

Funzioni elementari

22 ottobre 2022

Funzione potenza

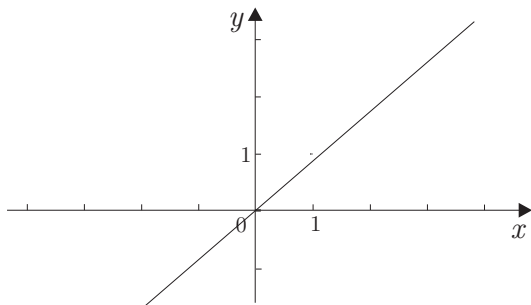
Fissato $n \in \mathbb{N}$ la funzione

$$p_n : x \in \mathcal{R} \Rightarrow x^n \in \mathcal{R}$$

si chiama funzione **potenza n -ma**.

Esempio

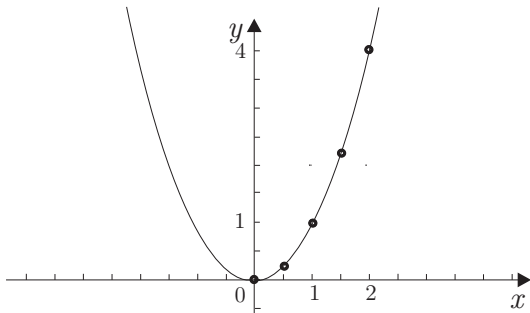
$$n = 1 \Rightarrow p_1 : x \in \mathcal{R} \Rightarrow x^1 \in \mathcal{R}$$



Funzione identica

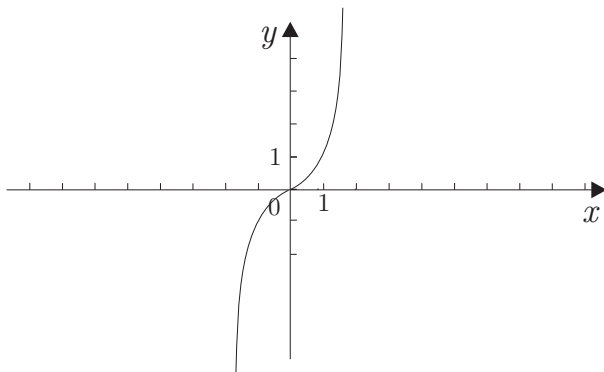
Esempio

$$n = 2 \Rightarrow p_2 : x \in \mathcal{R} \Rightarrow x^2 \in \mathcal{R}$$



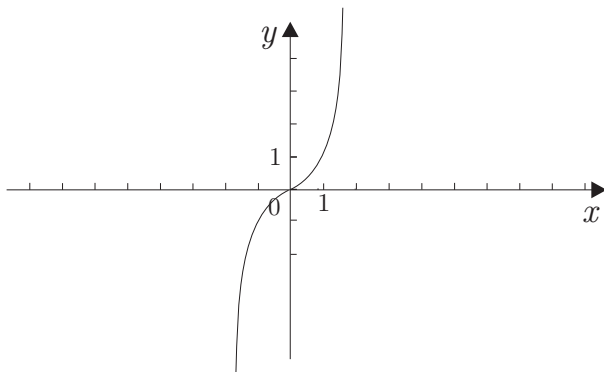
Esempio

$$n = 3 \Rightarrow p_3 : x \in \mathcal{R} \Rightarrow x^3 \in \mathcal{R}$$



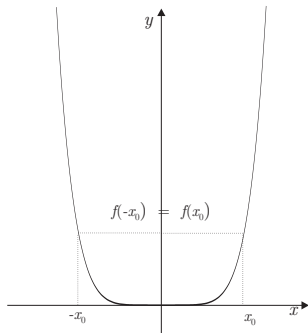
Esempio

$$n = 3 \Rightarrow p_3 : x \in \mathcal{R} \Rightarrow x^3 \in \mathcal{R}$$



Proprietà della funzione potenza n -ma

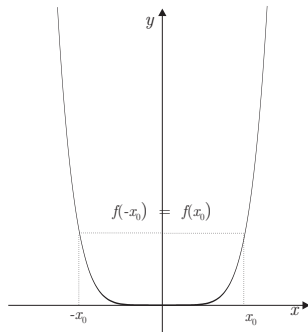
se n è pari



- $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n \Leftrightarrow$ la restrizione a $[0, +\infty)$ è **strettamente crescente** su $[0, +\infty)$.
- $(-x)^n = x^n \Rightarrow$ **funzione pari**.

Proprietà della funzione potenza n -ma

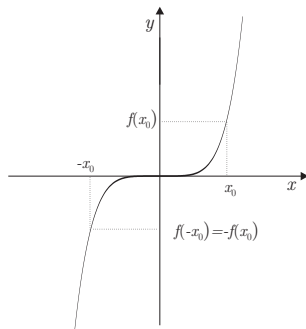
se n è pari



- $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n \Leftrightarrow$ la restrizione a $[0, +\infty)$ è **strettamente crescente** su $[0, +\infty)$.
- $(-x)^n = x^n \Rightarrow$ **funzione pari**.

Proprietà della funzione potenza n -ma

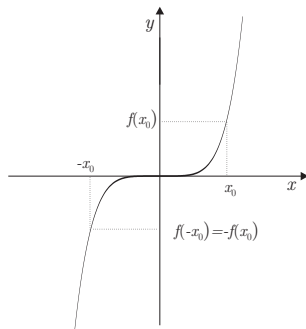
se n è dispari



- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n \Leftrightarrow$ la funzione è **strettamente crescente**;
- $(-x)^n = -x^n \Rightarrow$ **funzione dispari**.

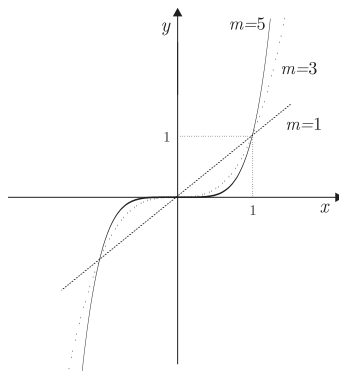
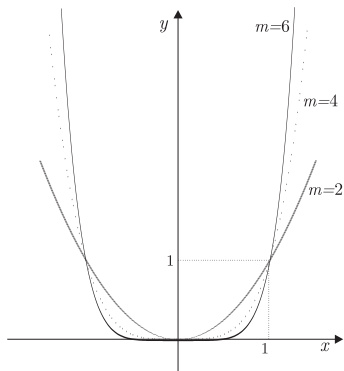
Proprietà della funzione potenza n -ma

se n è dispari



- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n \Leftrightarrow$ la funzione è **strettamente crescente**;
- $(-x)^n = -x^n \Rightarrow$ **funzione dispari**.

