Limiti

Esempio 1

Sia

$$f_1(x) = x - 2$$

$E[f] = \mathcal{R}$. Valutiamo $f_1(x)$ in corrispondenza di valori per la x vicini a 1:

x	$f_1(x) = x - 2$
1.1	-0.9
1.01	-0.99
1.001	-0.999
1.0001	-0.9999

Per valori di x sempre più prossimi a 1 il valore di $f_1(x)$ è sempre più vicino a -1.

Esempio 1

Sia

$$f_1(x) = x - 2$$

$E[f] = \mathcal{R}$. Valutiamo $f_1(x)$ in corrispondenza di valori per la x vicini a 1:

x	$f_1(x) = x - 2$
1.1	-0.9
1.01	-0.99
1.001	-0.999
1.0001	-0.9999

Per valori di x sempre più prossimi a 1 il valore di $f_1(x)$ è sempre più vicino a -1.

Esempio 1

Scriveremo:

$$\lim_{x \to 1} f_1(x) = -1$$

NOTA: la funzione è definita in 1 e

$$f_1(1) = -1 = \lim_{x \to 1} f_1(x)$$

Esempio 2

Sia

$$f_2(x) = \begin{cases} x - 2, & x \neq 1 \\ 10, & x = 1 \end{cases}$$

$E[f_2] = \mathcal{R}$.
Scriviamo ancora

$$\lim_{x \to 1} f_2(x) = -1$$

NOTA: la funzione risulta definita in 1 e vale

$$f_2(1) = 10 \neq -1 = \lim_{x \to 1} f_2(x)$$

Esempio 2

Sia

$$f_2(x) = \begin{cases} x - 2, & x \neq 1 \\ 10, & x = 1 \end{cases}$$

$E[f_2] = \mathcal{R}$.

Scriviamo ancora

$$\lim_{x \to 1} f_2(x) = -1$$

NOTA: la funzione risulta definita in 1 e vale

$$f_2(1) = 10 \neq -1 = \lim_{x \to 1} f_2(x)$$

Esempio 2

Sia

$$f_2(x) = \begin{cases} x - 2, & x \neq 1 \\ 10, & x = 1 \end{cases}$$

$E[f_2] = \mathcal{R}$.
Scriviamo ancora

$$\lim_{x \to 1} f_2(x) = -1$$

NOTA: la funzione risulta definita in 1 e vale

$$f_2(1) = 10 \neq -1 = \lim_{x \to 1} f_2(x)$$

Esempio 2

Sia

$$f_2(x) = \begin{cases} x - 2, & x \neq 1 \\ 10, & x = 1 \end{cases}$$

$E[f_2] = \mathcal{R}$.
Scriviamo ancora

$$\lim_{x \to 1} f_2(x) = -1$$

NOTA: la funzione risulta definita in 1 e vale

$$f_2(1) = 10 \neq -1 = \lim_{x \to 1} f_2(x)$$

Esempio 3

Sia

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$E[f_3] = \mathcal{R} - \{1\}$. Valutiamo la funzione vicino ad 1:

x	$f_3(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$
1.1	-0.9
1.01	-0.99
1.001	-0.999
1.0001	-0.9999
1.00001	-0.99999

Per valori di x sempre più prossimi ad 1 il valore di $f(x)$ è sempre più vicino a -1.

Esempio 3

Sia

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$E[f_3] = \mathcal{R} - \{1\}$. Valutiamo la funzione vicino ad 1:

x	$f_3(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$
1.1	-0.9
1.01	-0.99
1.001	-0.999
1.0001	-0.9999
1.00001	-0.99999

Per valori di x sempre più prossimi ad 1 il valore di $f(x)$ è sempre più vicino a -1.

Esempio 3

Sia

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$E[f_3] = \mathcal{R} - \{1\}$. Valutiamo la funzione vicino ad 1:

x	$f_3(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$
1.1	-0.9
1.01	-0.99
1.001	-0.999
1.0001	-0.9999
1.00001	-0.99999

Per valori di x sempre più prossimi ad 1 il valore di $f(x)$ è sempre più vicino a -1.

Esempio 3

Sia

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$E[f_3] = \mathcal{R} - \{1\}$. Valutiamo la funzione vicino ad 1:

x	$f_3(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$
1.1	-0.9
1.01	-0.99
1.001	-0.999
1.0001	-0.9999
1.00001	-0.99999

Per valori di x sempre più prossimi ad 1 il valore di $f(x)$ è sempre più vicino a -1.

Esempio 3

Scriviamo ancora

$$\lim_{x \to 1} f_3(x) = -1$$

NOTA: la funzione non è definita in 1.

Esempio 3

Scriviamo ancora

$$\lim_{x \to 1} f_3(x) = -1$$

NOTA: la funzione non è definita in 1.

