Limiti di funzioni

22 ottobre 2022

Sia

$$\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Consideriamo $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$. Si definisce intorno I di x_0

- un intervallo aperto contenente x_0 se $x_0 \in \mathcal{R}$;
- ciascun intervallo $]a, +\infty[$, $a \in \mathcal{R}$, se $x_0 = +\infty$;
- ciascun intervallo $]-\infty, a[$, $a \in \mathcal{R}$, se $x_0 = -\infty$.

Elementi di topologia

Sia

$$\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Consideriamo $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$. Si definisce intorno I di x_0

- un intervallo aperto contenente x_0 se $x_0 \in \mathcal{R}$;
- ciascun intervallo $]a, +\infty[$, $a \in \mathcal{R}$, se $x_0 = +\infty$;
- ciascun intervallo $]-\infty, a[$, $a \in \mathcal{R}$, se $x_0 = -\infty$.

Elementi di topologia

Sia

$$\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Consideriamo $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$. Si definisce intorno I di x_0

- un intervallo aperto contenente x_0 se $x_0 \in \mathcal{R}$;
- ciascun intervallo $]a, +\infty[$, $a \in \mathcal{R}$, se $x_0 = +\infty$;
- ciascun intervallo $]-\infty, a[$, $a \in \mathcal{R}$, se $x_0 = -\infty$.

Elementi di topologia

Sia

$$\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Consideriamo $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$. Si definisce intorno I di x_0

- un intervallo aperto contenente x_0 se $x_0 \in \mathcal{R}$;
- ciascun intervallo $]a, +\infty[$, $a \in \mathcal{R}$, se $x_0 = +\infty$;
- ciascun intervallo $]-\infty, a[$, $a \in \mathcal{R}$, se $x_0 = -\infty$.

Elementi di topologia

Sia

$$\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Consideriamo $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$. Si definisce intorno I di x_0

- un intervallo aperto contenente x_0 se $x_0 \in \mathcal{R}$;
- ciascun intervallo $]a, +\infty[$, $a \in \mathcal{R}$, se $x_0 = +\infty$;
- ciascun intervallo $]-\infty, a[$, $a \in \mathcal{R}$, se $x_0 = -\infty$.

Sia A $\subseteq \mathcal{R}$.

Si dice che $x_0 \in \mathcal{R}$ è un punto di accumulazione per A se:

$$I \cap (A - \{x_0\}) \neq \emptyset, \quad \forall I \in I(x_0)$$

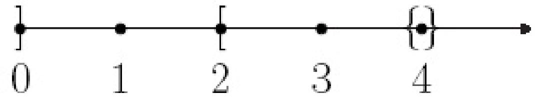
Sia A $\subseteq \mathcal{R}$.
Si dice che $x_0 \in \mathcal{R}$ è un punto di accumulazione per A se:

$$I \cap (A - \{x_0\}) \neq \emptyset, \quad \forall I \in I(x_0)$$

Esempio

Sia

$$A =]0,2[\cup \{4\}$$

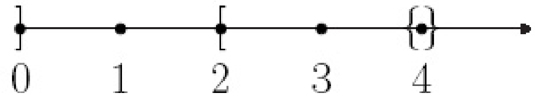


- 1 è punto di accumulazione per A
- 4 non è punto di accumulazione per A
- 2 è punto di accumulazione per A
- $\forall x \in [0,2]$, x è punto di accumulazione per A

Esempio

Sia

$$A =]0,2[\cup \{4\}$$

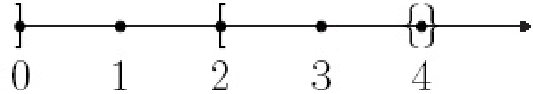


- 1 è punto di accumulazione per A
- 4 non è punto di accumulazione per A
- 2 è punto di accumulazione per A
- $\forall x \in [0,2]$, x è punto di accumulazione per A

Esempio

Sia

$$A =]0, 2[\cup \{4\}$$

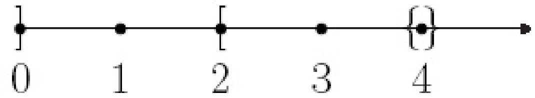


- 1 è punto di accumulazione per A
- 4 non è punto di accumulazione per A
- 2 è punto di accumulazione per A
- $\forall x \in [0, 2]$, x è punto di accumulazione per A

Esempio

Sia

$$A =]0,2[\cup \{4\}$$

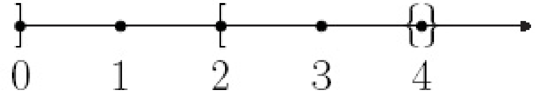


- 1 è punto di accumulazione per A
- 4 non è punto di accumulazione per A
- 2 è punto di accumulazione per A
- $\forall x \in [0,2]$, x è punto di accumulazione per A

Esempio

Sia

$$A =]0, 2[\cup \{4\}$$



- 1 è punto di accumulazione per A
- 4 non è punto di accumulazione per A
- 2 è punto di accumulazione per A
- $\forall x \in [0, 2]$, x è punto di accumulazione per A

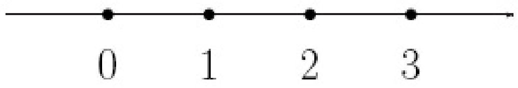
Nota:

- $A = [0, 1] \Longrightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \in A$
- $A =]0, 1[\Longrightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \notin A$

Nota:

- $A = [0, 2] \Longrightarrow 1 \in A$, 1 è di accumulazione per A
- $A = \{1\} \cup [2, 3] \Longrightarrow 1 \in A$, 1 non è di accumulazione per A

Un insieme **può non avere** punti di accumulazione.
Esempio: l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ non ha punti di accumulazione.



Nota:

- $A = [0, 1] \Longrightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \in A$
- $A =]0, 1[\Longrightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \notin A$

Nota:

- $A = [0, 2] \Longrightarrow 1 \in A$, 1 è di accumulazione per A
- $A = \{1\} \cup [2, 3] \Longrightarrow 1 \in A$, 1 non è di accumulazione per A

Un insieme **può non avere** punti di accumulazione.
Esempio: l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ non ha punti di accumulazione.

Nota:

- $A = [0, 1] \Longrightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \in A$
- $A =]0, 1[\Longrightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \notin A$

Nota:

- $A = [0, 2] \Longrightarrow 1 \in A$, 1 è di accumulazione per A
- $A = \{1\} \cup [2, 3] \Longrightarrow 1 \in A$, 1 non è di accumulazione per A

Un insieme **può non avere** punti di accumulazione.
Esempio: l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ non ha punti di accumulazione.

Nota:

- $A = [0, 1] \Longrightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \in A$
- $A =]0, 1[\Longrightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \notin A$

Nota:

- $A = [0, 2] \Longrightarrow 1 \in A$, 1 è di accumulazione per A
- $A = \{1\} \cup [2, 3] \Longrightarrow 1 \in A$, 1 non è di accumulazione per A

Un insieme **può non avere** punti di accumulazione.
Esempio: l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ non ha punti di accumulazione.