Grafico della funzione potenza n -ma



Proprietà della funzione potenza n -ma

La funzione potenza n -ma è

- per ogni n dispari
 - illimitata inferiormente, illimitata superiormente:
 $\inf p_n(x) = -\infty, \sup p_n(x) = +\infty$
- per ogni n pari
 - limitata inferiormente, illimitata superiormente:
 $\inf p_n(x) = \min p_n(x) = 0, \sup p_n(x) = +\infty$

La restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$

$$p_n^+ : x \in [0, +\infty) \Rightarrow x^n \in [0, +\infty)$$

è invertibile:

$$\forall y \in [0, +\infty) \quad \exists! x \in [0, +\infty) : x^n = y \iff \sqrt[n]{y} = x$$

L'inversa di tale restrizione si chiama **Radice n -ma**

La restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$

$$p_n^+ : x \in [0, +\infty) \Rightarrow x^n \in [0, +\infty)$$

è invertibile:

$$\forall y \in [0, +\infty) \quad \exists! x \in [0, +\infty) : x^n = y \iff \sqrt[n]{y} = x$$

L'inversa di tale restrizione si chiama **Radice n -ma**

La restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$

$$p_n^+ : x \in [0, +\infty) \Rightarrow x^n \in [0, +\infty)$$

è invertibile:

$$\forall y \in [0, +\infty) \quad \exists! x \in [0, +\infty) : x^n = y \iff \sqrt[n]{y} = x$$

L'inversa di tale restrizione si chiama **Radice n -ma**

La restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$

$$p_n^+ : x \in [0, +\infty) \Rightarrow x^n \in [0, +\infty)$$

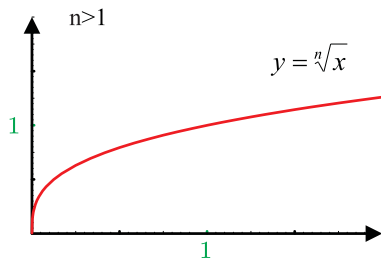
è invertibile:

$$\forall y \in [0, +\infty) \quad \exists! x \in [0, +\infty) : x^n = y \iff \sqrt[n]{y} = x$$

L'inversa di tale restrizione si chiama **Radice n -ma**

Funzione radice n-ma

$$\text{rad}_n : x \in [0, +\infty) \rightarrow \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N}$$



funzione **strettamente crescente**.

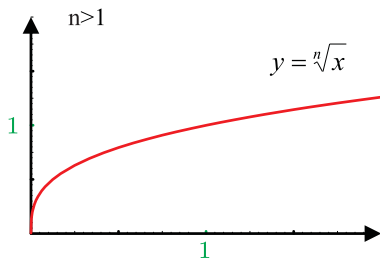
$$\min \text{rad}_n(x) = 0 \quad ; \quad \sup \text{rad}_n(x) = +\infty$$

NOTA: se n è dispari e $x < 0$ si pone

$$\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$$

Funzione radice n-ma

$$\text{rad}_n : x \in [0, +\infty) \rightarrow \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N}$$



funzione **strettamente crescente**.

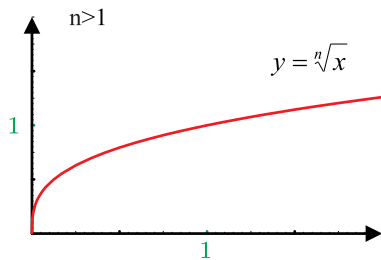
$$\min \text{rad}_n(x) = 0 \quad ; \quad \sup \text{rad}_n(x) = +\infty$$

NOTA: se n è dispari e $x < 0$ si pone

$$\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$$

Funzione radice n-ma

$$\text{rad}_n : x \in [0, +\infty) \rightarrow \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N}$$



funzione **strettamente crescente**.

$$\min \text{rad}_n(x) = 0 \quad ; \quad \sup \text{rad}_n(x) = +\infty$$

NOTA: se n è dispari e $x < 0$ si pone

$$\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$$

Proprietà dell'operazione di potenza

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} (x^{\frac{1}{n}})^n &= x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x \\ (\sqrt[n]{x})^n &= \sqrt[n]{x^n} = x \end{aligned}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad x \neq 0$$

Proprietà dell'operazione di potenza

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} (x^{\frac{1}{n}})^n &= x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x \\ (\sqrt[n]{x})^n &= \sqrt[n]{x^n} = x \end{aligned}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad x \neq 0$$

Proprietà dell'operazione di potenza

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} (x^{\frac{1}{n}})^n &= x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x \\ (\sqrt[n]{x})^n &= \sqrt[n]{x^n} = x \end{aligned}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad x \neq 0$$

Proprietà dell'operazione di potenza

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} (x^{\frac{1}{n}})^n &= x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x \\ (\sqrt[n]{x})^n &= \sqrt[n]{x^n} = x \end{aligned}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad x \neq 0$$

Estensione dell'operazione di potenza

Consideriamo l'espressione

$$a^b$$

$$b \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ volte}}$$

$$b \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, a^b = \frac{1}{a^{-b}}$$

$$b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty), a^b = (\sqrt[m]{a})^n, b = \frac{n}{m}$$

$$b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty), a^b = ?$$

Estensione dell'operazione di potenza

Consideriamo l'espressione

$$a^b$$

$$b \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ volte}}$$

$$b \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, a^b = \frac{1}{a^{-b}}$$

$$b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty), a^b = (\sqrt[m]{a})^n, b = \frac{n}{m}$$

$$b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty), a^b = ?$$

Estensione dell'operazione di potenza

Consideriamo l'espressione

$$a^b$$

$$b \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ volte}}$$

$$b \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, a^b = \frac{1}{a^{-b}}$$

$$b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty), a^b = (\sqrt[m]{a})^n, b = \frac{n}{m}$$

$$b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty), a^b = ?$$

Estensione dell'operazione di potenza

Consideriamo l'espressione

$$a^b$$

$$b \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots a}_{b \text{ volte}}$$

$$b \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, a^b = \frac{1}{a^{-b}}$$

$$b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty), a^b = (\sqrt[m]{a})^n, b = \frac{n}{m}$$

$$b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty), a^b = ?$$

Estensione dell'operazione di potenza

Consideriamo l'espressione

$$a^b$$

$$b \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots a}_{b \text{ volte}}$$

$$b \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, a^b = \frac{1}{a^{-b}}$$

$$b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty), a^b = (\sqrt[m]{a})^n, b = \frac{n}{m}$$

$$b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty), a^b = ?$$

Estensione dell'operazione di potenza

Consideriamo l'espressione

$$a^b$$

$$b \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ volte}}$$

$$b \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, a^b = \frac{1}{a^{-b}}$$

$$b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty), a^b = (\sqrt[m]{a})^n, b = \frac{n}{m}$$

$$b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty), a^b = ?$$

Estensione dell'operazione di potenza

Consideriamo l'espressione

$$a^b$$

$$b \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots a}_{b \text{ volte}}$$

$$b \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, a^b = \frac{1}{a^{-b}}$$

$$b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty), a^b = (\sqrt[m]{a})^n, b = \frac{n}{m}$$

$$b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \forall a \in]0, +\infty), a^b = ?$$

Potenza con esponente reale

b	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
2^b	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2

b	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$(\frac{1}{2})^b$	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$

Teorema

$\forall a \in]0, +\infty[$:

$$\forall b_1, b_2 \in \mathbb{Q} : b_1 < b_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{b_1} < a^{b_2}, & a > 1 \\ a^{b_1} = a^{b_2} = 1, & a = 1 \\ a^{b_1} > a^{b_2}, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Potenza con esponente reale

b	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
2^b	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2

b	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$(\frac{1}{2})^b$	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$

Teorema

$\forall a \in]0, +\infty[$:

$$\forall b_1, b_2 \in \mathbb{Q} : b_1 < b_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{b_1} < a^{b_2}, & a > 1 \\ a^{b_1} = a^{b_2} = 1, & a = 1 \\ a^{b_1} > a^{b_2}, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Potenza con esponente reale

b	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
2^b	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2

b	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$(\frac{1}{2})^b$	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$

Teorema

$\forall a \in]0, +\infty[$:

$$\forall b_1, b_2 \in \mathbb{Q} : b_1 < b_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{b_1} < a^{b_2}, & a > 1 \\ a^{b_1} = a^{b_2} = 1, & a = 1 \\ a^{b_1} > a^{b_2}, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Potenza con esponente reale

b	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
2^b	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2

b	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$(\frac{1}{2})^b$	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$

Teorema

$\forall a \in]0, +\infty[$:

$$\forall b_1, b_2 \in \mathbb{Q} : b_1 < b_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{b_1} < a^{b_2}, & a > 1 \\ a^{b_1} = a^{b_2} = 1, & a = 1 \\ a^{b_1} > a^{b_2}, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Potenza con esponente reale

b	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
2^b	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2

b	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$(\frac{1}{2})^b$	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$