Esempio 4

Sia

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)}, & x \neq 1 \\ 10, & x = 1 \end{cases}$$

$E[f] = \mathcal{R}$. In punti prossimi ad 1 la funzione f_4 assume gli stessi valori di f_3.
Scriveremo ancora

$$\lim_{x \to 1} f_4(x) = -1$$

NOTA: la funzione è definita in 1 e vale

$$f_4(1) = 10 \neq -1 = \lim_{x \to 1} f_4(x)$$

Esempio 4

Sia

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)}, & x \neq 1 \\ 10, & x = 1 \end{cases}$$

$E[f] = \mathcal{R}$. In punti prossimi ad 1 la funzione f_4 assume gli stessi valori di f_3.
Scriveremo ancora

$$\lim_{x \to 1} f_4(x) = -1$$

NOTA: la funzione è definita in 1 e vale

$$f_4(1) = 10 \neq -1 = \lim_{x \to 1} f_4(x)$$

Esempio 4

Sia

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)}, & x \neq 1 \\ 10, & x = 1 \end{cases}$$

$E[f] = \mathcal{R}$. In punti prossimi ad 1 la funzione f_4 assume gli stessi valori di f_3.

Scriveremo ancora

$$\lim_{x\to 1} f_4(x) = -1$$

NOTA: la funzione è definita in 1 e vale

$$f_4(1) = 10 \neq -1 = \lim_{x\to 1} f_4(x)$$

Esempio 4

Sia

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)}, & x \neq 1 \\ 10, & x = 1 \end{cases}$$

$E[f] = \mathcal{R}$. In punti prossimi ad 1 la funzione f_4 assume gli stessi valori di f_3.
Scriveremo ancora

$$\lim_{x \to 1} f_4(x) = -1$$

NOTA: la funzione è definita in 1 e vale

$$f_4(1) = 10 \neq -1 = \lim_{x \to 1} f_4(x)$$

Esempio 4

Sia

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)}, & x \neq 1 \\ 10, & x = 1 \end{cases}$$

$E[f] = \mathcal{R}$. In punti prossimi ad 1 la funzione f_4 assume gli stessi valori di f_3.

Scriveremo ancora

$$\lim_{x \to 1} f_4(x) = -1$$

NOTA: la funzione è definita in 1 e vale

$$f_4(1) = 10 \neq -1 = \lim_{x \to 1} f_4(x)$$

Esempio 5

Sia

$$f_5(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$$

$E[f] = \mathcal{R}$. In punti prossimi ad 1 la funzione f_5 assume gli stessi valori di f_3.

Scriveremo ancora

$$\lim_{x \to 1} f_5(x) = -1$$

NOTA: la funzione è definita in 1 e

$$f_5(1) = -1 = \lim_{x \to 1} f_5(x)$$

Esempio 5

Sia

$$f_5(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$$

$E[f] = \mathcal{R}$. In punti prossimi ad 1 la funzione f_5 assume gli stessi valori di f_3.

Scriveremo ancora

$$\lim_{x \to 1} f_5(x) = -1$$

NOTA: la funzione è definita in 1 e

$$f_5(1) = -1 = \lim_{x \to 1} f_5(x)$$

Esempio 5

Sia

$$f_5(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$$

$E[f] = \mathcal{R}$. In punti prossimi ad 1 la funzione f_5 assume gli stessi valori di f_3.

Scriveremo ancora

$$\lim_{x\to 1} f_5(x) = -1$$

NOTA: la funzione è definita in 1 e

$$f_5(1) = -1 = \lim_{x\to 1} f_5(x)$$

Esempio 5

Sia

$$f_5(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$$

$E[f] = \mathcal{R}$. In punti prossimi ad 1 la funzione f_5 assume gli stessi valori di f_3.
Scriveremo ancora

$$\lim_{x \to 1} f_5(x) = -1$$

NOTA: la funzione è definita in 1 e

$$f_5(1) = -1 = \lim_{x \to 1} f_5(x)$$

Esempio 5

Sia

$$f_5(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$$

$E[f] = \mathcal{R}$. In punti prossimi ad 1 la funzione f_5 assume gli stessi valori di f_3.

Scriveremo ancora

$$\lim_{x \to 1} f_5(x) = -1$$

NOTA: la funzione è definita in 1 e

$$f_5(1) = -1 = \lim_{x \to 1} f_5(x)$$

Per tutte le funzioni $f_i(x), i = 1, 2, \ldots, 5$ considerate:

$$\lim_{x \to 1} f_i(x) = -1$$

- la funzione è definita in punti "vicini" ad $x_0 = 1$;
- i valori assunti dalla funzione si avvicinano a -1 per valori di x sempre più vicini ad 1;
- indifferentemente da quello che accade per $x_0 = 1$, può accadere che:
  - $1 \notin E[f]$;
  - $1 \in E[f]$;
    il valore del limite e della funzione:
    - coincidono;
    - non coincidono.

Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

Si dice che la funzione è regolare in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e ammette limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se

$$\forall J \in I(\ell), \exists I \in I(x_0) :$$

$$\forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in J$$

Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

Si dice che la funzione è regolare in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e ammette limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se

$$\forall J \in I(\ell), \exists I \in I(x_0) :$$

$$\forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in J$$

Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

Si dice che la funzione è regolare in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e ammette limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se

$$\forall J \in I(\ell), \exists I \in I(x_0) :$$

$$\forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in J$$

Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

Si dice che la funzione è regolare in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e ammette limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se

$$\forall J \in I(\ell), \exists I \in I(x_0) :$$

$$\forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in J$$

Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

Si dice che la funzione è regolare in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e ammette limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se

$$\forall J \in I(\ell), \exists I \in I(x_0) :$$

$$\forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in J$$

Definizione generale di limite

Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

Si dice che la funzione è regolare in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e ammette limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se

$$\forall J \in I(\ell), \exists I \in I(x_0) :$$

$$\forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in J$$

Definizione generale di limite

Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

Si dice che la funzione è regolare in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e ammette limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se

$$\forall J \in I(\ell), \exists I \in I(x_0) :$$

$$\forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in J$$

Definizione generale di limite

Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

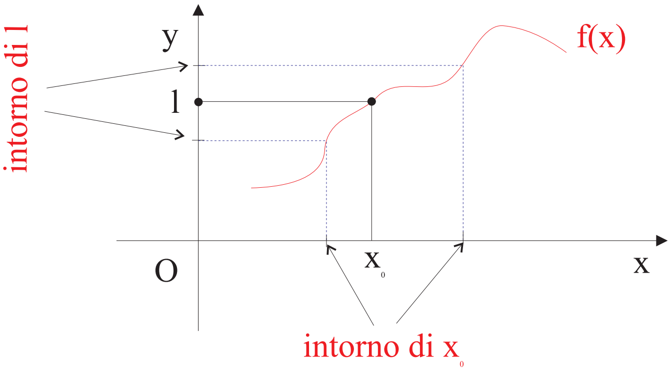
Si dice che la funzione è regolare in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e ammette limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

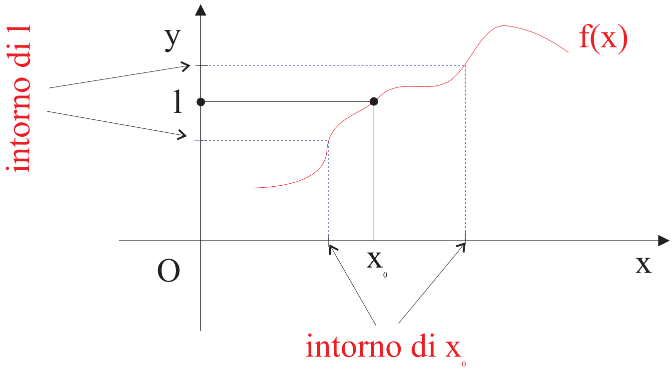
se

$$\forall J \in I(\ell), \exists I \in I(x_0) :$$

$$\forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in J$$



La funzione $f(x)$ assume valori sempre più vicini ad ℓ man mano che x si avvicina a x_0.



La funzione $f(x)$ assume valori sempre più vicini ad ℓ man mano che x si avvicina a x_0.

Funzione convergente in x_0

Sia $f(x)$ una funzione definita in X e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per X.
Si dice che f converge ad $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende a x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 :$$

$$\forall x \in X \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Funzione convergente in x_0

Sia $f(x)$ una funzione definita in X e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per X.
Si dice che f converge ad $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende a x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$$

$$\forall x \in X \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Funzione convergente in x_0

Sia $f(x)$ una funzione definita in X e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per X.
Si dice che f converge ad $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende a x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$$

$$\forall x \in X \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Funzione divergente positivamente in x_0

Sia $f(x)$ una funzione definita in X e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per X.

Si dice che f diverge positivamente per x che tende a x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall K > 0 \; \exists \delta > 0 :$$

$$\forall x \in X \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}) \Rightarrow f(x) > K$$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per X.
Si dice che f diverge positivamente per x che tende a x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall K > 0 \; \exists \delta > 0 :$$

$$\forall x \in X \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}) \Rightarrow f(x) > K$$

Funzione divergente positivamente in x_0

Sia $f(x)$ una funzione definita in X e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per X.
Si dice che f diverge positivamente per x che tende a x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall K > 0 \; \exists \delta > 0 :$$

$$\forall x \in X \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}) \Rightarrow f(x) > K$$

Funzione divergente negativamente in x_0

Sia $f(x)$ una funzione definita in X e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per X.
Si dice che f diverge negativamente per x che tende a x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists \delta > 0 :$$

$$\forall x \in X \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}) \Rightarrow f(x) < -K$$

Funzione divergente negativamente in x_0

Sia $f(x)$ una funzione definita in X e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per X.
Si dice che f diverge negativamente per x che tende a x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists \delta > 0 :$$

$$\forall x \in X \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}) \Rightarrow f(x) < -K$$