Nota:

- $A = [0, 1] \implies 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \in A$
- $A =]0, 1[\implies 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \notin A$

Nota:

- $A = [0, 2] \implies 1 \in A$, 1 è di accumulazione per A
- $A = \{1\} \cup [2, 3] \implies 1 \in A$, 1 non è di accumulazione per A

Un insieme **può non avere** punti di accumulazione.
Esempio: l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ non ha punti di accumulazione.

Nota:

- $A = [0,1] \Longrightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \in A$
- $A =]0,1[\Longrightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \notin A$

Nota:

- $A = [0,2] \Longrightarrow 1 \in A$, 1 è di accumulazione per A
- $A = \{1\} \cup [2,3] \Longrightarrow 1 \in A$, 1 non è di accumulazione per A

Un insieme **può non avere** punti di accumulazione.

Esempio: l'insieme $A = \{0,1,2,3\}$ non ha punti di accumulazione.

Nota:

- $A = [0,1] \Longrightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \in A$
- $A =]0,1[\Longrightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \notin A$

Nota:

- $A = [0,2] \Longrightarrow 1 \in A$, 1 è di accumulazione per A
- $A = \{1\} \cup [2,3] \Longrightarrow 1 \in A$, 1 non è di accumulazione per A

Un insieme **può non avere** punti di accumulazione.

Esempio: l'insieme $A = \{0,1,2,3\}$ non ha punti di accumulazione.

Nota:

- $A = [0, 1] \Longrightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \in A$
- $A =]0, 1[\Longrightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \notin A$

Nota:

- $A = [0, 2] \Longrightarrow 1 \in A$, 1 è di accumulazione per A
- $A = \{1\} \cup [2, 3] \Longrightarrow 1 \in A$, 1 non è di accumulazione per A

Un insieme **può non avere** punti di accumulazione.
Esempio: l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ non ha punti di accumulazione.

Punti isolati

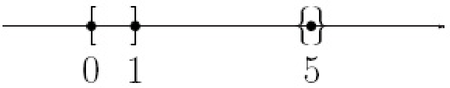
Un punto $x \in A$ che non sia di accumulazione per A è detto isolato.

In questo caso

$$\exists I \in I(x_0) : I \cap A = x_0$$

Ad esempio:

$$A = [0, 1] \cup \{5\}$$



5 è un punto isolato per A.

Punti isolati

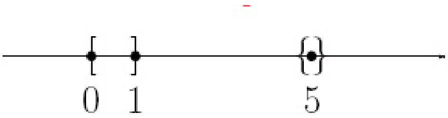
Un punto $x \in A$ che non sia di accumulazione per A è detto isolato.

In questo caso

$$\exists I \in I(x_0) : I \cap A = x_0$$

Ad esempio:

$$A = [0, 1] \cup \{5\}$$



5 è un punto isolato per A.

Punti isolati

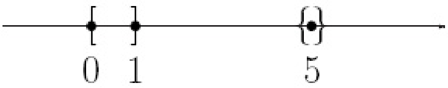
Un punto $x \in A$ che non sia di accumulazione per A è detto isolato.

In questo caso

$$\exists I \in I(x_0) : I \cap A = x_0$$

Ad esempio:

$$A = [0, 1] \cup \{5\}$$



5 è un punto isolato per A.

Definizione generale di limite

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathcal{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

Si dice che f tende a $l \in \bar{\mathcal{R}}$ per x che tende ad x_0,

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$$

se

$$\forall I \in I(l), \exists J \in I(x_0) : \forall x \in X \cap (J - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I$$

Definizione generale di limite

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathcal{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

Si dice che f tende a $l \in \bar{\mathcal{R}}$ per x che tende ad x_0,

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$$

se

$$\forall I \in I(l), \exists J \in I(x_0) : \forall x \in X \cap (J - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I$$

Definizione generale di limite

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathcal{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

Si dice che f tende a $l \in \bar{\mathcal{R}}$ per x che tende ad x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se

$$\forall I \in I(l), \exists J \in I(x_0) : \forall x \in X \cap (J - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I$$

Definizione generale di limite

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$ tali che

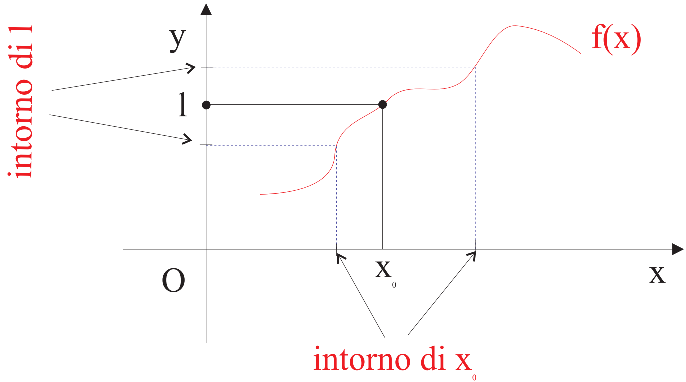
- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathcal{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

Si dice che f tende a $l \in \bar{\mathcal{R}}$ per x che tende ad x_0,

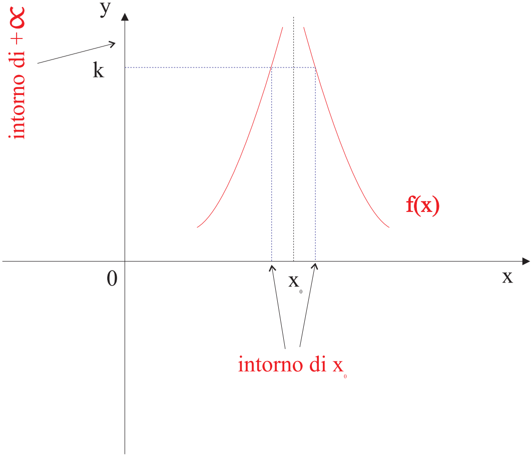
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se

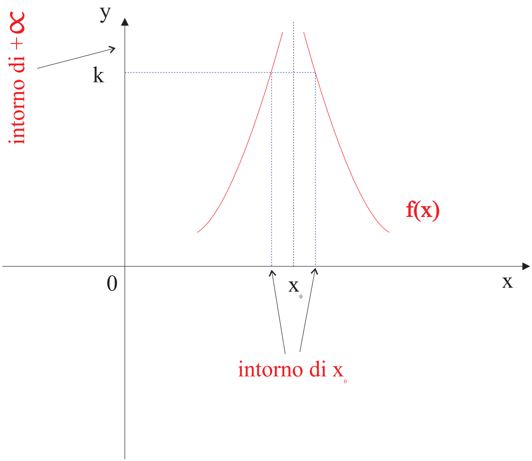
$$\forall I \in I(l), \exists J \in I(x_0) : \forall x \in X \cap (J - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I$$



$$\forall I \in I(l), \exists J \in I(x_0) : \forall x \in X \cap (J - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I$$

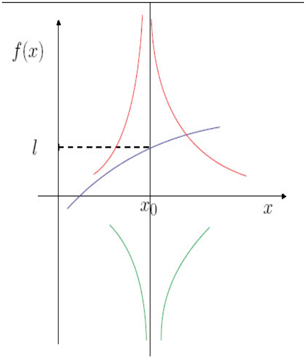


$$\forall I \in I(l), \exists J \in I(x_0) : \forall x \in X \cap (J - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I$$