Teorema

$\forall a \in]0, +\infty[$:

$$\forall b_1, b_2 \in \mathbb{Q} : b_1 < b_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{b_1} < a^{b_2}, & a > 1 \\ a^{b_1} = a^{b_2} = 1, & a = 1 \\ a^{b_1} > a^{b_2}, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Potenza con esponente reale

b	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
2^b	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2

b	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$(\frac{1}{2})^b$	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$

Teorema

$\forall a \in]0, +\infty[$:

$$\forall b_1, b_2 \in \mathbb{Q} : b_1 < b_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{b_1} < a^{b_2}, & a > 1 \\ a^{b_1} = a^{b_2} = 1, & a = 1 \\ a^{b_1} > a^{b_2}, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Potenza con esponente reale

$$\forall b \in \mathcal{R} \text{ siano } \begin{cases} A_b = \{x \in Q : x < b\} \\ B_b = \{y \in Q : y > b\} \end{cases}$$

Tranne che per $a = 1$, gli insiemi:

$$\overline{A}_b = \{a^x, x \in A_b\} \text{ e } \overline{B}_b = \{a^y, y \in B_b\}$$

sono **separati**: ogni elemento di uno è minore di ogni elemento dell'altro.

Si dimostra che sono, anche, **contigui**: l'estremo superiore di uno è uguale all'estremo inferiore dell'altro; tale valore si chiama **elemento di separazione** tra i due insiemi.

Potenza con esponente reale

$$\forall b \in \mathcal{R} \text{ siano } \begin{cases} A_b = \{x \in Q : x < b\} \\ B_b = \{y \in Q : y > b\} \end{cases}$$

Tranne che per $a = 1$, gli insiemi:

$$\overline{A}_b = \{a^x, x \in A_b\} \text{ e } \overline{B}_b = \{a^y, y \in B_b\}$$

sono **separati**: ogni elemento di uno è minore di ogni elemento dell'altro.

Si dimostra che sono, anche, **contigui**: l'estremo superiore di uno è uguale all'estremo inferiore dell'altro; tale valore si chiama **elemento di separazione** tra i due insiemi.

Definizione di potenza con esponente reale

Definizione:

si indica con il simbolo a^b l'elemento di separazione tra gli insiemi

$$\overline{A}_b \text{ e } \overline{B}_b$$

dove:

$$\begin{aligned}\overline{A}_b &= \{a^x, x \in Q : x < b\} \\ \overline{B}_b &= \{a^y, y \in Q : y > b\}\end{aligned}$$

Proprietà della potenza a esponente reale

$$\forall a, b, r, s \in \mathcal{R}, a > 0, b > 0$$

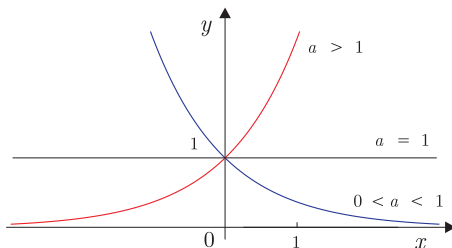
- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$
- $a < b, r > 0 \Rightarrow a^r < b^r$
- $a < b, r < 0 \Rightarrow a^r > b^r$
- $a > 1, r < s \Rightarrow a^r < a^s$
- $a < 1, r < s \Rightarrow a^r > a^s$

Funzione esponenziale

Fissato $a \in \mathcal{R}^+$, la funzione:

$$\exp_a : x \in \mathcal{R} \Rightarrow a^x \in \mathcal{R}^+$$

si chiama funzione esponenziale.



La funzione esponenziale è:

- strettamente crescente per $a > 1$
- costante per $a = 1$
- strettamente decrescente per $0 < a < 1$

La funzione esponenziale è

- limitata inferiormente
- illimitata superiormente

$$\sup \exp_a(x) = +\infty ; \quad \inf \exp_a(x) = 0$$

Progressione geometrica

Valutiamo la funzione esponenziale descritta dalla legge $f(x) = a^x$ in corrispondenza dei valori $x = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$

Otteniamo:

$$y_0 = f(0) = 1$$

$$y_1 = f(1) = a = a \cdot y_0$$

$$y_2 = f(2) = a^2 = a \cdot y_1$$

...

$$y_n = f(n) = a^n = a \cdot y_{n-1}$$

...

osserviamo che

$$y_{n+1}/y_n = a \quad \forall n$$

progressione geometrica

Progressione geometrica

Valutiamo la funzione esponenziale descritta dalla legge $f(x) = a^x$ in corrispondenza dei valori $x = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$

Otteniamo:

$$y_0 = f(0) = 1$$

$$y_1 = f(1) = a = a \cdot y_0$$

$$y_2 = f(2) = a^2 = a \cdot y_1$$

...

$$y_n = f(n) = a^n = a \cdot y_{n-1}$$

...

osserviamo che

$$y_{n+1}/y_n = a \quad \forall n$$

progressione geometrica

Progressione geometrica

Valutiamo la funzione esponenziale descritta dalla legge $f(x) = a^x$ in corrispondenza dei valori $x = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$

Otteniamo:

$$y_0 = f(0) = 1$$

$$y_1 = f(1) = a = a \cdot y_0$$

$$y_2 = f(2) = a^2 = a \cdot y_1$$

...

$$y_n = f(n) = a^n = a \cdot y_{n-1}$$

...

osserviamo che

$$y_{n+1}/y_n = a \quad \forall n$$

progressione geometrica

Progressione geometrica

Valutiamo la funzione esponenziale descritta dalla legge $f(x) = a^x$ in corrispondenza dei valori $x = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$

Otteniamo:

$$y_0 = f(0) = 1$$

$$y_1 = f(1) = a = a \cdot y_0$$

$$y_2 = f(2) = a^2 = a \cdot y_1$$

...

$$y_n = f(n) = a^n = a \cdot y_{n-1}$$

...

osserviamo che

$$y_{n+1}/y_n = a \quad \forall n$$

progressione geometrica

Progressione geometrica

Valutiamo la funzione esponenziale descritta dalla legge $f(x) = a^x$ in corrispondenza dei valori $x = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$

Otteniamo:

$$y_0 = f(0) = 1$$

$$y_1 = f(1) = a = a \cdot y_0$$

$$y_2 = f(2) = a^2 = a \cdot y_1$$

...

$$y_n = f(n) = a^n = a \cdot y_{n-1}$$

...

osserviamo che

$$y_{n+1}/y_n = a \quad \forall n$$

progressione geometrica

Progressione geometrica

Valutiamo la funzione esponenziale descritta dalla legge $f(x) = a^x$ in corrispondenza dei valori $x = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$

Otteniamo:

$$y_0 = f(0) = 1$$

$$y_1 = f(1) = a = a \cdot y_0$$

$$y_2 = f(2) = a^2 = a \cdot y_1$$

...

$$y_n = f(n) = a^n = a \cdot y_{n-1}$$

...

osserviamo che

$$y_{n+1}/y_n = a \quad \forall n$$

progressione geometrica

Progressione geometrica

Valutiamo la funzione esponenziale descritta dalla legge $f(x) = a^x$ in corrispondenza dei valori $x = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$

Otteniamo:

$$y_0 = f(0) = 1$$

$$y_1 = f(1) = a = a \cdot y_0$$

$$y_2 = f(2) = a^2 = a \cdot y_1$$

...

$$y_n = f(n) = a^n = a \cdot y_{n-1}$$

...

osserviamo che

$$y_{n+1}/y_n = a \quad \forall n$$

progressione geometrica

Legge di capitalizzazione composta

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \longrightarrow C_0(1+i)^t,$$

con C_0 capitale iniziale e i tasso di interesse.

$f(t) = C_0(1+i)^t$ rappresenta il montante prodotto al tempo t .

La quantità $(1+i)^t$ è il **fattore montante** nel regime dell'interesse composto.

