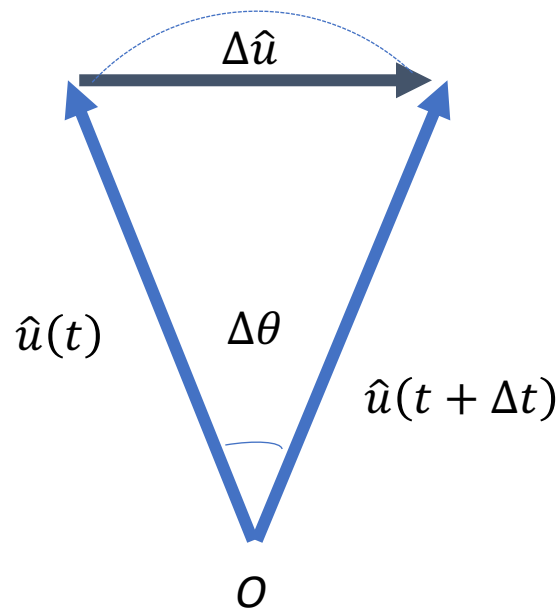
Calcoliamo la
Derivata di un
vettore

Derivata del Vettore di modulo unitario: $\hat{u}(t)$

La derivata è $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{u}}{\Delta t}$



Derivata di un Versore

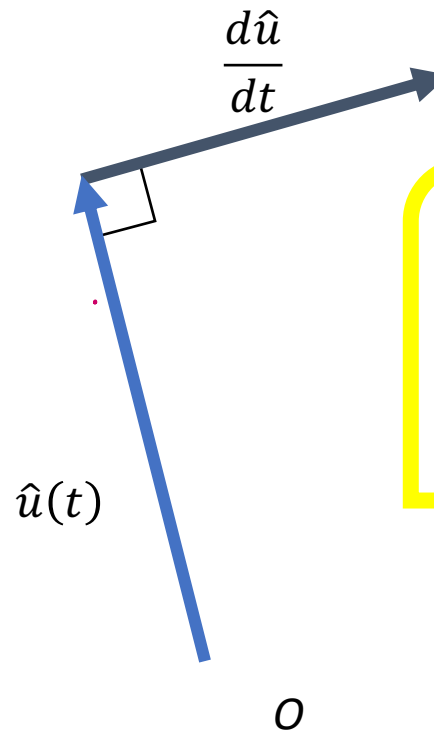
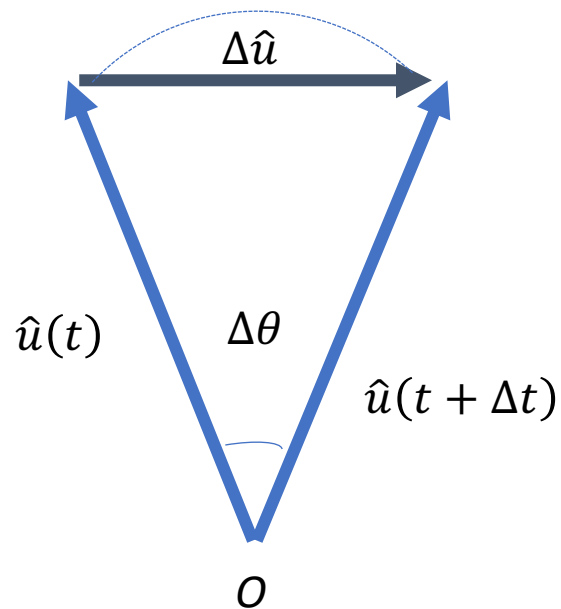


La derivata è $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{u}}{\Delta t}$

- $\Delta \hat{u} = \hat{u}(t + \Delta t) - \hat{u}(t) \quad \Rightarrow |\Delta \hat{u}| = |u(t)| \Delta \theta$
- $du = |u(t)| d\theta \Leftrightarrow d\hat{u} = d\theta \hat{u}_N$
- \hat{u}_N è la direzione di $d\hat{u}$ che risulta perpendicolare a \hat{u}

Derivata di un vettore

- $du = |u(t)|d\theta \Rightarrow d\hat{u} = d\theta \hat{u}_N$



$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_N$$

Vettore Accelerazione

- La velocità può variare per due motivi:

- cambia il modulo
- cambia la direzione

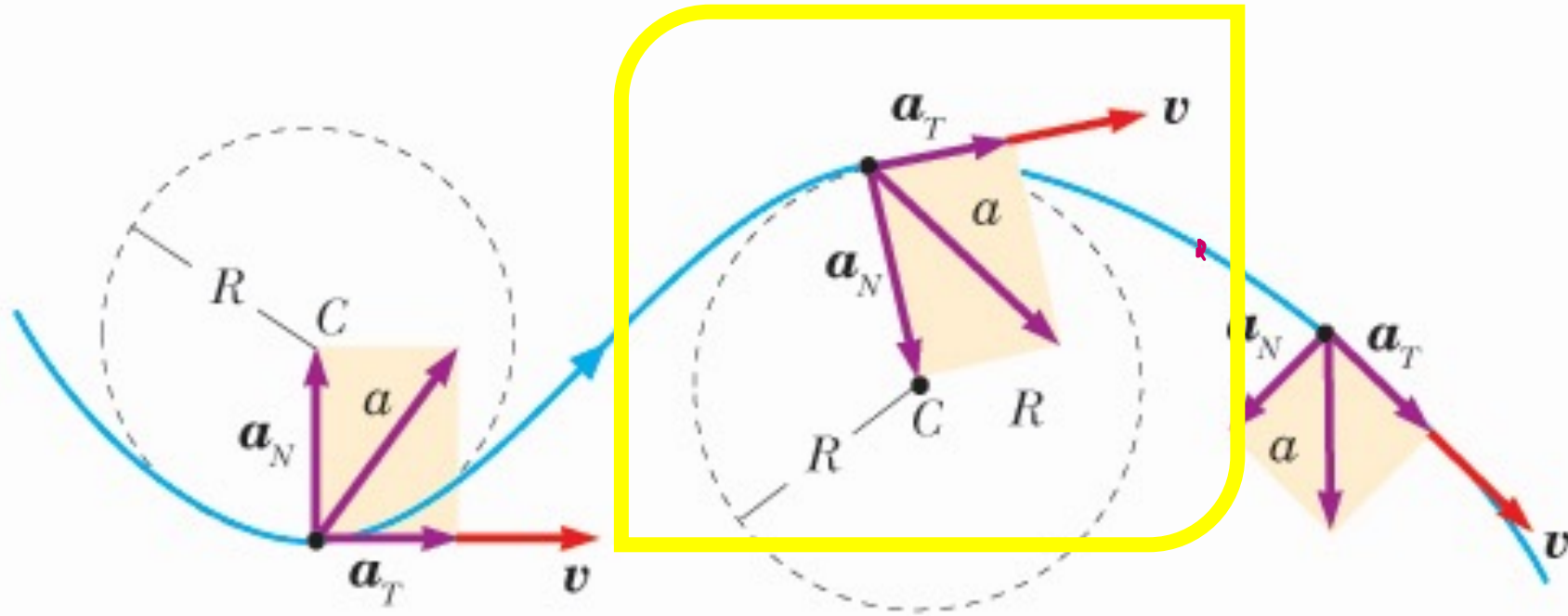
$$\vec{v}(t) = v(t) \cdot \hat{v}(t)$$

- La accelerazione avrà due contributi:

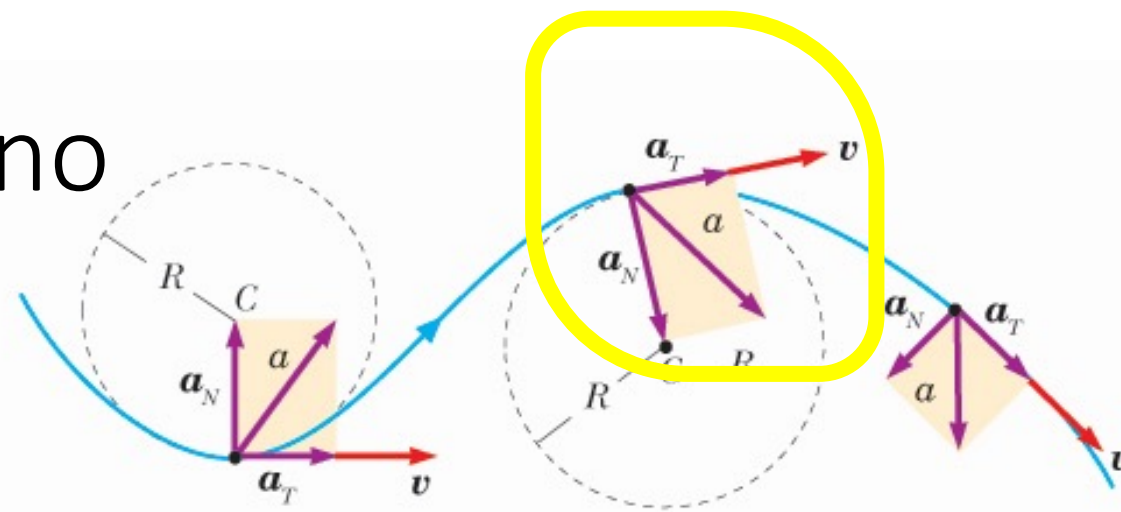
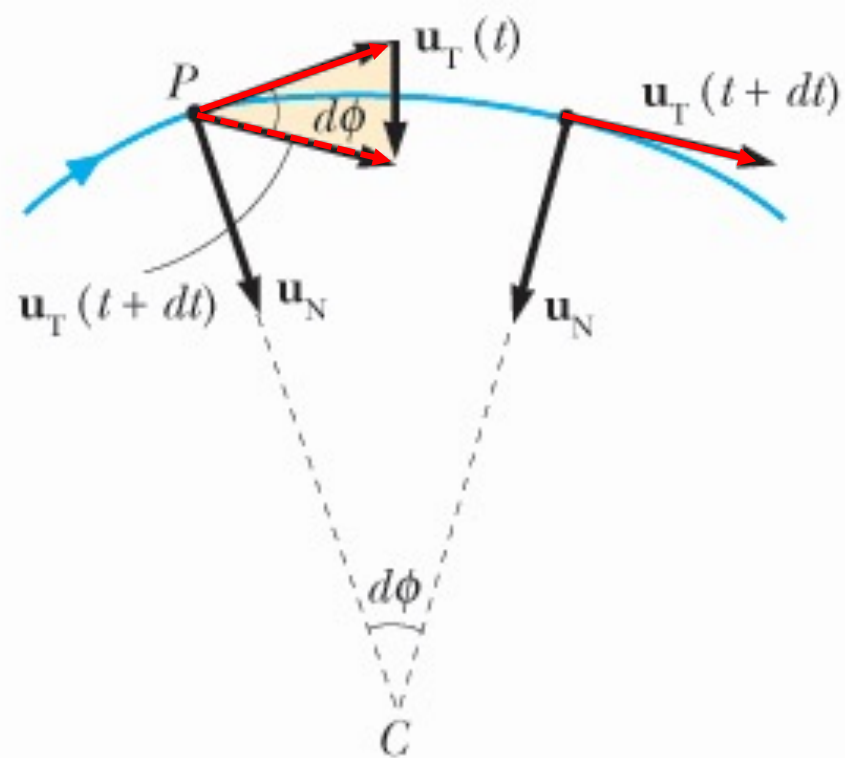
- Dovuto alla variazione in modulo
- Dovuto alla variazione di direzione

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \hat{v}(t) + v(t) \cdot \frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