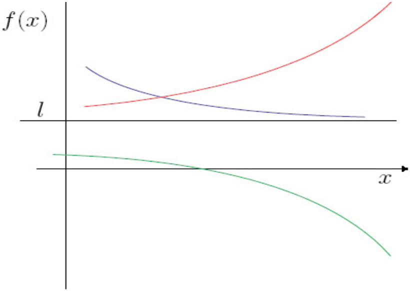
$$\forall I \in I(l), \exists J \in I(x_0) : \forall x \in X \cap (J - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I$$

$x_0 \in \mathcal{R}$



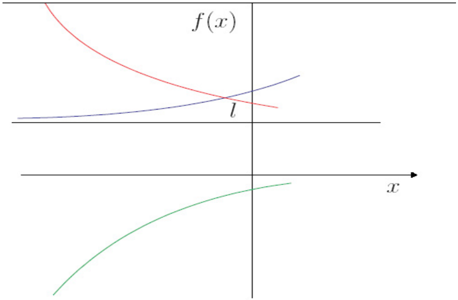
$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$	funzione divergente positivamente in un valore reale
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$	funzione convergente in un valore reale
$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$	funzione divergente negativamente in un valore reale

$x_0 = +\infty$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	funzione divergente positivamente in $+\infty$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$	funzione convergente in $+\infty$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	funzione divergente negativamente in $+\infty$

$x_0 = -\infty$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ funzione divergente positivamente in $-\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ funzione convergente in $-\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ funzione divergente negativamente in $-\infty$

Teorema di unicità del limite

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e $x_0 \in \mathcal{R}a$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathcal{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

Se la funzione ammette limite in x_0, esso è unico.

Teorema di unicità del limite

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e $x_0 \in \mathcal{R}a$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathcal{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

Se la funzione ammette limite in x_0, esso è unico.

Teorema di unicità del limite

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e $x_0 \in \mathcal{R}a$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathcal{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

Se la funzione ammette limite in x_0, esso è unico.

Somma e prodotto in $\bar{\mathcal{R}}$

$$\text{somma} \quad \begin{cases} \pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty, \\ a + (\pm\infty) = \pm\infty, \\ \pm\infty + (\mp\infty) = \text{non definita}. \end{cases}$$

$$\text{prodotto} \quad \begin{cases} +\infty \times (\pm\infty) = \pm\infty, \\ a \times (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definito}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Divisione in $\bar{\mathcal{R}}$

$$\text{divisione}\quad \begin{cases} \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} = \text{non definita;} \\ \dfrac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definita}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ \dfrac{a}{\pm\infty} = 0, \quad a \in \mathcal{R}. \end{cases}$$

Elevazione a potenza in $\bar{\mathcal{R}}$

Adottiamo le seguenti convenzioni:

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty,$$
$$(+\infty)^{b} = \begin{cases} +\infty, & b > 0; \\ 0, & b < 0. \end{cases}$$
$$(+\infty)^{-\infty} = 0.$$

Forme indeterminate

$$+\infty - \infty$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{0}{0}$$

$$1^{\pm\infty},\ (+\infty)^0,\ 0^0$$

Forme indeterminate

$$+\infty - \infty$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{0}{0}$$

$$1^{\pm\infty},\ (+\infty)^0,\ 0^0$$

Forme indeterminate

$$+\infty - \infty$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{0}{0}$$

$$1^{\pm\infty},\ (+\infty)^0,\ 0^0$$

Forme indeterminate

$$+\infty - \infty$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{0}{0}$$

$$1^{\pm\infty},\ (+\infty)^0,\ 0^0$$

Teorema della permanenza del segno

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $x_0 \in \mathcal{R}a$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$.

Se f ammette limite in x_0 valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) < 0 (> 0) \Rightarrow$$
$$\exists I \in I(x_0) : f(x) < 0(> 0), \forall x \in X \bigcap (I - \{x_0\})$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) \leq 0(\geq 0), \forall x \in X \bigcap (I - \{x_0\}) \Rightarrow$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq 0(\geq 0)$$

Teorema della permanenza del segno

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $x_0 \in \mathcal{R}a$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$.
Se f ammette limite in x_0 valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) < 0 (> 0) \Rightarrow$$
$$\exists I \in I(x_0) : f(x) < 0 (> 0), \forall x \in X \bigcap (I - \{x_0\})$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) \leq 0 (\geq 0), \forall x \in X \bigcap (I - \{x_0\}) \Rightarrow$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq 0 (\geq 0)$$

Teorema della permanenza del segno

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $x_0 \in \mathcal{R}a$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$.
Se f ammette limite in x_0 valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) < 0(> 0) \Rightarrow$$
$$\exists I \in I(x_0) : f(x) < 0(> 0), \forall x \in X \bigcap (I - \{x_0\})$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) \leq 0(\geq 0), \forall x \in X \bigcap (I - \{x_0\}) \Rightarrow$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq 0(\geq 0)$$

Teorema della permanenza del segno

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $x_0 \in \mathcal{R}a$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$.
Se f ammette limite in x_0 valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) < 0 (> 0) \Rightarrow$$
$$\exists I \in I(x_0) : f(x) < 0 (> 0), \forall x \in X \bigcap (I - \{x_0\})$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) \leq 0 (\geq 0), \forall x \in X \bigcap (I - \{x_0\}) \Rightarrow$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq 0 (\geq 0)$$

Idea intuitiva di continuità

Consideriamo un processo produttivo; se si varia "di poco" la quantità di materia prima impiegata, il volume fisico della produzione varia, in generale, "di poco".
Se il flusso delle entrate generate da un grosso portafoglio di titoli si modifica "di qualche euro", la variazione degli indici che misurano la performance è trascurabile.

I fenomeni che manifestano una proprietà di continuità sono quelli in cui **piccole variazioni nelle cause comportano piccole variazioni sugli effetti** $\Leftrightarrow$ **gli effetti variano in modo continuo con le cause che li producono**.

Idea intuitiva di continuità

Consideriamo un processo produttivo; se si varia “di poco” la quantità di materia prima impiegata, il volume fisico della produzione varia, in generale, “di poco”.

Se il flusso delle entrate generate da un grosso portafoglio di titoli si modifica “di qualche euro”, la variazione degli indici che misurano la performance è trascurabile.

I fenomeni che manifestano una proprietà di continuità sono quelli in cui **piccole variazioni nelle cause comportano piccole variazioni sugli effetti** $\Leftrightarrow$ **gli effetti variano in modo continuo con le cause che li producono**.

Idea intuitiva di continuità

Consideriamo un processo produttivo; se si varia “di poco” la quantità di materia prima impiegata, il volume fisico della produzione varia, in generale, “di poco”.
Se il flusso delle entrate generate da un grosso portafoglio di titoli si modifica “di qualche euro”, la variazione degli indici che misurano la performance è trascurabile.

I fenomeni che manifestano una proprietà di continuità sono quelli in cui **piccole variazioni nelle cause comportano piccole variazioni sugli effetti** $\Leftrightarrow$ **gli effetti variano in modo continuo con le cause che li producono**.

Idea intuitiva di continuità

Consideriamo un processo produttivo; se si varia “di poco” la quantità di materia prima impiegata, il volume fisico della produzione varia, in generale, “di poco”.
Se il flusso delle entrate generate da un grosso portafoglio di titoli si modifica “di qualche euro”, la variazione degli indici che misurano la performance è trascurabile.

