ESERCITAZIONE 6: applicazioni lineari

ESERCIZIO 1. Stabilire quale delle seguenti applicazioni è lineare:

$$\begin{aligned} &L_1 : V^2 \longrightarrow V^3 \qquad L_1(x, y) = (x^2 - y, 3x, 0), \\ &L_2 : V^2 \longrightarrow V^2 \qquad L_3(x, y) = (x - y, 3x + 1), \\ &L_3 : V^3 \longrightarrow V^3 \qquad L_1(x, y, z) = (4x + y, z - x, 0). \end{aligned}$$

Determinare per ognuna l'immagine dei vettori della base canonica. Scrivere poi la matrice associata all'applicazione lineare.

ESERCIZIO 2. Scrivere la legge delle applicazioni lineari associate ad ognuna delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinarne poi nucleo e immagine e verificare la relazione di Grassman.

ESERCIZIO 3. Scrivere le matrici associate alle applicazioni lineari:

$$\begin{aligned} &L_1 : \mathbb{V}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (x + 2y, 4x + 5y + z) \in \mathbb{V}^2, \\ &L_2 : \mathbb{V}^3 \ni (x, y, z) \mapsto x - y + 2z \in \mathbb{V}^1. \end{aligned}$$

Determinarne poi nucleo e immagine e verificare la relazione di Grassman.

ESERCIZIO 4. Data l'applicazione lineare associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix},$$

dire se

- il vettore $(5, -2, 25, 8)^t$ appartiene al nucleo,
- il vettore $(1, 0, 0, -1)$ è un autovettore.

ESERCIZIO 5. Scrivere la legge delle applicazioni lineari determinate dalle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.,$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -1/2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Per ognuna di esse, determinare

5.i) l'immagine dei vettori della base canonica,
5.ii) la dimensione dei sottospazi nucleo e immagine,
5.iii) una base del nucleo,

5.iv) una base dell'immagine,
5.v) gli eventuali autovettori e, per ognuno di essi, l'autospazio associato.
Dire infine quali sono diagonalizzabili.

ESERCIZIO 6. Si consideri l'applicazione lineare $L : V^3 \to V^3$ di legge

$$L(x, y, z) = (x + z, -2x - 2z, x + 3y + 2z).$$

a) Scrivere la matrice associata all'applicazione lineare.
b) Stabilire, motivando la risposta, se l'applicazione è iniettiva.
c) Trovarne almeno un autovalore e descrivere l'autospazio relativo.

ESERCIZIO 7.

7.I) Si consideri l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si stabilisca, <u>motivando la risposta</u>, se tale applicazione è iniettiva, precisando anche quali sono le dimensioni di nucleo e immagine. Si fornisca poi una base dell'immagine.

7.II) Si consideri l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si stabilisca, <u>motivando la risposta</u>, se tale applicazione è suriettiva, precisando anche quali sono le dimensioni di nucleo e immagine. Si fornisca poi una base del nucleo.

7.III) Si consideri l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si stabilisca, <u>motivando la risposta</u>, se tale applicazione è suriettiva, precisando anche quali sono le dimensioni di nucleo e immagine. Si fornisca poi una base del nucleo.

ESERCIZIO 8. Sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Calcolare la matrice prodotto $C = A\,B$.
ii) Stabilire se l'applicazione lineare associata alla matrice C è suriettiva.
iii) Stabilire se il vettore $\vec{v} = (-1, 1, 0, 1)^T$ appartiene all'immagine di tale applicazione lineare.

ESERCIZIO 9. Sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Calcolare la matrice prodotto $C = A\,B$.
ii) Stabilire se l'applicazione lineare associata alla matrice C è iniettiva.
iii) Stabilire se il vettore $\vec{v} = (1, 0, -2)^T$ appartiene all'immagine di tale applicazione lineare.

ESERCIZIO 10. Si determinino gli autovalori delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si scelga poi un autovalore per ciascuna matrice e si determini una base dell'autospazio relativo.