Funzione divergente negativamente in x_0

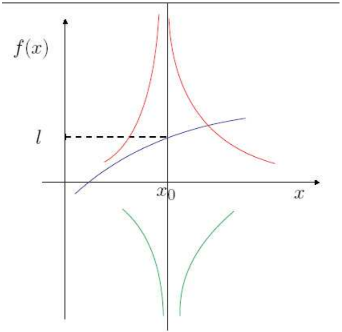
Sia $f(x)$ una funzione definita in X e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per X.
Si dice che f diverge negativamente per x che tende a x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists \delta > 0 :$$

$$\forall x \in X \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}) \Rightarrow f(x) < -K$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Funzione convergente in $+\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato superiormente.
Si dice che f converge a $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap]H, +\infty) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Funzione convergente in $+\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato superiormente.
Si dice che f converge a $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap]H, +\infty) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Funzione convergente in $+\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato superiormente.
Si dice che f converge a $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap]H, +\infty) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Funzione divergente positivamente in $+\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato superiormente.
Si dice che f diverge positivamente per x che tende a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap]H, +\infty) \Rightarrow f(x) > K$$

Funzione divergente positivamente in $+\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato superiormente.
Si dice che f diverge positivamente per x che tende a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap]H, +\infty) \Rightarrow f(x) > K$$

Funzione divergente positivamente in $+\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato superiormente.
Si dice che f diverge positivamente per x che tende a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap]H, +\infty) \Rightarrow f(x) > K$$

Funzione divergente negativamente in $+\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato superiormente.

Si dice che f diverge negativamente per x che tende a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap]H, +\infty) \Rightarrow f(x) < -K$$

Funzione divergente negativamente in $+\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato superiormente.
Si dice che f diverge negativamente per x che tende a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap]H, +\infty) \Rightarrow f(x) < -K$$

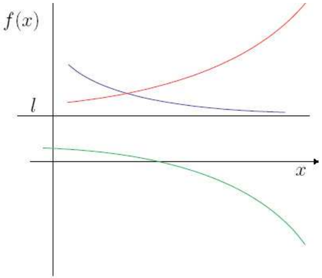
Funzione divergente negativamente in $+\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato superiormente.
Si dice che f diverge negativamente per x che tende a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap]H, +\infty) \Rightarrow f(x) < -K$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Funzione convergente in $-\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato inferiormente.
Si dice che f converge ad $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap (-\infty, -H[\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Funzione convergente in $-\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato inferiormente.
Si dice che f converge ad $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap (-\infty, -H[\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Funzione convergente in $-\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato inferiormente.
Si dice che f converge ad $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap (-\infty, -H[\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Funzione divergente positivamente in $-\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato inferiormente.
Si dice che f diverge positivamente per x che tende a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap (-\infty, -H[\Rightarrow f(x) > K$$

Funzione divergente positivamente in $-\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato inferiormente.
Si dice che f diverge positivamente per x che tende a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap (-\infty, -H[\Rightarrow f(x) > K$$

Funzione divergente positivamente in $-\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato inferiormente.
Si dice che f diverge positivamente per x che tende a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap (-\infty, -H[\Rightarrow f(x) > K$$

Funzione divergente negativamente in $-\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato inferiormente.

Si dice che f diverge negativamente per x che tende a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap (-\infty, -H[\Rightarrow f(x) < -K$$

Funzione divergente negativamente in $-\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato inferiormente.
Si dice che f diverge negativamente per x che tende a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap (-\infty, -H[\Rightarrow f(x) < -K$$

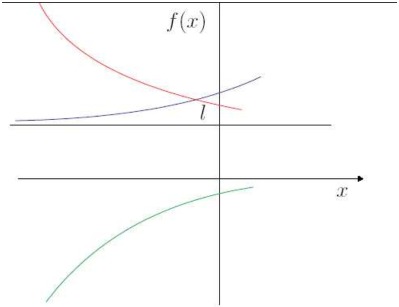
Funzione divergente negativamente in $-\infty$

Sia $f(x)$ una funzione definita in X, con X illimitato inferiormente.
Si dice che f diverge negativamente per x che tende a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

se

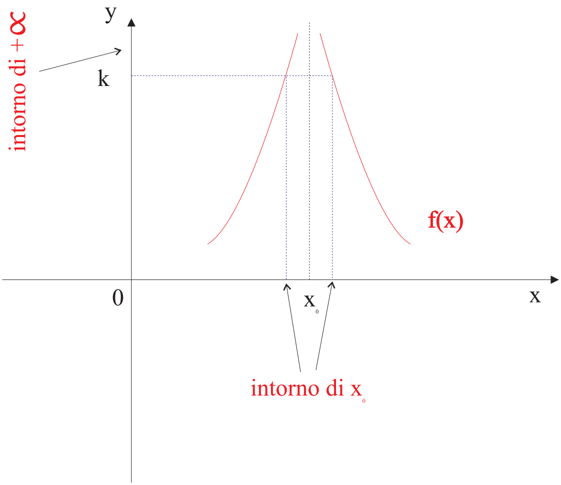
$$\forall K > 0, \exists H > 0 : \forall x \in X \cap (-\infty, -H[\Rightarrow f(x) < -K$$



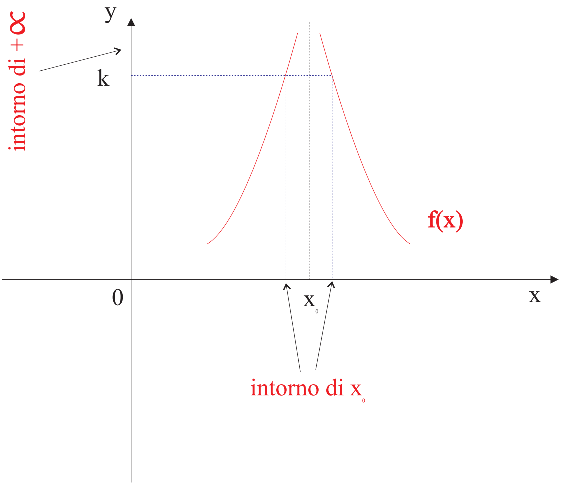
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



La funzione $f(x)$ assume valori sempre più grandi man mano che x si avvicina a x_0.