Se $n \in \mathcal{N}$ misura il tempo in anni, allora:

$$f(n) = C_0(1+i)^n, \quad f(n)/f(n-1) = 1+i.$$

Legge di capitalizzazione composta

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \longrightarrow C_0(1+i)^t,$$

con C_0 capitale iniziale e i tasso di interesse.

$f(t) = C_0(1+i)^t$ rappresenta il montante prodotto al tempo t .

La quantità $(1+i)^t$ è il **fattore montante** nel regime dell'interesse composto.

Se $n \in \mathbb{N}$ misura il tempo in anni, allora:

$$f(n) = C_0(1+i)^n, \quad f(n)/f(n-1) = 1+i.$$

Legge di capitalizzazione composta

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \longrightarrow C_0(1+i)^t,$$

con C_0 capitale iniziale e i tasso di interesse.

$f(t) = C_0(1+i)^t$ rappresenta il montante prodotto al tempo t .

La quantità $(1+i)^t$ è il **fattore montante** nel regime dell'interesse composto.

Se $n \in \mathbb{N}$ misura il tempo in anni, allora:

$$f(n) = C_0(1+i)^n, \quad f(n)/f(n-1) = 1+i.$$

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

sono le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad (1)$$

Se $a = 1 + i$ allora:

- a^{x_1} = montante prodotto da 1 euro investito per la durata x_1 .
- $a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ = montante prodotto da a^{x_1} euro investiti per la durata x_2 .
- $a^{x_1+x_2}$ = montante prodotto da 1 euro investito per la durata $x_1 + x_2$.

La (1) in termini finanziari significa quindi che **un'operazione intermedia di capitalizzazione dell'interesse maturato è priva di conseguenze.**

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

sono le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad (1)$$

Se $a = 1 + i$ allora:

- a^{x_1} = montante prodotto da 1 euro investito per la durata x_1 .
- $a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ = montante prodotto da a^{x_1} euro investiti per la durata x_2 .
- $a^{x_1+x_2}$ = montante prodotto da 1 euro investito per la durata $x_1 + x_2$.

La (1) in termini finanziari significa quindi che **un'operazione intermedia di capitalizzazione dell'interesse maturato è priva di conseguenze.**

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

sono le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad (1)$$

Se $a = 1 + i$ allora:

- a^{x_1} = montante prodotto da 1 euro investito per la durata x_1 .
- $a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ = montante prodotto da a^{x_1} euro investiti per la durata x_2 .
- $a^{x_1+x_2}$ = montante prodotto da 1 euro investito per la durata $x_1 + x_2$.

La (1) in termini finanziari significa quindi che **un'operazione intermedia di capitalizzazione dell'interesse maturato è priva di conseguenze.**

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

sono le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad (1)$$

Se $a = 1 + i$ allora:

- a^{x_1} = montante prodotto da 1 euro investito per la durata x_1 .
- $a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ = montante prodotto da a^{x_1} euro investiti per la durata x_2 .
- $a^{x_1+x_2}$ = montante prodotto da 1 euro investito per la durata $x_1 + x_2$.

La (1) in termini finanziari significa quindi che **un'operazione intermedia di capitalizzazione dell'interesse maturato è priva di conseguenze.**

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

sono le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad (1)$$

Se $a = 1 + i$ allora:

- a^{x_1} = montante prodotto da 1 euro investito per la durata x_1 .
- $a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ = montante prodotto da a^{x_1} euro investiti per la durata x_2 .
- $a^{x_1+x_2}$ = montante prodotto da 1 euro investito per la durata $x_1 + x_2$.

La (1) in termini finanziari significa quindi che **un'operazione intermedia di capitalizzazione dell'interesse maturato è priva di conseguenze.**

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

sono le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad (1)$$

Se $a = 1 + i$ allora:

- a^{x_1} = montante prodotto da 1 euro investito per la durata x_1 .
- $a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ = montante prodotto da a^{x_1} euro investiti per la durata x_2 .
- $a^{x_1+x_2}$ = montante prodotto da 1 euro investito per la durata $x_1 + x_2$.

La (1) in termini finanziari significa quindi che **un'operazione intermedia di capitalizzazione dell'interesse maturato è priva di conseguenze.**

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

sono le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad (1)$$

Se $a = 1 + i$ allora:

- a^{x_1} = montante prodotto da 1 euro investito per la durata x_1 .
- $a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ = montante prodotto da a^{x_1} euro investiti per la durata x_2 .
- $a^{x_1+x_2}$ = montante prodotto da 1 euro investito per la durata $x_1 + x_2$.

La (1) in termini finanziari significa quindi che **un'operazione intermedia di capitalizzazione dell'interesse maturato è priva di conseguenze.**

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

sono le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad (1)$$

Se $a = 1 + i$ allora:

- a^{x_1} = montante prodotto da 1 euro investito per la durata x_1 .
- $a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ = montante prodotto da a^{x_1} euro investiti per la durata x_2 .
- $a^{x_1+x_2}$ = montante prodotto da 1 euro investito per la durata $x_1 + x_2$.

La (1) in termini finanziari significa quindi che **un'operazione intermedia di capitalizzazione dell'interesse maturato è priva di conseguenze.**

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

sono le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad (1)$$

Se $a = 1 + i$ allora:

- a^{x_1} = montante prodotto da 1 euro investito per la durata x_1 .
- $a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ = montante prodotto da a^{x_1} euro investiti per la durata x_2 .
- $a^{x_1+x_2}$ = montante prodotto da 1 euro investito per la durata $x_1 + x_2$.

La (1) in termini finanziari significa quindi che **un'operazione intermedia di capitalizzazione dell'interesse maturato è priva di conseguenze.**

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

sono le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad (1)$$

Se $a = 1 + i$ allora:

- a^{x_1} = montante prodotto da 1 euro investito per la durata x_1 .
- $a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ = montante prodotto da a^{x_1} euro investiti per la durata x_2 .
- $a^{x_1+x_2}$ = montante prodotto da 1 euro investito per la durata $x_1 + x_2$.

La (1) in termini finanziari significa quindi che **un'operazione intermedia di capitalizzazione dell'interesse maturato è priva di conseguenze.**

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

sono le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad (1)$$

Se $a = 1 + i$ allora:

- a^{x_1} = montante prodotto da 1 euro investito per la durata x_1 .
- $a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ = montante prodotto da a^{x_1} euro investiti per la durata x_2 .
- $a^{x_1+x_2}$ = montante prodotto da 1 euro investito per la durata $x_1 + x_2$.

La (1) in termini finanziari significa quindi che **un'operazione intermedia di capitalizzazione dell'interesse maturato è priva di conseguenze.**

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

sono le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad (1)$$

Se $a = 1 + i$ allora:

- a^{x_1} = montante prodotto da 1 euro investito per la durata x_1 .
- $a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ = montante prodotto da a^{x_1} euro investiti per la durata x_2 .
- $a^{x_1+x_2}$ = montante prodotto da 1 euro investito per la durata $x_1 + x_2$.