I fenomeni che manifestano una proprietà di continuità sono quelli in cui **piccole variazioni nelle cause comportano piccole variazioni sugli effetti** $\Leftrightarrow$ **gli effetti variano in modo continuo con le cause che li producono**.

Idea intuitiva di continuità

Consideriamo un processo produttivo; se si varia “di poco” la quantità di materia prima impiegata, il volume fisico della produzione varia, in generale, “di poco”.
Se il flusso delle entrate generate da un grosso portafoglio di titoli si modifica “di qualche euro”, la variazione degli indici che misurano la performance è trascurabile.

I fenomeni che manifestano una proprietà di continuità sono quelli in cui **piccole variazioni nelle cause comportano piccole variazioni sugli effetti** $\Leftrightarrow$ **gli effetti variano in modo continuo con le cause che li producono**.

Idea intuitiva di continuità

causa **effetto**

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x)$$

$$x + \Delta x \overset{f}{\longmapsto} f(x) + E$$

Se f è continua, allora Δx "piccolo" $\Rightarrow$ E "piccolo".

Idea intuitiva di continuità

$$\begin{array}{ccc} \textbf{causa} & & \textbf{effetto} \\ x & \stackrel{f}{\longmapsto} & f(x) \\ & & \\ x+\Delta x & \stackrel{f}{\longmapsto} & f(x)+E \end{array}$$

Se f è continua, allora Δx "piccolo" $\Rightarrow$ E "piccolo".

Idea intuitiva di continuità

$$\begin{array}{ccc} \textbf{causa} & & \textbf{effetto} \\ x & \overset{f}{\longmapsto} & f(x) \\ & & \\ x + \Delta x & \overset{f}{\longmapsto} & f(x) + E \end{array}$$

Se f è continua, allora Δx "piccolo" $\Rightarrow$ E "piccolo".

Idea intuitiva di continuità

causa **effetto**

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x)$$

$$x+\Delta x \overset{f}{\longmapsto} f(x)+E$$

Se f è continua, allora Δx "piccolo" $\Rightarrow$ E "piccolo".

Funzioni continue

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \to \mathcal{R}$ e $x_0 \in \mathbb{X}$. Si dice che f è **continua** in x_0 se

$$\forall I \in \ I(f(x_0)) \, \exists \, J \in \ J(x_0) : f(J \cap \mathbb{X}) \subseteq I$$

Si può dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f ammette limite in x_0 e
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$
2. x_0 punto isolato di X.

Funzioni continue

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \to \mathcal{R}$ e $x_0 \in \mathbb{X}$. Si dice che f è **continua** in x_0 se

$$\forall I \in \ I(f(x_0)) \ \exists \ J \in \ J(x_0) : f(J \cap \mathbb{X}) \subseteq I$$

Si può dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f ammette limite in x_0 e
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$
2. x_0 punto isolato di X.

Funzioni continue

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \to \mathcal{R}$ e $x_0 \in \mathbb{X}$. Si dice che f è **continua** in x_0 se

$$\forall I \in \ I(f(x_0)) \,\exists\, J \in \ J(x_0) : f(J \cap \mathbb{X}) \subseteq I$$

Si può dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f ammette limite in x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$

2. x_0 punto isolato di X.

Funzioni continue

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \to \mathcal{R}$ e $x_0 \in \mathbb{X}$. Si dice che f è **continua** in x_0 se

$$\forall I \in \ I(f(x_0)) \ \exists \ J \in \ J(x_0) : f(J \cap \mathbb{X}) \subseteq I$$

Si può dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f ammette limite in x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$

2. x_0 punto isolato di X.

Funzioni continue

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \to \mathcal{R}$ e $x_0 \in \mathbb{X}$. Si dice che f è **continua** in x_0 se

$$\forall I \in \ I(f(x_0)) \,\exists\, J \in \ J(x_0) : f(J \cap \mathbb{X}) \subseteq I$$

Si può dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se:

1. x_0 punto di accumulazione per X. f ammette limite in x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$

2. x_0 punto isolato di X.

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$,

$$f : X \to \mathcal{R}$$

Si dice che f è continua in X se essa è continua in tutti i punti di X.

Teorema

Le funzioni elementari sono continue nei rispettivi insiemi di definizione.

Teorema

Se f, g sono funzioni continue, risultano continue le funzioni $c_1 f + c_2 g,\ c_1, c_2 \in \Re,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}$.

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$,

$$f : X \to \mathcal{R}$$

Si dice che f è continua in X se essa è continua in tutti i punti di X.

Teorema

Le funzioni elementari sono continue nei rispettivi insiemi di definizione.

Teorema

Se f, g sono funzioni continue, risultano continue le funzioni $c_1 f + c_2 g,\ c_1, c_2 \in \Re$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$,

$$f : X \to \mathcal{R}$$

Si dice che f è continua in X se essa è continua in tutti i punti di X.

Teorema
Le funzioni elementari sono continue nei rispettivi insiemi di definizione.

Teorema
Se f, g sono funzioni continue, risultano continue le funzioni $c_1 f + c_2 g,\ c_1, c_2 \in \Re$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$, $g : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \bar{\mathcal{R}}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \bar{\mathcal{R}}$ allora:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = l \pm m$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$, se $g(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = l^m$ se $f(x) > 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

purché $l \pm m$, $l \cdot m$, $\frac{l}{m}$, l^m abbiano senso in $\bar{\mathcal{R}}$.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$, $g : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \bar{\mathcal{R}}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \bar{\mathcal{R}}$
allora:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = l \pm m$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$, se $g(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = l^m$ se $f(x) > 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

purché $l \pm m$, $l \cdot m$, $\frac{l}{m}$, l^m abbiano senso in $\bar{\mathcal{R}}$.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$, $g : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \bar{\mathcal{R}}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \bar{\mathcal{R}}$
allora:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = l \pm m$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$, se $g(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = l^m$ se $f(x) > 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

purché $l \pm m$, $l \cdot m$, $\frac{l}{m}$, l^m abbiano senso in $\bar{\mathcal{R}}$.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$, $g : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \bar{\mathcal{R}}$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \bar{\mathcal{R}}$
allora:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = l \pm m$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$, se $g(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$
- $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = l^m$ se $f(x) > 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

purché $l \pm m$, $l \cdot m$, $\frac{l}{m}$, l^m abbiano senso in $\bar{\mathcal{R}}$.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$, $g : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \bar{\mathcal{R}}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \bar{\mathcal{R}}$ allora:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = l \pm m$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$, se $g(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = l^m$ se $f(x) > 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

purché $l \pm m$, $l \cdot m$, $\frac{l}{m}$, l^m abbiano senso in $\bar{\mathcal{R}}$.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$, $g : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \bar{\mathcal{R}}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \bar{\mathcal{R}}$
allora:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = l \pm m$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$, se $g(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = l^m$ se $f(x) > 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

purché $l \pm m$, $l \cdot m$, $\frac{l}{m}$, l^m abbiano senso in $\bar{\mathcal{R}}$.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$, $g : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e $x_0 \in \bar{\mathcal{R}}$.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \bar{\mathcal{R}}$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \bar{\mathcal{R}}$
allora:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = l \pm m$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$, se $g(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$
- $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = l^m$ se $f(x) > 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

purché $l \pm m$, $l \cdot m$, $\frac{l}{m}$, l^m abbiano senso in $\bar{\mathcal{R}}$.