La funzione $f(x)$ assume valori sempre più grandi man mano che x si avvicina a x_0.

Teorema di unicità del limite

Teorema di unicità del limite

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$,

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Se la funzione ammette limite in x_0, esso è unico.

Teorema di unicità del limite

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$,

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Se la funzione ammette limite in x_0, esso è unico.

Teorema della permanenza del segno

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : X \to \mathbb{R}$. Se f è regolare in x_0 valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) < 0 \Rightarrow$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) < 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$$

e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) > 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$$

Teorema della permanenza del segno

Teorema della permanenza del segno

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : X \to \mathbb{R}$. Se f è regolare in x_0 valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) < 0 \Rightarrow$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) < 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$$

e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) > 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$$

Teorema della permanenza del segno

Teorema della permanenza del segno

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : X \to \mathbb{R}$. Se f è regolare in x_0 valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) < 0 \Rightarrow$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) < 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$$

e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) > 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$$

Teorema della permanenza del segno

Teorema della permanenza del segno

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : X \to \mathbb{R}$. Se f è regolare in x_0 valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) < 0 \Rightarrow$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) < 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$$

e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) > 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$$

Teorema della permanenza del segno

Inoltre

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) \leq 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq 0$$

e

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) \geq 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$$

Teorema della permanenza del segno

Inoltre

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) \leq 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq 0$$

e

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) \geq 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$$

Somma in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{somma} \quad \begin{cases} +\infty + (+\infty) = +\infty, \\ -\infty + (-\infty) = -\infty, \\ a + (\pm\infty) = \pm\infty, \\ +\infty + (-\infty) = \text{non definita.} \end{cases}$$

Somma in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{somma} \quad \begin{cases} +\infty + (+\infty) = +\infty, \\ -\infty + (-\infty) = -\infty, \\ a + (\pm\infty) = \pm\infty, \\ +\infty + (-\infty) = \text{non definita.} \end{cases}$$

Somma in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{somma} \quad \begin{cases} +\infty + (+\infty) = +\infty, \\ -\infty + (-\infty) = -\infty, \\ a + (\pm\infty) = \pm\infty, \\ +\infty + (-\infty) = \text{non definita.} \end{cases}$$

Operazioni algebriche in $\overline{\mathbb{R}}$

Somma in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{somma} \quad \begin{cases} +\infty + (+\infty) = +\infty, \\ -\infty + (-\infty) = -\infty, \\ a + (\pm\infty) = \pm\infty, \\ +\infty + (-\infty) = \text{non definita.} \end{cases}$$

Somma in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{somma} \quad \begin{cases} +\infty + (+\infty) = +\infty, \\ -\infty + (-\infty) = -\infty, \\ a + (\pm\infty) = \pm\infty, \\ +\infty + (-\infty) = \text{non definita.} \end{cases}$$

Somma in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{somma} \quad \begin{cases} +\infty + (+\infty) = +\infty, \\ -\infty + (-\infty) = -\infty, \\ a + (\pm\infty) = \pm\infty, \\ +\infty + (-\infty) = \text{non definita.} \end{cases}$$

Differenza in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{differenza} \quad \begin{cases} +\infty - (-\infty) = +\infty, \\ -\infty - (+\infty) = -\infty, \\ a - (\pm\infty) = \mp\infty, \\ \pm\infty - a = \pm\infty, \\ +\infty - (+\infty) = \text{non definita} \\ -\infty - (-\infty) = \text{non definita}. \end{cases}$$

Differenza in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{differenza} \quad \begin{cases} +\infty - (-\infty) = +\infty, \\ -\infty - (+\infty) = -\infty, \\ a - (\pm\infty) = \mp\infty, \\ \pm\infty - a = \pm\infty, \\ +\infty - (+\infty) = \text{non definita} \\ -\infty - (-\infty) = \text{non definita.} \end{cases}$$

Operazioni algebriche in $\overline{\mathbb{R}}$

Differenza in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{differenza} \quad \begin{cases} +\infty - (-\infty) = +\infty, \\ -\infty - (+\infty) = -\infty, \\ a - (\pm\infty) = \mp\infty, \\ \pm\infty - a = \pm\infty, \\ +\infty - (+\infty) = \text{non definita} \\ -\infty - (-\infty) = \text{non definita}. \end{cases}$$