La (1) in termini finanziari significa quindi che **un'operazione intermedia di capitalizzazione dell'interesse maturato è priva di conseguenze.**

Nel caso della funzione affine si ha:

$$f(x_1 + x_2) < f(x_1) \cdot f(x_2)$$

In termini finanziari, ciò significa che **un'operazione intermedia di capitalizzazione dell'interesse maturato è vantaggiosa.**

Nel caso della funzione affine si ha:

$$f(x_1 + x_2) < f(x_1) \cdot f(x_2)$$

In termini finanziari, ciò significa che **un'operazione intermedia di capitalizzazione dell'interesse maturato è vantaggiosa.**

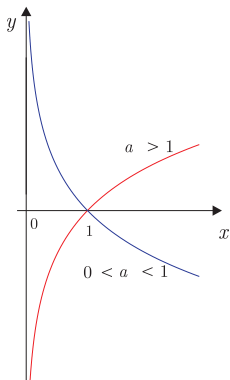
Funzione logaritmica

La funzione esponenziale è invertibile se $a \neq 1$

$$\Leftrightarrow \forall y \in]0, +\infty) \quad \exists ! x \in \mathcal{R} : a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

L'inversa della funzione esponenziale si chiama **funzione Logaritmica**

$$\log_a : y \in]0, +\infty) \rightarrow \log_a y \in \mathcal{R}.$$



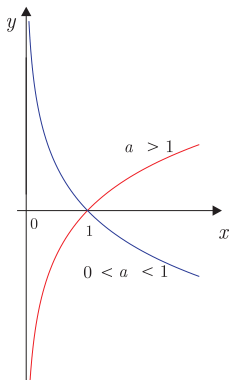
Funzione logaritmica

La funzione esponenziale è invertibile se $a \neq 1$

$$\Leftrightarrow \forall y \in]0, +\infty) \quad \exists ! x \in \mathcal{R} : a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

L'inversa della funzione esponenziale si chiama **funzione Logaritmica**

$$\log_a : y \in]0, +\infty) \rightarrow \log_a y \in \mathcal{R}.$$



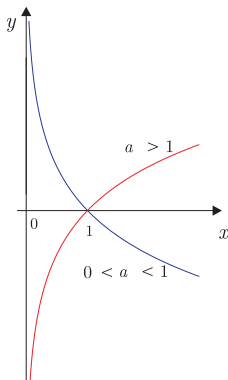
Funzione logaritmica

La funzione esponenziale è invertibile se $a \neq 1$

$$\Leftrightarrow \forall y \in]0, +\infty) \quad \exists ! x \in \mathcal{R} : a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

L'inversa della funzione esponenziale si chiama **funzione Logaritmica**

$$\log_a : y \in]0, +\infty) \rightarrow \log_a y \in \mathcal{R}.$$



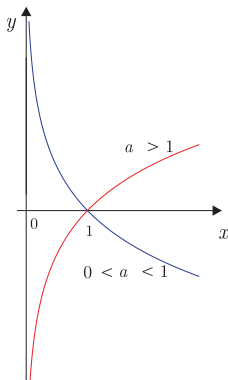
Funzione logaritmica

La funzione esponenziale è invertibile se $a \neq 1$

$$\Leftrightarrow \forall y \in]0, +\infty) \quad \exists ! x \in \mathcal{R} : a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

L'inversa della funzione esponenziale si chiama **funzione Logaritmica**

$$\log_a : y \in]0, +\infty) \rightarrow \log_a y \in \mathcal{R}.$$



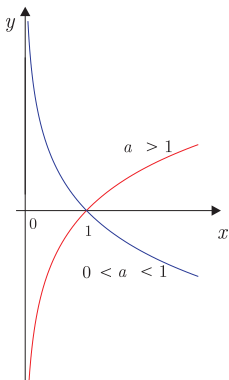
Funzione logaritmica

La funzione esponenziale è invertibile se $a \neq 1$

$$\Leftrightarrow \forall y \in]0, +\infty) \quad \exists ! x \in \mathcal{R} : a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

L'inversa della funzione esponenziale si chiama **funzione Logaritmica**

$$\log_a : y \in]0, +\infty) \rightarrow \log_a y \in \mathcal{R}.$$



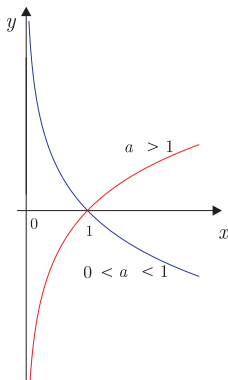
Funzione logaritmica

La funzione esponenziale è invertibile se $a \neq 1$

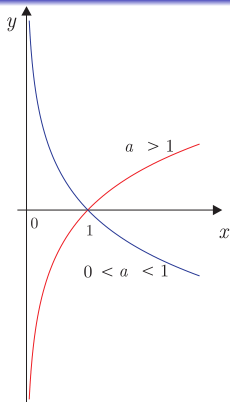
$$\Leftrightarrow \forall y \in]0, +\infty) \quad \exists ! x \in \mathcal{R} : a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

L'inversa della funzione esponenziale si chiama **funzione Logaritmica**

$$\log_a : y \in]0, +\infty) \rightarrow \log_a y \in \mathcal{R}.$$



Funzione logaritmica



- strettamente crescente per $a > 1$
- strettamente decrescente per $0 < a < 1$
- illimitata inferiormente
- illimitata superiormente

Per l'operazione di logaritmo valgono le seguenti proprietà:

- $\log_a b + \log_a c = \log_a (c \cdot b);$

- $\log_a b - \log_a c = \log_a (b/c);$

- $b \log_a c = \log_a (c^b);$

- $\log_a c = \log_b c / \log_b a;$

- $a = b^{\log_b a};$

- $a^c = b^{c \log_b a}.$

Per l'operazione di logaritmo valgono le seguenti proprietà:

- $\log_a b + \log_a c = \log_a (c \cdot b);$

- $\log_a b - \log_a c = \log_a (b/c);$

- $b \log_a c = \log_a (c^b);$

- $\log_a c = \log_b c / \log_b a;$

- $a = b^{\log_b a};$

- $a^c = b^{c \log_b a}.$

Per l'operazione di logaritmo valgono le seguenti proprietà:

- $\log_a b + \log_a c = \log_a (c \cdot b);$

- $\log_a b - \log_a c = \log_a (b/c);$

- $b \log_a c = \log_a (c^b);$

- $\log_a c = \log_b c / \log_b a;$

- $a = b^{\log_b a};$

- $a^c = b^{c \log_b a}.$

Per l'operazione di logaritmo valgono le seguenti proprietà:

- $\log_a b + \log_a c = \log_a (c \cdot b);$

- $\log_a b - \log_a c = \log_a (b/c);$

- $b \log_a c = \log_a (c^b);$

- $\log_a c = \log_b c / \log_b a;$

- $a = b^{\log_b a};$

- $a^c = b^{c \log_b a}.$

Per l'operazione di logaritmo valgono le seguenti proprietà:

- $\log_a b + \log_a c = \log_a (c \cdot b);$

- $\log_a b - \log_a c = \log_a (b/c);$

- $b \log_a c = \log_a (c^b);$

- $\log_a c = \log_b c / \log_b a;$

- $a = b^{\log_b a};$

- $a^c = b^{c \log_b a}.$

Per l'operazione di logaritmo valgono le seguenti proprietà:

- $\log_a b + \log_a c = \log_a (c \cdot b);$
- $\log_a b - \log_a c = \log_a (b/c);$
- $b \log_a c = \log_a (c^b);$
- $\log_a c = \log_b c / \log_b a;$
- $a = b^{\log_b a};$
- $a^c = b^{c \log_b a}.$

Legge di capitalizzazione composta

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \Rightarrow (1 + i)^t,$$

con capitale iniziale unitario e i tasso di interesse annuo.

$y_t = f(t) = (1 + i)^t$ rappresenta il montante prodotto al tempo t
 $\Leftrightarrow$ il tempo t necessario perché il montante di 1 euro valga y_t è

$$t = \log_{(1+i)} y_t.$$

Ad esempio, supponiamo $i = 4\% = 0,04 \Leftrightarrow 1 + i = 1,04$.

Assegnato un capitale y , il tempo t occorrente perché il montante di un euro valga y è

$$t = \log_{1,04} y$$

Legge di capitalizzazione composta

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \Rightarrow (1 + i)^t,$$

con capitale iniziale unitario e i tasso di interesse annuo.

$y_t = f(t) = (1 + i)^t$ rappresenta il montante prodotto al tempo t
 $\Leftrightarrow$ il tempo t necessario perché il montante di 1 euro valga y_t è

$$t = \log_{(1+i)} y_t.$$

Ad esempio, supponiamo $i = 4\% = 0,04 \Leftrightarrow 1 + i = 1,04$.