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 3} \log_{10}(x^2 - 1)$$

Osserviamo che

1) $\lim_{x\to 3} x^2 - 1 = 8$
2) $\lim_{y\to 8} \log_{10} y = \log_{10} 8$

$$\lim_{x\to 3} \log_{10}(x^2 - 1) = \log_{10} 8$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 3} \log_{10}(x^2 - 1)$$

Osserviamo che

1) $\lim_{x\to 3} x^2 - 1 = 8$
2) $\lim_{y\to 8} \log_{10} y = \log_{10} 8$

$$\lim_{x\to 3} \log_{10}(x^2 - 1) = \log_{10} 8$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 3} \log_{10}(x^2 - 1)$$

Osserviamo che

1) $\lim_{x\to 3} x^2 - 1 = 8$
2) $\lim_{y\to 8} \log_{10} y = \log_{10} 8$

$$\lim_{x\to 3} \log_{10}(x^2 - 1) = \log_{10} 8$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 3} \log_{10}(x^2 - 1)$$

Osserviamo che

1) $\lim_{x \to 3} x^2 - 1 = 8$
2) $\lim_{y \to 8} \log_{10} y = \log_{10} 8$

$$\lim_{x \to 3} \log_{10}(x^2 - 1) = \log_{10} 8$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 3} \log_{10}(x^2 - 1)$$

Osserviamo che

1) $\lim_{x \to 3} x^2 - 1 = 8$
2) $\lim_{y \to 8} \log_{10} y = \log_{10} 8$

$$\lim_{x \to 3} \log_{10}(x^2 - 1) = \log_{10} 8$$

Limite di funzioni composte

Siano $X, Y \subseteq \mathcal{R}$, $x_0, y_0 \in \mathcal{R} a$ e

$$f : X \longrightarrow Y \quad g : Y \longrightarrow \mathcal{R}.$$

Se

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \ \ \lim_{y \to y_0} g(y) = l;$
2. $\exists I \in I(x_0) : f(x) \neq y_0, \forall x \in I - \{x_0\}$

allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$$

Limite di funzioni composte

Siano $X, Y \subseteq \mathcal{R}$, $x_0, y_0 \in \mathcal{R} a$ e

$$f : X \longrightarrow Y \quad g : Y \longrightarrow \mathcal{R}.$$

Se

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \;\; \lim_{y \to y_0} g(y) = l;$
2. $\exists I \in I(x_0) : f(x) \neq y_0, \forall x \in I - \{x_0\}$

allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$$

Limite di funzioni composte

Siano $X, Y \subseteq \mathcal{R}$, $x_0, y_0 \in \mathcal{R} a$ e

$$f : X \longrightarrow Y \quad g : Y \longrightarrow \mathcal{R}.$$

Se

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \;\; \lim_{y \to y_0} g(y) = l;$
2. $\exists I \in I(x_0) : f(x) \neq y_0, \forall x \in I - \{x_0\}$

allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$$

Limite di funzioni composte

Siano $X, Y \subseteq \mathcal{R}$, $x_0, y_0 \in \mathcal{R} a$ e

$$f : X \longrightarrow Y \quad g : Y \longrightarrow \mathcal{R}.$$

Se

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \ \ \lim_{y \to y_0} g(y) = l;$
2. $\exists I \in I(x_0) : f(x) \neq y_0, \forall x \in I - \{x_0\}$

allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} e^{\cos x}$$

Osserviamo che

1) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$
2) $\lim_{y \to 1} e^y = e$

Applicando il teorema sul limite di una funzione composta si ha che

$$\lim_{x \to 0} e^{\cos x} = e$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} e^{\cos x}$$

Osserviamo che

1) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$
2) $\lim_{y \to 1} e^y = e$

Applicando il teorema sul limite di una funzione composta si ha che

$$\lim_{x \to 0} e^{\cos x} = e$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} e^{\cos x}$$

Osserviamo che

1) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$
2) $\lim_{y \to 1} e^y = e$

Applicando il teorema sul limite di una funzione composta si ha che

$$\lim_{x \to 0} e^{\cos x} = e$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} e^{\cos x}$$

Osserviamo che

1) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$
2) $\lim_{y \to 1} e^y = e$

Applicando il teorema sul limite di una funzione composta si ha che

$$\lim_{x \to 0} e^{\cos x} = e$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} e^{\cos x}$$

Osserviamo che

1) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$
2) $\lim_{y\to 1} e^y = e$

Applicando il teorema sul limite di una funzione composta si ha che

$$\lim_{x\to 0} e^{\cos x} = e$$

Limite destro

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, x_0 un punto di accumulazione per X e

$$f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathcal{R}.$$

Se la restrizione di f all'insieme $X_r = \mathbb{X} \cap]x_0, +\infty[$ ammette limite in x_0, si definisce **limite destro** di f al tendere di x a x_0

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

il limite della restrizione di f all'insieme X_r.

Limite destro

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, x_0 un punto di accumulazione per X e

$$f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathcal{R}.$$

Se la restrizione di f all'insieme $X_r = \mathbb{X} \cap]x_0, +\infty[$ ammette limite in x_0, si definisce **limite destro** di f al tendere di x a x_0

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

il limite della restrizione di f all'insieme X_r.

Limite destro

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, x_0 un punto di accumulazione per X e

$$f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathcal{R}.$$

Se la restrizione di f all'insieme $X_r = \mathbb{X} \cap]x_0, +\infty[$ ammette limite in x_0, si definisce **limite destro** di f al tendere di x a x_0

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

il limite della restrizione di f all'insieme X_r.

Limite sinistro

Se la restrizione di f all'insieme $X_l = \mathbb{X} \cap]-\infty, x_0[$ ammette limite in x_0, si definisce **limite sinistro** di f al tendere di x a x_0

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

il limite della restrizione di f all'insieme X_l.

Limite sinistro

Se la restrizione di f all'insieme $X_l = \mathbb{X} \cap]-\infty, x_0[$ ammette limite in x_0, si definisce **limite sinistro** di f al tendere di x a x_0

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

il limite della restrizione di f all'insieme X_l.

Esempio

Verifichiamo se esiste:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non ammette limite in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

Esempio

Verifichiamo se esiste:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non ammette limite in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

Esempio

Verifichiamo se esiste:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non ammette limite in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

Esempio

Verifichiamo se esiste:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non ammette limite in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

Esempio

Verifichiamo se esiste:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non ammette limite in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

Esempio

Verifichiamo se esiste:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non ammette limite in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

Esempio

Verifichiamo se esiste:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

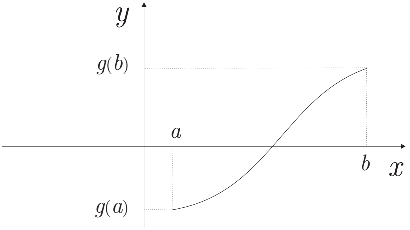
Quindi

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non ammette limite in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

Limiti di funzioni monotone

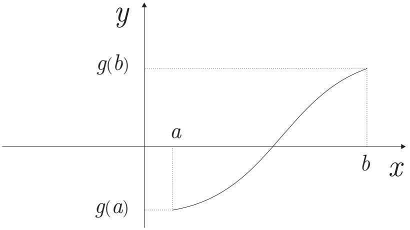
Siano $I =]a, b[$ e $f : I \to \mathcal{R}$. Se f è monotona in I allora



1. f ammette limite in a e b;
2. f crescente $\Rightarrow$
   $\lim a^+ f(x) = \inf_{x \in I} f(x); \lim b^- f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$;
3. f decrescente $\Rightarrow$
   $\lim a^+ f(x) = \sup_{x \in I} f(x); \lim b^- f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$.