Differenza in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{differenza} \quad \begin{cases} +\infty - (-\infty) = +\infty, \\ -\infty - (+\infty) = -\infty, \\ a - (\pm\infty) = \mp\infty, \\ \pm\infty - a = \pm\infty, \\ +\infty - (+\infty) = \text{non definita} \\ -\infty - (-\infty) = \text{non definita.} \end{cases}$$

Differenza in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{differenza} \quad \begin{cases} +\infty - (-\infty) = +\infty, \\ -\infty - (+\infty) = -\infty, \\ a - (\pm\infty) = \mp\infty, \\ \pm\infty - a = \pm\infty, \\ +\infty - (+\infty) = \text{non definita} \\ -\infty - (-\infty) = \text{non definita.} \end{cases}$$

Operazioni algebriche in $\overline{\mathbb{R}}$

Differenza in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{differenza} \quad \begin{cases} +\infty - (-\infty) = +\infty, \\ -\infty - (+\infty) = -\infty, \\ a - (\pm\infty) = \mp\infty, \\ \pm\infty - a = \pm\infty, \\ +\infty - (+\infty) = \text{non definita} \\ -\infty - (-\infty) = \text{non definita.} \end{cases}$$

Differenza in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{differenza} \quad \begin{cases} +\infty - (-\infty) = +\infty, \\ -\infty - (+\infty) = -\infty, \\ a - (\pm\infty) = \mp\infty, \\ \pm\infty - a = \pm\infty, \\ +\infty - (+\infty) = \text{non definita} \\ -\infty - (-\infty) = \text{non definita.} \end{cases}$$

Prodotto in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{prodotto} \quad \begin{cases} +\infty \times (\pm\infty) = \pm\infty, \\ a \times (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definito}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ -\infty \times (\pm\infty) = \mp\infty \end{cases}$$

Prodotto in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{prodotto}\quad \begin{cases} +\infty \times (\pm\infty) = \pm\infty, \\ a \times (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definito}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ -\infty \times (\pm\infty) = \mp\infty \end{cases}$$

Operazioni algebriche in $\overline{\mathbb{R}}$

Prodotto in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{prodotto} \quad \begin{cases} +\infty \times (\pm\infty) = \pm\infty, \\ a \times (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definito}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ -\infty \times (\pm\infty) = \mp\infty \end{cases}$$

Operazioni algebriche in $\overline{\mathbb{R}}$

Prodotto in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{prodotto} \quad \begin{cases} +\infty \times (\pm\infty) = \pm\infty, \\ a \times (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definito}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ -\infty \times (\pm\infty) = \mp\infty \end{cases}$$

Prodotto in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{prodotto} \quad \begin{cases} +\infty \times (\pm\infty) = \pm\infty, \\ a \times (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definito}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ -\infty \times (\pm\infty) = \mp\infty \end{cases}$$

Prodotto in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{prodotto} \quad \begin{cases} +\infty \times (\pm\infty) = \pm\infty, \\ a \times (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definito}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ -\infty \times (\pm\infty) = \mp\infty \end{cases}$$

Operazioni algebriche in $\overline{\mathbb{R}}$

Prodotto in $\overline{\mathbb{R}}$

$$
\text{prodotto} \quad \begin{cases} +\infty \times (\pm\infty) = \pm\infty, \\ a \times (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definito}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ -\infty \times (\pm\infty) = \mp\infty \end{cases}
$$

Divisione in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{divisione} \quad \begin{cases} \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} = \text{non definita;} \\ \dfrac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definita}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ \dfrac{a}{\pm\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Divisione in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{divisione} \quad \begin{cases} \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} = \text{non definita}; \\ \dfrac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definita}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ \dfrac{a}{\pm\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Divisione in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{divisione} \quad \begin{cases} \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} = \text{non definita}; \\ \dfrac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definita}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ \dfrac{a}{\pm\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Operazioni algebriche in $\overline{\mathbb{R}}$

Divisione in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{divisione} \quad \begin{cases} \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} = \text{non definita;} \\ \dfrac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definita}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ \dfrac{a}{\pm\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Divisione in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{divisione} \quad \begin{cases} \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} = \text{non definita;} \\ \dfrac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definita,} & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ \dfrac{a}{\pm\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Divisione in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{divisione} \quad \begin{cases} \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} = \text{non definita;} \\ \dfrac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definita,} & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ \dfrac{a}{\pm\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Operazioni algebriche in $\overline{\mathbb{R}}$

Divisione in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{divisione} \quad \begin{cases} \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} = \text{non definita;} \\ \dfrac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definita,} & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ \dfrac{a}{\pm\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Funzioni continue

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \to \mathcal{R}$ e $x_0 \in X$. Si dice che f è ***continua*** in x_0 se

$$\forall I \in \ I(f(x_0)) \ \exists \ J \in \ J(x_0) : f(J \cap X) \subseteq I$$

Si può dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f è regolare in x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. x_0 punto isolato di X.

Funzioni continue

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \to \mathcal{R}$ e $x_0 \in X$. Si dice che f è ***continua*** in x_0 se

$$\forall I \in \ I(f(x_0))\ \exists\ J \in \ J(x_0) : f(J \cap X) \subseteq I$$

Si può dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f è regolare in x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. x_0 punto isolato di X.