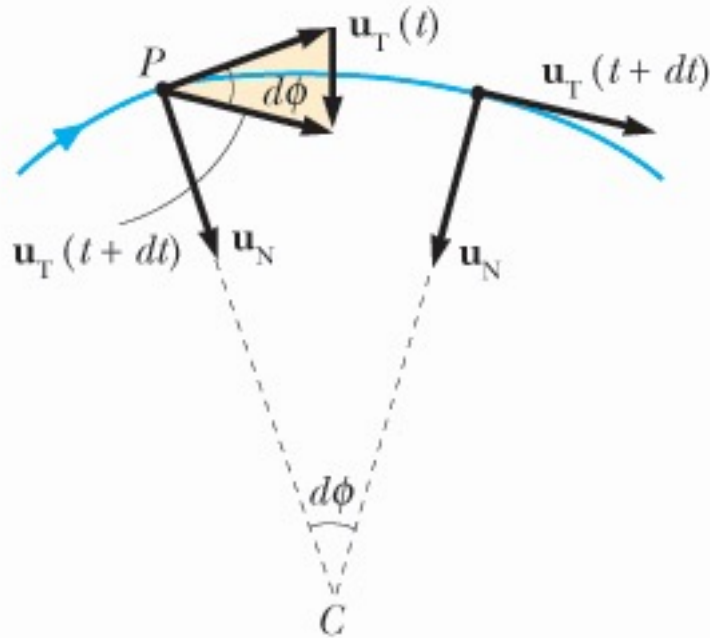
Moto qualsiasi nel piano



Moto qualsiasi nel piano



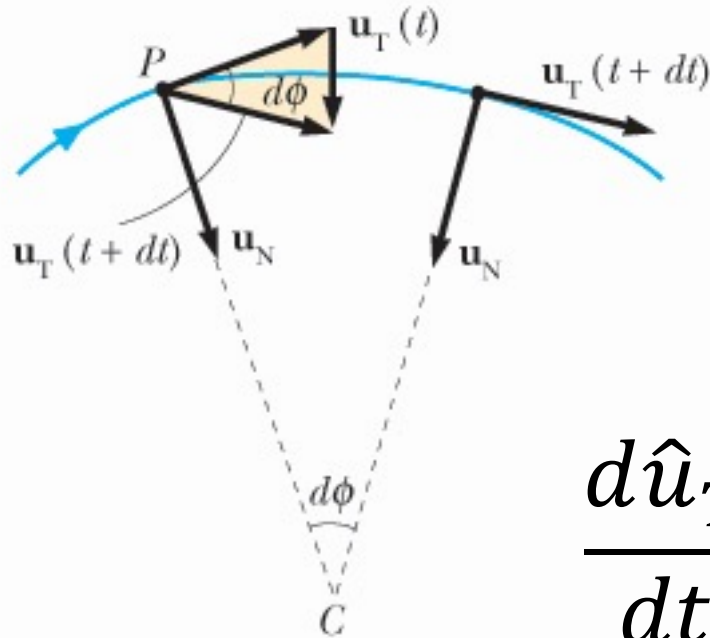
Derivata: cambia la direzione



- Data la direzione del moto definiamo $\hat{u}_T = \hat{v}$
- Introduciamo localmente:
$$\hat{u}_N \perp \hat{u}_T$$
- La variazione della direzione sarà espressa dal vettore ortogonale alla tangente

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{|\hat{u}_T| \cdot d\phi}{dt} \cdot \hat{u}_N = \frac{d\phi}{dt} \cdot \hat{u}_N$$

Derivata: cambia la direzione



$$d\hat{u}_T = \hat{u}(t + dt) - \hat{u}(t)$$

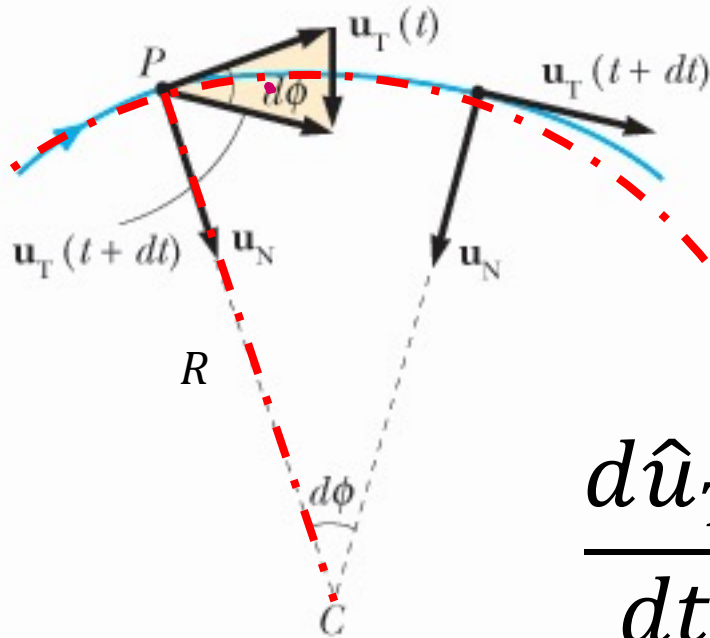
$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{|\hat{u}_T| \cdot d\phi}{dt} \cdot \hat{u}_N = \frac{d\phi}{dt} \cdot \hat{u}_N$$