Assegnato un capitale y , il tempo t occorrente perché il montante di un euro valga y è

$$t = \log_{1,04} y$$

Legge di capitalizzazione composta

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \Rightarrow (1 + i)^t,$$

con capitale iniziale unitario e i tasso di interesse annuo.

$y_t = f(t) = (1 + i)^t$ rappresenta il montante prodotto al tempo t
 $\Leftrightarrow$ il tempo t necessario perché il montante di 1 euro valga y_t è

$$t = \log_{(1+i)} y_t.$$

Ad esempio, supponiamo $i = 4\% = 0,04 \Leftrightarrow 1 + i = 1,04$.

Assegnato un capitale y , il tempo t occorrente perché il montante di un euro valga y è

$$t = \log_{1,04} y$$

Legge di capitalizzazione composta

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \Rightarrow (1 + i)^t,$$

con capitale iniziale unitario e i tasso di interesse annuo.

$y_t = f(t) = (1 + i)^t$ rappresenta il montante prodotto al tempo t
 $\Leftrightarrow$ il tempo t necessario perché il montante di 1 euro valga y_t è

$$t = \log_{(1+i)} y_t.$$

Ad esempio, supponiamo $i = 4\% = 0,04 \Leftrightarrow 1 + i = 1,04$.

Assegnato un capitale y , il tempo t occorrente perché il montante di un euro valga y è

$$t = \log_{1,04} y$$

Legge di capitalizzazione composta

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \Rightarrow (1 + i)^t,$$

con capitale iniziale unitario e i tasso di interesse annuo.

$y_t = f(t) = (1 + i)^t$ rappresenta il montante prodotto al tempo t
 $\Leftrightarrow$ il tempo t necessario perché il montante di 1 euro valga y_t è

$$t = \log_{(1+i)} y_t.$$

Ad esempio, supponiamo $i = 4\% = 0,04 \Leftrightarrow 1 + i = 1,04$.

Assegnato un capitale y , il tempo t occorrente perché il montante di un euro valga y è

$$t = \log_{1,04} y$$

Legge di capitalizzazione composta

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \Rightarrow (1 + i)^t,$$

con capitale iniziale unitario e i tasso di interesse annuo.

$y_t = f(t) = (1 + i)^t$ rappresenta il montante prodotto al tempo t
 $\Leftrightarrow$ il tempo t necessario perché il montante di 1 euro valga y_t è

$$t = \log_{(1+i)} y_t.$$

Ad esempio, supponiamo $i = 4\% = 0,04 \Leftrightarrow 1 + i = 1,04$.

Assegnato un capitale y , il tempo t occorrente perché il montante di un euro valga y è

$$t = \log_{1,04} y$$

Legge di capitalizzazione composta

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \Rightarrow (1 + i)^t,$$

con capitale iniziale unitario e i tasso di interesse annuo.

$y_t = f(t) = (1 + i)^t$ rappresenta il montante prodotto al tempo t
 $\Leftrightarrow$ il tempo t necessario perché il montante di 1 euro valga y_t è

$$t = \log_{(1+i)} y_t.$$

Ad esempio, supponiamo $i = 4\% = 0,04 \Leftrightarrow 1 + i = 1,04$.

Assegnato un capitale y , il tempo t occorrente perché il montante di un euro valga y è

$$t = \log_{1,04} y$$

Legge di capitalizzazione composta

$$f : t \in \mathcal{R}^+ \Rightarrow (1 + i)^t,$$

con capitale iniziale unitario e i tasso di interesse annuo.

$y_t = f(t) = (1 + i)^t$ rappresenta il montante prodotto al tempo t
 $\Leftrightarrow$ il tempo t necessario perché il montante di 1 euro valga y_t è

$$t = \log_{(1+i)} y_t.$$

Ad esempio, supponiamo $i = 4\% = 0,04 \Leftrightarrow 1 + i = 1,04$.

Assegnato un capitale y , il tempo t occorrente perché il montante di un euro valga y è

$$t = \log_{1,04} y$$

Funzione logaritmica

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

sono le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Esempio di interpretazione finanziaria:

Se conosciamo $\log_{1,04} x_1$ e $\log_{1,04} x_2$, ovvero in quanto tempo il montante di un euro raggiunge rispettivamente i valori x_1 e x_2 , possiamo dire che nel tempo somma $\log_{1,04} x_1 + \log_{1,04} x_2$ il montante di un euro sarà $x_1 \cdot x_2$.

Funzione logaritmica

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

sono le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Esempio di interpretazione finanziaria:

Se conosciamo $\log_{1,04} x_1$ e $\log_{1,04} x_2$, ovvero in quanto tempo il montante di un euro raggiunge rispettivamente i valori x_1 e x_2 , possiamo dire che nel tempo somma $\log_{1,04} x_1 + \log_{1,04} x_2$ il montante di un euro sarà $x_1 \cdot x_2$.

Funzione logaritmica

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

sono le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Esempio di interpretazione finanziaria:

Se conosciamo $\log_{1,04} x_1$ e $\log_{1,04} x_2$, ovvero in quanto tempo il montante di un euro raggiunge rispettivamente i valori x_1 e x_2 , possiamo dire che nel tempo somma $\log_{1,04} x_1 + \log_{1,04} x_2$ il montante di un euro sarà $x_1 \cdot x_2$.

Funzione logaritmica

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

sono le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Esempio di interpretazione finanziaria:

Se conosciamo $\log_{1,04} x_1$ e $\log_{1,04} x_2$, ovvero in quanto tempo il montante di un euro raggiunge rispettivamente i valori x_1 e x_2 , possiamo dire che nel tempo somma $\log_{1,04} x_1 + \log_{1,04} x_2$ il montante di un euro sarà $x_1 \cdot x_2$.

Funzione logaritmica

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

sono le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Esempio di interpretazione finanziaria:

Se conosciamo $\log_{1,04} x_1$ e $\log_{1,04} x_2$, ovvero in quanto tempo il montante di un euro raggiunge rispettivamente i valori x_1 e x_2 , possiamo dire che nel tempo somma $\log_{1,04} x_1 + \log_{1,04} x_2$ il montante di un euro sarà $x_1 \cdot x_2$.

Funzione logaritmica

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

sono le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Esempio di interpretazione finanziaria:

Se conosciamo $\log_{1,04} x_1$ e $\log_{1,04} x_2$, ovvero in quanto tempo il montante di un euro raggiunge rispettivamente i valori x_1 e x_2 , possiamo dire che nel tempo somma $\log_{1,04} x_1 + \log_{1,04} x_2$ il montante di un euro sarà $x_1 \cdot x_2$.

Funzione logaritmica

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

sono le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Esempio di interpretazione finanziaria:

Se conosciamo $\log_{1,04} x_1$ e $\log_{1,04} x_2$, ovvero in quanto tempo il montante di un euro raggiunge rispettivamente i valori x_1 e x_2 , possiamo dire che nel tempo somma $\log_{1,04} x_1 + \log_{1,04} x_2$ il montante di un euro sarà $x_1 \cdot x_2$.

Funzione logaritmica

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

sono le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Esempio di interpretazione finanziaria:

Se conosciamo $\log_{1,04} x_1$ e $\log_{1,04} x_2$, ovvero in quanto tempo il montante di un euro raggiunge rispettivamente i valori x_1 e x_2 , possiamo dire che nel tempo somma $\log_{1,04} x_1 + \log_{1,04} x_2$ il montante di un euro sarà $x_1 \cdot x_2$.

Funzione logaritmica

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

sono le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Esempio di interpretazione finanziaria:

Se conosciamo $\log_{1,04} x_1$ e $\log_{1,04} x_2$, ovvero in quanto tempo il montante di un euro raggiunge rispettivamente i valori x_1 e x_2 , possiamo dire che nel tempo somma $\log_{1,04} x_1 + \log_{1,04} x_2$ il montante di un euro sarà $x_1 \cdot x_2$.

