Continuità

Funzioni continue

Definizione di continuità in un punto

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Si dice che la funzione f è ***continua*** in x_0 se

$$\forall I \in I(f(x_0)),\ \exists\, J \in J(x_0) : f(J \cap X) \subseteq I$$

Definizione di continuità in un punto

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Si dice che la funzione f è ***continua*** in x_0 se

$$\forall I \in I(f(x_0)),\ \exists\, J \in J(x_0) : f(J \cap X) \subseteq I$$

Si può dimostrare che f è continua in x_0, se e soltanto se è valida una delle seguenti alternative:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f è regolare in x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$

2. x_0 punto isolato di X.

Si può dimostrare che f è continua in x_0, se e soltanto se è valida una delle seguenti alternative:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f è regolare in x_0 e
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$
2. x_0 punto isolato di X.

Si può dimostrare che f è continua in x_0, se e soltanto se è valida una delle seguenti alternative:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f è regolare in x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$

2. x_0 punto isolato di X.

Si può dimostrare che f è continua in x_0, se e soltanto se è valida una delle seguenti alternative:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f è regolare in x_0 e
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$
2. x_0 punto isolato di X.

Definizione di continuità

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$

Si dice che f è continua in X se essa è continua in tutti i punti di X.

Definizione di continuità

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$

Si dice che f è continua in X se essa è continua in tutti i punti di X.

Teoremi

Teorema
Le funzioni elementari sono continue nei rispettivi insiemi di definizione.

Teorema
Somma algebrica, prodotto, rapporto e composta di funzioni continue è continua.

Teoremi

Teorema
Le funzioni elementari sono continue nei rispettivi insiemi di definizione.

Teorema
Somma algebrica, prodotto, rapporto e composta di funzioni continue è continua.

Punti di discontinuità

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X.

Se f non è continua in x_0, si dice che x_0 è un punto di discontinuità

- **eliminabile** se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$;
- **non eliminabile** altrimenti. In particolare la discontinuità è
  - **di I specie** se

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1, \; \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$

$$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \; \ell_1 \neq \ell_2;$$

  - **di II specie** negli altri casi.

Punti di discontinuità

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X.

Se f non è continua in x_0, si dice che x_0 è un punto di discontinuità

- **eliminabile** se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$;
- **non eliminabile** altrimenti. In particolare la discontinuità è
  - **di I specie** se
$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1, \ \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$
$$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \ \ell_1 \neq \ell_2;$$
  - **di II specie** negli altri casi.

Punti di discontinuità

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X.

Se f non è continua in x_0, si dice che x_0 è un punto di discontinuità

- **eliminabile** se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$;
- **non eliminabile** altrimenti. In particolare la discontinuità è
  - **di I specie** se
    $$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1, \ \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$
    $$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \ \ell_1 \neq \ell_2;$$
  - **di II specie** negli altri casi.

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X.

Se f non è continua in x_0, si dice che x_0 è un punto di discontinuità

- **eliminabile** se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$;
- **non eliminabile** altrimenti. In particolare la discontinuità è
  - **di I specie** se
$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1, \ \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$
$$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \ \ell_1 \neq \ell_2;$$
  - **di II specie** negli altri casi.

Punti di discontinuità

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X.

Se f non è continua in x_0, si dice che x_0 è un punto di discontinuità

- **eliminabile** se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$;
- **non eliminabile** altrimenti. In particolare la discontinuità è
  - **di I specie** se
  $$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1, \ \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$
  $$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \ \ell_1 \neq \ell_2;$$
  - **di II specie** negli altri casi.

Punti di discontinuità

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X.

Se f non è continua in x_0, si dice che x_0 è un punto di discontinuità

- **eliminabile** se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$;
- **non eliminabile** altrimenti. In particolare la discontinuità è
  - **di I specie** se
  $$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1, \ \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$
  $$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \ \ell_1 \neq \ell_2;$$
  - **di II specie** negli altri casi.

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X.

Se f non è continua in x_0, si dice che x_0 è un punto di discontinuità

- **eliminabile** se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$;
- **non eliminabile** altrimenti. In particolare la discontinuità è
  - **di I specie** se
    $$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1, \ \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$
    $$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \ \ell_1 \neq \ell_2;$$
  - **di II specie** negli altri casi.

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X.

Se f non è continua in x_0, si dice che x_0 è un punto di discontinuità

- **eliminabile** se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$;
- **non eliminabile** altrimenti. In particolare la discontinuità è
  - **di I specie** se

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1, \ \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$
$$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \ \ell_1 \neq \ell_2;$$

  - **di II specie** negli altri casi.

Punti di discontinuità

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X.

Se f non è continua in x_0, si dice che x_0 è un punto di discontinuità

- **eliminabile** se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$;
- **non eliminabile** altrimenti. In particolare la discontinuità è
  - **di I specie** se
    $$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1, \ \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$
    $$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \ \ell_1 \neq \ell_2;$$
  - **di II specie** negli altri casi.

Punti di discontinuità

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X.

Se f non è continua in x_0, si dice che x_0 è un punto di discontinuità

- **eliminabile** se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$;
- **non eliminabile** altrimenti. In particolare la discontinuità è
  - **di I specie** se
  $$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1, \ \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$
  $$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \ \ell_1 \neq \ell_2;$$
  - **di II specie** negli altri casi.