Limiti di funzioni monotone

Siano $I =]a, b[$ e $f : I \to \mathcal{R}$. Se f è monotona in I allora



1. f ammette limite in a e b;
2. f crescente $\Rightarrow$
   $\lim a^+ f(x) = \inf_{x \in I} f(x); \lim b^- f(x) = \sup_{x \in I} f(x);$
3. f decrescente $\Rightarrow$
   $\lim a^+ f(x) = \sup_{x \in I} f(x); \lim b^- f(x) = \inf_{x \in I} f(x).$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0^+} \log_{10} x$$

abbiamo:

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = \inf \log x = -\infty$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0^+} \log_{10} x$$

abbiamo:

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = \inf \log x = -\infty$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} \log_{10} x$$

abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^+} \log x = \inf \log x = -\infty$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0^+} \log_{10} x$$

abbiamo:

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = \inf \log x = -\infty$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Per la monotonia della funzione esponenziale si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sup\left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x .$$

Per la monotonia della funzione esponenziale si ha

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \sup \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x .$$

Per la monotonia della funzione esponenziale si ha

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \sup \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$$

Calcoliamo i limiti di alcune funzioni elementari agli estremi del loro campo di esistenza:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti di alcune funzioni elementari agli estremi del loro campo di esistenza:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti di alcune funzioni elementari agli estremi del loro campo di esistenza:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti di alcune funzioni elementari agli estremi del loro campo di esistenza:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti di alcune funzioni elementari agli estremi del loro campo di esistenza:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x = \begin{cases} -\infty & 0<a<1 \\ +\infty & a>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\log_a x = \begin{cases} -\infty & a>1 \\ +\infty & 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x = \begin{cases} -\infty & 0<a<1 \\ +\infty & a>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\log_a x = \begin{cases} -\infty & a>1 \\ +\infty & 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

In particolare si ha

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty \quad \lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$

In particolare si ha

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty \quad \lim_{x\to0^+} \log x = -\infty$$

In particolare si ha

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty \quad \lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$

In particolare si ha

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty \quad \lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sen} x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \cos x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \cos x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sen} x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \cos x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \cos x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{sen} x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{sen} x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \cos x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \cos x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sem} x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sem} x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \cos x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \cos x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{tg}x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{tg}x \quad \text{non esiste}$$

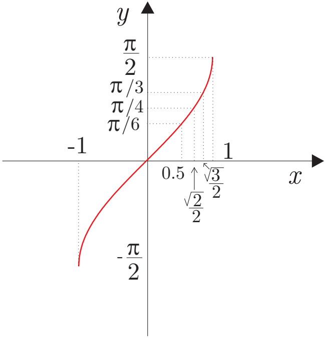
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{tg} x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{tg} x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{tg}\, x \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{tg}\, x \quad \text{non esiste}$$

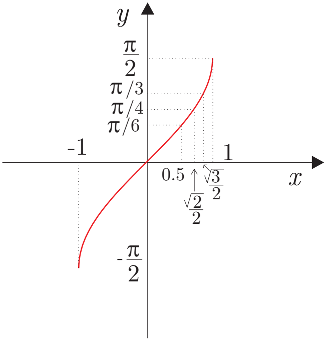
Arcoseno



$$\lim_{x\to -1^+} \mathrm{arcsen}\, \mathit{senx} = -\pi/2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \mathrm{arcsen} x = \pi/2$$

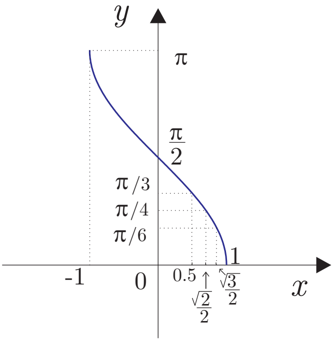
Arcoseno



$$\lim_{x\to -1^{+}} \mathrm{arcsen}\, sen x = -\pi/2$$

$$\lim_{x\to 1^{-}} \mathrm{arcsen} x = \pi/2$$

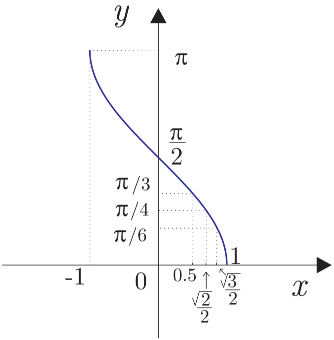
Arcocoseno



$$\lim_{x\to -1^+} \arccos x = \pi$$

$$\lim_{x\to 1^-} \arccos x = 0$$

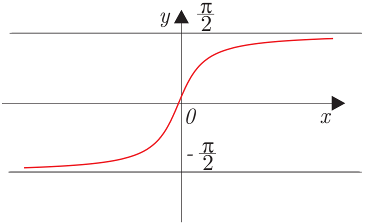
Arcocoseno



$$\lim_{x \to -1^+} \arccos x = \pi$$

$$\lim_{x \to 1^-} \arccos x = 0$$

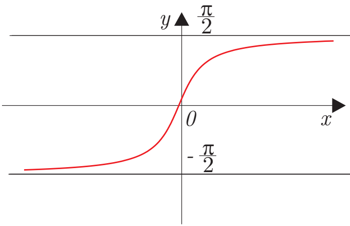
Arcotangente



$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$$

Arcotangente



$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log_a x = 0, \ \alpha > 0$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log_a x = 0, \ \alpha > 0$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log_a x = 0, \ \alpha > 0$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log_a x = 0, \ \alpha > 0$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log_a x = 0, \ \alpha > 0$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log_a x = 0, \ \alpha > 0$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0, \ \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^{\alpha}}=0,\ \alpha>0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=0,\ \alpha>0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0, \ \alpha > 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0, \ \alpha > 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0,\ \alpha > 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \qquad a > 1, \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{a^x} = 0, \quad a > 1, \alpha > 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad a > 1, \alpha > 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad a > 1, \alpha > 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad a > 1, \alpha > 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Supponiamo di investire un capitale $C_0 = 1$€ in accordo con la legge dell'interesse semplice:

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \longrightarrow C_0(1 + 1 \cdot t)$$

con tasso annuale $i = 100\%$. Dopo 1 anno:

$$C_1 = f(1) = 1(1 + 1 \cdot 1) = \mathbf{2} \text{ €}$$

Supponiamo che gli interessi maturati vengano **capitalizzati semestralmente**. Dopo 6 mesi:

$$C_{1/2} = f(1/2) = 1\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.5 \text{ €}$$