Derivata: cambia la direzione

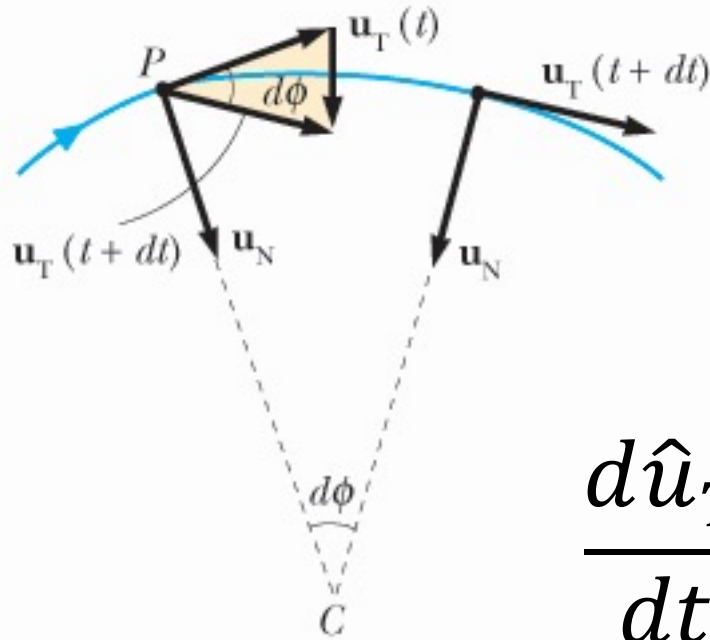
$$d\hat{u}_T = \hat{u}(t + dt) - \hat{u}(t)$$

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{|\hat{u}_T| \cdot d\phi}{dt} \cdot \hat{u}_N = \frac{d\phi}{dt} \cdot \hat{u}_N$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$



Derivata: cambia la direzione



$$d\hat{u}_T = \hat{u}(t + dt) - \hat{u}(t)$$

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{|\hat{u}_T| \cdot d\phi}{dt} \cdot \hat{u}_N = \frac{d\phi}{dt} \cdot \hat{u}_N$$

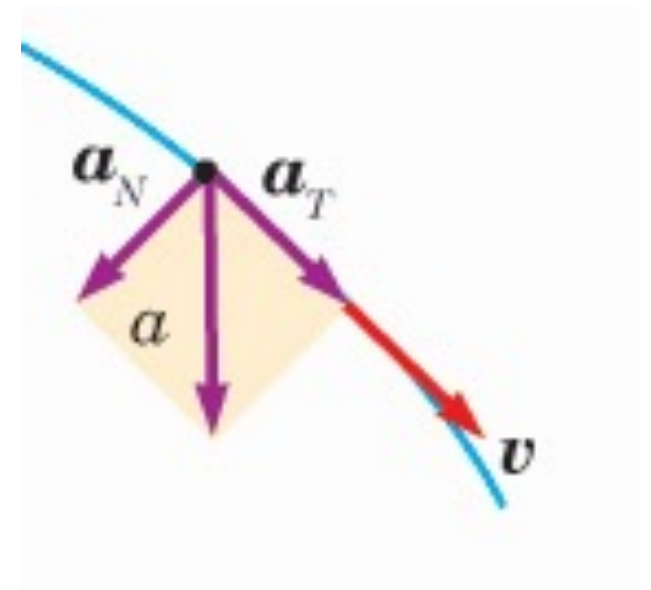
$$\frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{1}{R} v \cdot \hat{u}_N$$

Moto nel Piano: Posizione, Velocità e Accelerazione

- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \hat{v})}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{v} + v \cdot \frac{d\hat{v}}{dt}$

- $\hat{v} = \hat{u}_T$

- $\frac{d\hat{v}}{dt}$ ha direzione $\hat{u}_N \perp \hat{u}_T$



Moto nel Piano: Posizione, Velocità e Accelerazione

$$\bullet \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \hat{v})}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{v} + v \cdot \frac{d\hat{v}}{dt}$$

$$\bullet \vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + \frac{v^2}{R} \cdot \hat{u}_N$$

$$\bullet \vec{a} = a_T \hat{u}_T + a_N \cdot \hat{u}_N$$