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \to \mathcal{R}$ e $x_0 \in X$. Si dice che f è ***continua*** in x_0 se

$$\forall I \in \ I(f(x_0))\ \exists\, J \in \ J(x_0) : f(J \cap X) \subseteq I$$

Si può dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f è regolare in x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. x_0 punto isolato di X.

Funzioni continue

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \to \mathcal{R}$ e $x_0 \in X$. Si dice che f è ***continua*** in x_0 se

$$\forall I \in \ I(f(x_0)) \ \exists \ J \in \ J(x_0) : f(J \cap X) \subseteq I$$

Si può dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f è regolare in x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. x_0 punto isolato di X.

Funzioni continue

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \to \mathcal{R}$ e $x_0 \in X$. Si dice che f è ***continua*** in x_0 se

$$\forall I \in \ I(f(x_0)) \ \exists \ J \in \ J(x_0) : f(J \cap X) \subseteq I$$

Si può dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f è regolare in x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. x_0 punto isolato di X.

Funzioni continue

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \to \mathcal{R}$ e $x_0 \in X$. Si dice che f è ***continua*** in x_0 se

$$\forall I \in \; I(f(x_0)) \, \exists \, J \in \; J(x_0) : f(J \cap X) \subseteq I$$

Si può dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f è regolare in x_0 e
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
2. x_0 punto isolato di X.

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$,

$$f : X \to \mathcal{R}$$

Si dice che f è continua in X se essa è continua in tutti i punti di X.

Teorema

Le funzioni elementari sono continue nei rispettivi insiemi di definizione.

Teorema

Se f, g sono funzioni continue, risultano continue le funzioni $c_1 f + c_2 g,\ c_1, c_2 \in \Re,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}$.

Funzioni continue

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$,

$$f : X \to \mathcal{R}$$

Si dice che f è continua in X se essa è continua in tutti i punti di X.

Teorema

Le funzioni elementari sono continue nei rispettivi insiemi di definizione.

Teorema

Se f, g sono funzioni continue, risultano continue le funzioni $c_1 f + c_2 g,\ c_1, c_2 \in \Re$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

Funzioni continue

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$,

$$f : X \to \mathcal{R}$$

Si dice che f è continua in X se essa è continua in tutti i punti di X.

Teorema

Le funzioni elementari sono continue nei rispettivi insiemi di definizione.

Teorema

Se f, g sono funzioni continue, risultano continue le funzioni $c_1 f + c_2 g,\ c_1, c_2 \in \Re$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Proposizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R}.$$

Se f e g sono regolari in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}},\ \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora la somma, il prodotto, il rapporto e la potenza tra le funzioni sono regolari.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Proposizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$f : X \to \mathbb{R}, \; g : X \to \mathbb{R}.$$

Se f e g sono regolari in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}, \; \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora la somma, il prodotto, il rapporto e la potenza tra le funzioni sono regolari.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Proposizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$f : X \to \mathbb{R},\; g : X \to \mathbb{R}.$$

Se f e g sono regolari in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}},\; \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora la somma, il prodotto, il rapporto e la potenza tra le funzioni sono regolari.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Inoltre

- $\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \ell \pm m$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$, se $g(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \ell^m$ se $f(x) > 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

purché $\ell \pm m$, $\ell \cdot m$, $\frac{\ell}{m}$, ℓ^m abbiano senso in $\overline{\mathbb{R}}$.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Inoltre

- $\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \ell \pm m$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$, se $g(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \ell^m$ se $f(x) > 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

purché $\ell \pm m$, $\ell \cdot m$, $\frac{\ell}{m}$, ℓ^m abbiano senso in $\overline{\mathbb{R}}$.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Inoltre

- $\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \ell \pm m$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$, se $g(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \ell^m$ se $f(x) > 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

purché $\ell \pm m$, $\ell \cdot m$, $\frac{\ell}{m}$, ℓ^m abbiano senso in $\mathbb{R}$.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Inoltre

- $\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \ell \pm m$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m$
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{m}$, se $g(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \ell^m$ se $f(x) > 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

purché $\ell \pm m$, $\ell \cdot m$, $\dfrac{\ell}{m}$, ℓ^m abbiano senso in $\mathbb{R}$.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Inoltre

- $\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \ell \pm m$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m$
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{m}$, se $g(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \ell^m$ se $f(x) > 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

purché $\ell \pm m$, $\ell \cdot m$, $\dfrac{\ell}{m}$, ℓ^m abbiano senso in $\overline{\mathbb{R}}$.