Funzione logaritmica

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

sono le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Esempio di interpretazione finanziaria:

Se conosciamo $\log_{1,04} x_1$ e $\log_{1,04} x_2$, ovvero in quanto tempo il montante di un euro raggiunge rispettivamente i valori x_1 e x_2 , possiamo dire che nel tempo somma $\log_{1,04} x_1 + \log_{1,04} x_2$ il montante di un euro sarà $x_1 \cdot x_2$.

Funzione logaritmica

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

sono le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Esempio di interpretazione finanziaria:

Se conosciamo $\log_{1,04} x_1$ e $\log_{1,04} x_2$, ovvero in quanto tempo il montante di un euro raggiunge rispettivamente i valori x_1 e x_2 , possiamo dire che nel tempo somma $\log_{1,04} x_1 + \log_{1,04} x_2$ il montante di un euro sarà $x_1 \cdot x_2$.

Funzione logaritmica

Le sole funzioni soddisfacenti l'equazione funzionale

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

sono le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$. Osserviamo che:

$$f(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Esempio di interpretazione finanziaria:

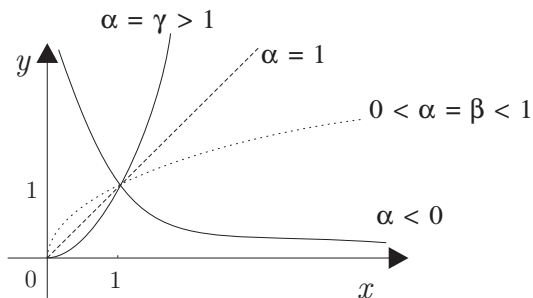
Se conosciamo $\log_{1,04} x_1$ e $\log_{1,04} x_2$, ovvero in quanto tempo il montante di un euro raggiunge rispettivamente i valori x_1 e x_2 , possiamo dire che nel tempo somma $\log_{1,04} x_1 + \log_{1,04} x_2$ il montante di un euro sarà $x_1 \cdot x_2$.

Funzione potenza a esponente reale

Fissato $a \in \mathcal{R}$ la funzione

$$p_a : x \in]0, +\infty) \Rightarrow x^a \in \mathcal{R}$$

si chiama funzione potenza a esponente reale.

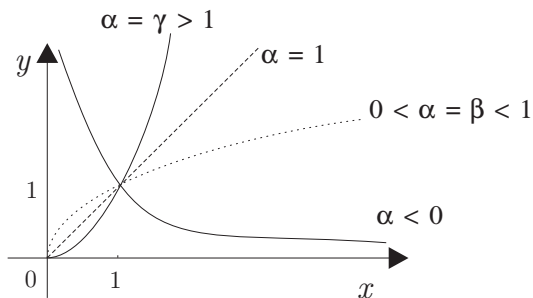


Funzione potenza a esponente reale

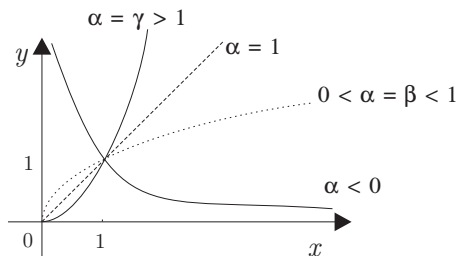
Fissato $a \in \mathcal{R}$ la funzione

$$p_a : x \in]0, +\infty) \Rightarrow x^a \in \mathcal{R}$$

si chiama funzione potenza a esponente reale.



Funzione potenza



- strettamente crescente per $a > 0$
- strettamente decrescente per $a < 0$
- limitata inferiormente, $\inf p_a(x) = 0$
- illimitata superiormente

Funzione potenza

$$f : x \in]0, +\infty) \Rightarrow a \log_b x \in \mathcal{R}$$

$$g : y \in \mathcal{R} \Rightarrow b^y \in]0, +\infty)$$

abbiamo che:

$$g(f(x)) = g(a \log_b x) = b^{a \log_b x} = b^{\log_b (x^a)} = x^a$$

quindi **la funzione potenza è la funzione composta $g \circ f$.**

Funzione potenza

$$f : x \in]0, +\infty) \Rightarrow a \log_b x \in \mathcal{R}$$

$$g : y \in \mathcal{R} \Rightarrow b^y \in]0, +\infty)$$

abbiamo che:

$$g(f(x)) = g(a \log_b x) = b^{a \log_b x} = b^{\log_b (x^a)} = x^a$$

quindi **la funzione potenza è la funzione composta $g \circ f$.**

Funzione potenza

$$f : x \in]0, +\infty) \Rightarrow a \log_b x \in \mathcal{R}$$

$$g : y \in \mathcal{R} \Rightarrow b^y \in]0, +\infty)$$

abbiamo che:

$$g(f(x)) = g(a \log_b x) = b^{a \log_b x} = b^{\log_b (x^a)} = x^a$$

quindi la funzione potenza è la funzione composta $g \circ f$.

Funzione potenza

$$f : x \in]0, +\infty) \Rightarrow a \log_b x \in \mathcal{R}$$

$$g : y \in \mathcal{R} \Rightarrow b^y \in]0, +\infty)$$

abbiamo che:

$$g(f(x)) = g(a \log_b x) = b^{a \log_b x} = b^{\log_b (x^a)} = x^a$$

quindi la funzione potenza è la funzione composta $g \circ f$.

Funzione potenza

$$f : x \in]0, +\infty) \Rightarrow a \log_b x \in \mathcal{R}$$

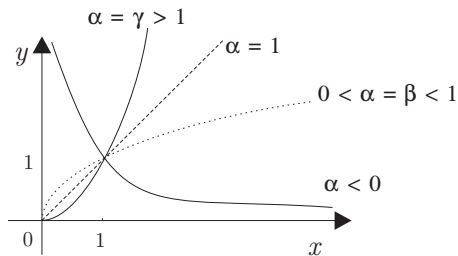
$$g : y \in \mathcal{R} \Rightarrow b^y \in]0, +\infty)$$

abbiamo che:

$$g(f(x)) = g(a \log_b x) = b^{a \log_b x} = b^{\log_b (x^a)} = x^a$$

quindi **la funzione potenza è la funzione composta $g \circ f$.**

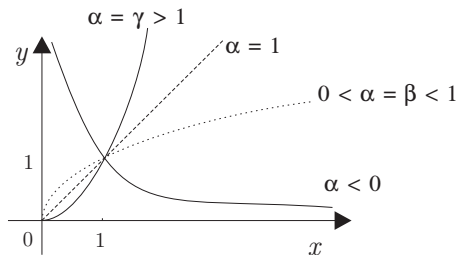
Prolungamento della potenza con esponente positivo



NOTA: Per $a > 0 \Rightarrow 0^a = 0 \Rightarrow$ la funzione potenza si può prolungare in $x = 0$

$$\inf p_a(x) = \min p_a(x) = 0$$

Prolungamento della potenza con esponente positivo



NOTA: Per $a > 0 \Rightarrow 0^a = 0 \Rightarrow$ la funzione potenza si può prolungare in $x = 0$

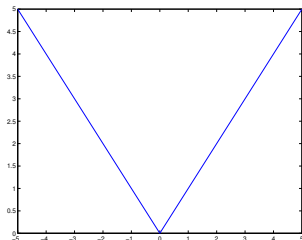
$$\inf p_a(x) = \min p_a(x) = 0$$

Funzione valore assoluto

La funzione

$$\text{abs} : x \in \mathcal{R} \Rightarrow |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

si chiama funzione valore assoluto.