Reinvestendo il capitale $C_{1/2}$ per un altro semestre abbiamo:

$$C_1 = C_{1/2}\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{2.25} \text{ €}$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Supponiamo di investire un capitale $C_0 = 1$€ in accordo con la legge dell'interesse semplice:

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \longrightarrow C_0(1 + 1 \cdot t)$$

con tasso annuale $i = 100\%$. Dopo 1 anno:

$$C_1 = f(1) = 1(1 + 1 \cdot 1) = \mathbf{2} \text{ €}$$

Supponiamo che gli interessi maturati vengano **capitalizzati semestralmente**. Dopo 6 mesi:

$$C_{1/2} = f(1/2) = 1\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.5 \text{ €}$$

Reinvestendo il capitale $C_{1/2}$ per un altro semestre abbiamo:

$$C_1 = C_{1/2}\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{2.25} \text{ €}$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Supponiamo di investire un capitale $C_0 = 1$€ in accordo con la legge dell'interesse semplice:

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \longrightarrow C_0(1 + 1 \cdot t)$$

con tasso annuale $i = 100\%$. Dopo 1 anno:

$$C_1 = f(1) = 1(1 + 1 \cdot 1) = \mathbf{2} \text{ €}$$

Supponiamo che gli interessi maturati vengano **capitalizzati semestralmente**. Dopo 6 mesi:

$$C_{1/2} = f(1/2) = 1\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.5 \text{ €}$$

Reinvestendo il capitale $C_{1/2}$ per un altro semestre abbiamo:

$$C_1 = C_{1/2}\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{2.25} \text{ €}$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Supponiamo di investire un capitale $C_0 = 1$€ in accordo con la legge dell'interesse semplice:

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \longrightarrow C_0(1 + 1 \cdot t)$$

con tasso annuale $i = 100\%$. Dopo 1 anno:

$$C_1 = f(1) = 1(1 + 1 \cdot 1) = \mathbf{2} \text{ €}$$

Supponiamo che gli interessi maturati vengano **capitalizzati semestralmente**. Dopo 6 mesi:

$$C_{1/2} = f(1/2) = 1\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.5 \text{ €}$$

Reinvestendo il capitale $C_{1/2}$ per un altro semestre abbiamo:

$$C_1 = C_{1/2}\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{2.25} \text{ €}$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Supponiamo di investire un capitale $C_0 = 1€$ in accordo con la legge dell'interesse semplice:

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \longrightarrow C_0(1 + 1 \cdot t)$$

con tasso annuale $i = 100\%$. Dopo 1 anno:

$$C_1 = f(1) = 1(1 + 1 \cdot 1) = \mathbf{2}\ €$$

Supponiamo che gli interessi maturati vengano **capitalizzati semestralmente**. Dopo 6 mesi:

$$C_{1/2} = f(1/2) = 1\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.5\ €$$

Reinvestendo il capitale $C_{1/2}$ per un altro semestre abbiamo:

$$C_1 = C_{1/2}\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{2.25}\ €$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Supponiamo di investire un capitale $C_0 = 1$€ in accordo con la legge dell'interesse semplice:

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \longrightarrow C_0(1 + 1 \cdot t)$$

con tasso annuale $i = 100\%$. Dopo 1 anno:

$$C_1 = f(1) = 1(1 + 1 \cdot 1) = \mathbf{2} \text{ €}$$

Supponiamo che gli interessi maturati vengano **capitalizzati semestralmente**. Dopo 6 mesi:

$$C_{1/2} = f(1/2) = 1\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.5 \text{ €}$$

Reinvestendo il capitale $C_{1/2}$ per un altro semestre abbiamo:

$$C_1 = C_{1/2}\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{2.25} \text{ €}$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Supponiamo di investire un capitale $C_0 = 1$€ in accordo con la legge dell'interesse semplice:

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \longrightarrow C_0(1 + 1 \cdot t)$$

con tasso annuale $i = 100\%$. Dopo 1 anno:

$$C_1 = f(1) = 1(1 + 1 \cdot 1) = \mathbf{2} \text{ €}$$

Supponiamo che gli interessi maturati vengano **capitalizzati semestralmente**. Dopo 6 mesi:

$$C_{1/2} = f(1/2) = 1\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.5 \text{ €}$$

Reinvestendo il capitale $C_{1/2}$ per un altro semestre abbiamo:

$$C_1 = C_{1/2}\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{2.25} \text{ €}$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Supponiamo di investire un capitale $C_0 = 1€$ in accordo con la legge dell'interesse semplice:

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \longrightarrow C_0(1 + 1 \cdot t)$$

con tasso annuale $i = 100\%$. Dopo 1 anno:

$$C_1 = f(1) = 1(1 + 1 \cdot 1) = \mathbf{2} \; €$$

Supponiamo che gli interessi maturati vengano **capitalizzati semestralmente**. Dopo 6 mesi:

$$C_{1/2} = f(1/2) = 1\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.5 \; €$$

Reinvestendo il capitale $C_{1/2}$ per un altro semestre abbiamo:

$$C_1 = C_{1/2}\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{2.25} \; €$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Supponiamo di investire un capitale $C_0 = 1€$ in accordo con la legge dell'interesse semplice:

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \longrightarrow C_0(1 + 1 \cdot t)$$

con tasso annuale $i = 100\%$. Dopo 1 anno:

$$C_1 = f(1) = 1(1 + 1 \cdot 1) = \mathbf{2}\ €$$

Supponiamo che gli interessi maturati vengano **capitalizzati semestralmente**. Dopo 6 mesi:

$$C_{1/2} = f(1/2) = 1\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.5\ €$$

Reinvestendo il capitale $C_{1/2}$ per un altro semestre abbiamo:

$$C_1 = C_{1/2}\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{2.25}\ €$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Supponiamo di investire un capitale $C_0 = 1$€ in accordo con la legge dell'interesse semplice:

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \longrightarrow C_0(1 + 1 \cdot t)$$

con tasso annuale $i = 100\%$. Dopo 1 anno:

$$C_1 = f(1) = 1(1 + 1 \cdot 1) = \mathbf{2} \text{ €}$$

Supponiamo che gli interessi maturati vengano **capitalizzati semestralmente**. Dopo 6 mesi:

$$C_{1/2} = f(1/2) = 1\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.5 \text{ €}$$

Reinvestendo il capitale $C_{1/2}$ per un altro semestre abbiamo:

$$C_1 = C_{1/2}\left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{2.25} \text{ €}$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Capitalizzando gli interessi con frequenza semestrale, si ottiene un montante finale maggiore.

Nel regime dell'interesse semplice, conviene capitalizzare gli interessi nel corso dell'anno.

Se viene attuata una capitalizzazione degli interessi con frequenza annua m, dopo 1 anno abbiamo:

$$C_1 = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m \text{€}$$

Al limite, quando la **capitalizzazione è continua nel corso dell'anno** abbiamo:

$$C_1 = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m = \mathbf{e} \text{ €}$$

$$\mathbf{e} \simeq \mathbf{2.71828182845905}$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Capitalizzando gli interessi con frequenza semestrale, si ottiene un montante finale maggiore.

Nel regime dell'interesse semplice, conviene capitalizzare gli interessi nel corso dell'anno.