Restano escluse le forme indeterminate

$$\pm\infty - (\pm\infty), \ \pm\infty + (\mp\infty)$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \ \frac{0}{0}$$

$$1^{(\pm\infty)}, \ (+\infty)^0, \ 0^0$$

Forme indeterminate

Restano escluse le forme indeterminate

$$\pm\infty - (\pm\infty),\ \pm\infty + (\mp\infty)$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{0}{0}$$

$$1^{(\pm\infty)},\ (+\infty)^0,\ 0^0$$

Forme indeterminate

Restano escluse le forme indeterminate

$$\pm\infty - (\pm\infty), \; \pm\infty + (\mp\infty)$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \; \frac{0}{0}$$

$$1^{(\pm\infty)}, \; (+\infty)^0, \; 0^0$$

Forme indeterminate

Restano escluse le forme indeterminate

$$\pm\infty - (\pm\infty), \ \pm\infty + (\mp\infty)$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \ \frac{0}{0}$$

$$1^{(\pm\infty)}, \ (+\infty)^0, \ 0^0$$

Limite destro

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per X e

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Se la restrizione di f all'insieme $X_r = X \cap]x_0, +\infty)$ è regolare in x_0, si definisce **limite destro** di f al tendere di x a x_0

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

il limite della restrizione di f all'insieme X_r.

Limite destro

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per X e

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Se la restrizione di f all'insieme $X_r = X \cap]x_0, +\infty)$ è regolare in x_0, si definisce **limite destro** di f al tendere di x a x_0

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

il limite della restrizione di f all'insieme X_r.

Limite sinistro

Se la restrizione di f all'insieme $X_l = X \cap (-\infty, x_0[$ è regolare in x_0, si definisce **limite sinistro** di f al tendere di x a x_0

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

il limite della restrizione di f all'insieme X_l.

Esempio

Calcoliamo, se esiste:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non è regolare in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

Esempio

Calcoliamo, se esiste:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non è regolare in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

Esempio

Calcoliamo, se esiste:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non è regolare in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

Esempio

Calcoliamo, se esiste:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non è regolare in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

Esempio

Calcoliamo, se esiste:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non è regolare in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

Esempio

Calcoliamo, se esiste:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non è regolare in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

Esempio

Calcoliamo, se esiste:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non è regolare in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

Siano $I =]a, b[$ e

$$f : I \to \mathbb{R}.$$

Se f è monotona in I allora

1. f è regolare in a e b;
2. f crescente $\Rightarrow$
$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$;
3. f decrescente $\Rightarrow$
$\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$.

Limiti di funzioni monotone

Siano $I =]a, b[$ e

$$f : I \to \mathbb{R}.$$

Se f è monotona in I allora

1. f è regolare in a e b;
2. f crescente $\Rightarrow$
$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$;
3. f decrescente $\Rightarrow$
$\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$.

Limiti di funzioni monotone

Siano $I =]a, b[$ e

$$f : I \to \mathbb{R}.$$

Se f è monotona in I allora

1. f è regolare in a e b;
2. f crescente $\Rightarrow$
   $\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$;
3. f decrescente $\Rightarrow$
   $\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$.

Limiti di funzioni monotone

Siano $I =]a, b[$ e

$$f : I \to \mathbb{R}.$$

Se f è monotona in I allora

1. f è regolare in a e b;
2. f crescente $\Rightarrow$
   $\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$;
3. f decrescente $\Rightarrow$
   $\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$.

Siano $I =]a, b[$ e

$$f : I \to \mathbb{R}.$$

Se f è monotona in I allora

1. f è regolare in a e b;
2. f crescente $\Rightarrow$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in I} f(x); \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in I} f(x);$$
3. f decrescente $\Rightarrow$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{x \in I} f(x); \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{x \in I} f(x).$$

Siano $I =]a, b[$ e

$$f : I \to \mathbb{R}.$$

Se f è monotona in I allora

1. f è regolare in a e b;
2. f crescente $\Rightarrow$
$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$;
3. f decrescente $\Rightarrow$
$\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$.

Limiti di funzioni monotone

Siano $I =]a, b[$ e

$$f : I \to \mathbb{R}.$$

Se f è monotona in I allora

1. f è regolare in a e b;
2. f crescente $\Rightarrow$
$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$;
3. f decrescente $\Rightarrow$
$\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$.

Siano $I =]a, b[$ e

$$f : I \to \mathbb{R}.$$

Se f è monotona in I allora

1. f è regolare in a e b;
2. f crescente $\Rightarrow$
   $\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$;
3. f decrescente $\Rightarrow$
   $\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$.

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0^+} \log_{10} x$$

Per la monotonia della funzione logaritmo si ha

$$\lim_{x \to 0} \log x = \inf \log x = -\infty$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0^+} \log_{10} x$$

Per la monotonia della funzione logaritmo si ha

$$\lim_{x \to 0} \log x = \inf \log x = -\infty$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Per la monotonia della funzione esponenziale si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sup\left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}.$$

Per la monotonia della funzione esponenziale si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\sup\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=+\infty$$

Calcoliamo i limiti di alcune funzioni elementari agli estremi del loro campo di esistenza:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti di alcune funzioni elementari agli estremi del loro campo di esistenza:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti di alcune funzioni elementari agli estremi del loro campo di esistenza:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti di alcune funzioni elementari agli estremi del loro campo di esistenza:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti di alcune funzioni elementari agli estremi del loro campo di esistenza:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

In particolare si ha

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty \quad \lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$

In particolare si ha

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty \quad \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$$

In particolare si ha

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty \quad \lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$

In particolare si ha

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty \quad \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$$