Se viene attuata una capitalizzazione degli interessi con frequenza annua m, dopo 1 anno abbiamo:

$$C_1 = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m \text{€}$$

Al limite, quando la **capitalizzazione è continua nel corso dell'anno** abbiamo:

$$C_1 = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m = \mathbf{e} \text{ €}$$

$$\mathbf{e} \simeq \mathbf{2.71828182845905}$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Capitalizzando gli interessi con frequenza semestrale, si ottiene un montante finale maggiore.

Nel regime dell'interesse semplice, conviene capitalizzare gli interessi nel corso dell'anno.

Se viene attuata una capitalizzazione degli interessi con frequenza annua m, dopo 1 anno abbiamo:

$$C_1 = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m \text{€}$$

Al limite, quando la **capitalizzazione è continua nel corso dell'anno** abbiamo:

$$C_1 = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m = \mathbf{e} \text{ €}$$

$$\mathbf{e} \simeq \mathbf{2.71828182845905}$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Capitalizzando gli interessi con frequenza semestrale, si ottiene un montante finale maggiore.

Nel regime dell'interesse semplice, conviene capitalizzare gli interessi nel corso dell'anno.

Se viene attuata una capitalizzazione degli interessi con frequenza annua m, dopo 1 anno abbiamo:

$$C_1 = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m \text{ €}$$

Al limite, quando la **capitalizzazione è continua nel corso dell'anno** abbiamo:

$$C_1 = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m = \mathbf{e} \text{ €}$$

$$\mathbf{e} \simeq \mathbf{2.71828182845905}$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Capitalizzando gli interessi con frequenza semestrale, si ottiene un montante finale maggiore.

Nel regime dell'interesse semplice, conviene capitalizzare gli interessi nel corso dell'anno.

Se viene attuata una capitalizzazione degli interessi con frequenza annua m, dopo 1 anno abbiamo:

$$C_1 = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m \text{€}$$

Al limite, quando la **capitalizzazione è continua nel corso dell'anno** abbiamo:

$$C_1 = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m = \mathbf{e} \text{ €}$$

$$\mathbf{e} \simeq \mathbf{2.71828182845905}$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Capitalizzando gli interessi con frequenza semestrale, si ottiene un montante finale maggiore.

Nel regime dell'interesse semplice, conviene capitalizzare gli interessi nel corso dell'anno.

Se viene attuata una capitalizzazione degli interessi con frequenza annua m, dopo 1 anno abbiamo:

$$C_1 = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m \text{ €}$$

Al limite, quando la **capitalizzazione è continua nel corso dell'anno** abbiamo:

$$C_1 = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m = \mathbf{e} \text{ €}$$

$$\mathbf{e} \simeq \mathbf{2.71828182845905}$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Capitalizzando gli interessi con frequenza semestrale, si ottiene un montante finale maggiore.

Nel regime dell'interesse semplice, conviene capitalizzare gli interessi nel corso dell'anno.

Se viene attuata una capitalizzazione degli interessi con frequenza annua m, dopo 1 anno abbiamo:

$$C_1 = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m \text{ €}$$

Al limite, quando la **capitalizzazione è continua nel corso dell'anno** abbiamo:

$$C_1 = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m = \mathbf{e} \text{ €}$$

$$\mathbf{e} \simeq \mathbf{2.71828182845905}$$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Capitalizzando gli interessi con frequenza semestrale, si ottiene un montante finale maggiore.

Nel regime dell'interesse semplice, conviene capitalizzare gli interessi nel corso dell'anno.

Se viene attuata una capitalizzazione degli interessi con frequenza annua m, dopo 1 anno abbiamo:

$$C_1 = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m \text{€}$$

Al limite, quando la **capitalizzazione è continua nel corso dell'anno** abbiamo:

$$C_1 = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m = \mathbf{e} \text{ €}$$

$\mathbf{e} \simeq \mathbf{2.71828182845905}$

Interpretazione economica del numero di Nepero

Capitalizzando gli interessi con frequenza semestrale, si ottiene un montante finale maggiore.

Nel regime dell'interesse semplice, conviene capitalizzare gli interessi nel corso dell'anno.

Se viene attuata una capitalizzazione degli interessi con frequenza annua m, dopo 1 anno abbiamo:

$$C_1 = \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m \text{€}$$

Al limite, quando la **capitalizzazione è continua nel corso dell'anno** abbiamo:

$$C_1 = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + 1 \cdot \frac{1}{m}\right)^m = \mathbf{e} \text{ €}$$

$$\mathbf{e} \simeq \mathbf{2.71828182845905}$$

Punti di discontinuità

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$, x_0 punto di accumulazione per X; supponiamo che valga una delle alternative:

1. $x_0 \in X$ e f non è continua in x_0;
2. f non è definita in x_0.

Si dice che x_0 è un punto di discontinuità per f. Classifichiamo nel modo seguente i punti di discontinuità:

- **eliminabile** se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathcal{R}$;
- **di I specie** se

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1, \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$$

$$l_1, l_2 \in \mathcal{R}, \ l_1 \neq l_2;$$

- **di II specie** negli altri casi.

Prolungamento per continuità

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X.
Se f ammette limite in x_0,

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l, \quad l \in \mathcal{R}$$

si definisce **prolungamento per continuità** di f in x_0 la funzione

$$\bar{f} : x \in X \cup \{x_0\} \rightarrow \begin{cases} f(x) & x \in X \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

$\bar{f}$ è continua in x_0.

Prolungamento per continuità

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X. Se f ammette limite in x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \quad l \in \mathcal{R}$$

si definisce **prolungamento per continuità** di f in x_0 la funzione

$$\bar{f} : x \in X \cup \{x_0\} \to \begin{cases} f(x) & x \in X \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

$\bar{f}$ è continua in x_0.

Prolungamento per continuità

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X.
Se f ammette limite in x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \quad l \in \mathcal{R}$$

si definisce **prolungamento per continuità** di f in x_0 la funzione

$$\bar{f} : x \in X \cup \{x_0\} \to \begin{cases} f(x) & x \in X \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

$\bar{f}$ è continua in x_0.

Prolungamento per continuità

Siano $X \subseteq \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X. Se f ammette limite in x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \quad l \in \mathcal{R}$$

si definisce **prolungamento per continuità** di f in x_0 la funzione

$$\bar{f} : x \in X \cup \{x_0\} \to \begin{cases} f(x) & x \in X \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

$\bar{f}$ è continua in x_0.

Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\text{sem} x}{x}.$$

$D = \mathcal{R} - \{0\}$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

La funzione

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \frac{\text{sem} x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

è il prolungamento per continuità di f.

Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\mathrm{sem} x}{x}.$$

$D = \mathcal{R} - \{0\}$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

La funzione

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{sem} x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

è il prolungamento per continuità di f.

Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

$D = \mathcal{R} - \{0\}$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

La funzione

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

è il prolungamento per continuità di f.

Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\text{sen}x}{x}.$$

$D = \mathcal{R} - \{0\}.$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

La funzione

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

è il prolungamento per continuità di f.

Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\mathrm{sem} x}{x}.$$

$D = \mathcal{R} - \{0\}$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

La funzione

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{sem} x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

è il prolungamento per continuità di f.