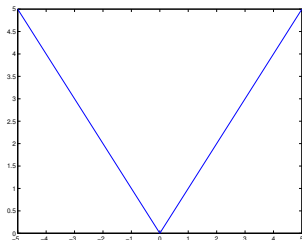


Funzione valore assoluto

La funzione

$$\text{abs} : x \in \mathcal{R} \Rightarrow |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

si chiama funzione valore assoluto.



Proprietà del valore assoluto

Consideriamo la disequazione

$$|x| \leq a, \quad a > 0.$$

Essa equivale a

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq a \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ -x \leq a \end{array} \right.$$

ossia

$$[0, a] \cup [-a, 0[.$$

$$-a \leq x \leq a \iff x \in [-a, a]$$

Proprietà del valore assoluto

Consideriamo la disequazione

$$|x| \leq a, \quad a > 0.$$

Essa equivale a

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq a \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ -x \leq a \end{array} \right.$$

ossia

$$[0, a] \cup [-a, 0[.$$

$$-a \leq x \leq a \iff x \in [-a, a]$$

Proprietà del valore assoluto

Consideriamo la disequazione

$$|x| \leq a, \quad a > 0.$$

Essa equivale a

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq a \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ -x \leq a \end{array} \right.$$

ossia

$$[0, a] \cup [-a, 0[.$$

$$-a \leq x \leq a \iff x \in [-a, a]$$

Proprietà del valore assoluto

Consideriamo la disequazione

$$|x| \geq a, \quad a > 0.$$

Essa equivale a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq a \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < 0 \\ -x \geq a \end{cases}$$

ossia

$$[a, +\infty] \cup [-\infty, -a].$$

Proprietà del valore assoluto

Consideriamo la disequazione

$$|x| \geq a, \quad a > 0.$$

Essa equivale a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq a \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < 0 \\ -x \geq a \end{cases}$$

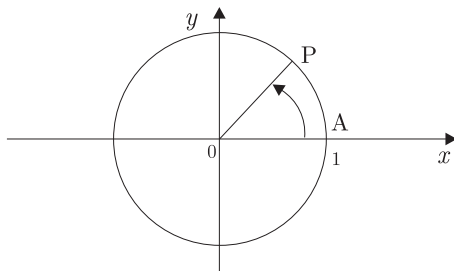
ossia

$$[a, +\infty] \cup [-\infty, -a].$$

Disuguaglianza triangolare

$$\forall x, y \in \mathcal{R}, \quad ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

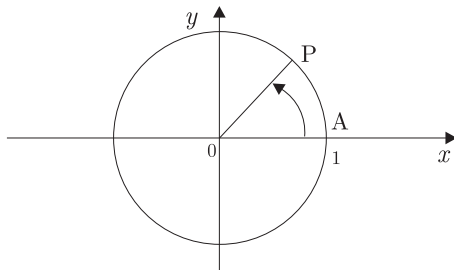
Misura degli angoli



Un angolo può essere misurato mediante:

- confronto rispetto ad un angolo unitario (gradi);
- lunghezza dell'arco AP (radianti).

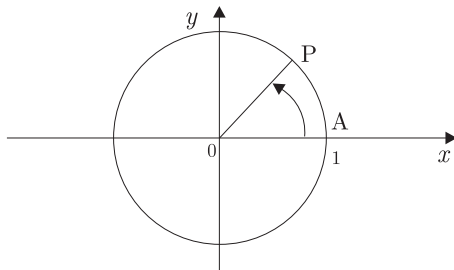
Misura degli angoli



Un angolo può essere misurato mediante:

- confronto rispetto ad un angolo unitario (gradi);
- lunghezza dell'arco AP (radianti).

Misura degli angoli



Un angolo può essere misurato mediante:

- confronto rispetto ad un angolo unitario (gradi);
- lunghezza dell'arco AP (radianti).

Relazione tra gradi e radianti

Angolo giro = $360^\circ = 2\pi$ radianti

Angolo piatto = $180^\circ = \pi$ radianti

$$\frac{\text{misura in gradi}}{180^\circ} = \frac{\text{misura in radianti}}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ radianti} \implies 45^\circ$$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ radianti} \implies 120^\circ$$

Nel seguito gli angoli verranno misurati, esclusivamente, in radianti.

Relazione tra gradi e radianti

$$\text{Angolo giro} = 360^\circ = 2\pi \text{ radianti}$$

$$\text{Angolo piatto} = 180^\circ = \pi \text{ radianti}$$

$$\frac{\text{misura in gradi}}{180^\circ} = \frac{\text{misura in radianti}}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ radianti} \implies 45^\circ$$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ radianti} \implies 120^\circ$$

Nel seguito gli angoli verranno misurati, esclusivamente, in radianti.

Relazione tra gradi e radianti

$$\text{Angolo giro} = 360^\circ = 2\pi \text{ radianti}$$

$$\text{Angolo piatto} = 180^\circ = \pi \text{ radianti}$$

$$\frac{\text{misura in gradi}}{180^\circ} = \frac{\text{misura in radianti}}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ radianti} \implies 45^\circ$$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ radianti} \implies 120^\circ$$

Nel seguito gli angoli verranno misurati, esclusivamente, in radianti.

Relazione tra gradi e radianti

$$\text{Angolo giro} = 360^\circ = 2\pi \text{ radianti}$$

$$\text{Angolo piatto} = 180^\circ = \pi \text{ radianti}$$

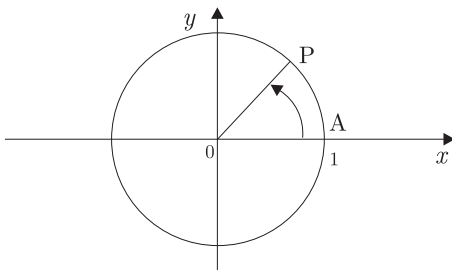
$$\frac{\text{misura in gradi}}{180^\circ} = \frac{\text{misura in radianti}}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ radianti} \implies 45^\circ$$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ radianti} \implies 120^\circ$$

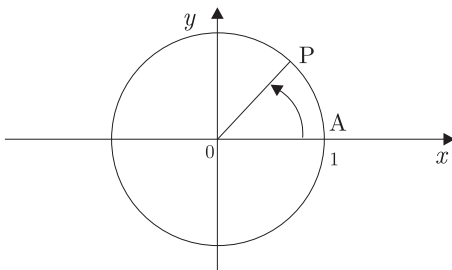
Nel seguito gli angoli verranno misurati, esclusivamente, in radianti.

Circonferenza con raggio unitario e centro in $(0, 0)$.



Un angolo con un lato coincidente con la semiretta positiva dell'asse x , l'altro posto in senso levogiro, identifica un punto P .
Viceversa, fissato un punto P sulla circonferenza resta individuato l'angolo $\widehat{AOP}$ che il segmento OP forma con l'asse x .

Circonferenza con raggio unitario e centro in $(0, 0)$.



Un angolo con un lato coincidente con la semiretta positiva dell'asse x , l'altro posto in senso levogiro, identifica un punto P . Viceversa, fissato un punto P sulla circonferenza resta individuato l'angolo $\widehat{AOP}$ che il segmento OP forma con l'asse x .

Sia $\alpha \in [0, 2\pi[$ la misura dell'angolo $\widehat{AOP}$,

- $-\alpha$ è la misura dell'angolo $\widehat{AOP'}$ di ampiezza uguale al precedente con P' simmetrico di P rispetto all'asse x ;
- $\alpha + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, denotano lo stesso angolo; la misura che ricade in $[0, 2\pi[$ viene detta **misura principale**

misura angolo

misura principale

$$\begin{array}{rcl} \pi/4 & \Longleftrightarrow & \pi/4 \\ 3\pi & \Longleftrightarrow & \pi \\ -\pi/4 & \Longleftrightarrow & \frac{7\pi}{4} \end{array}$$

Sia $\alpha \in [0, 2\pi[$ la misura dell'angolo $\widehat{AOP}$,

- $-\alpha$ è la misura dell'angolo $\widehat{AOP'}$ di ampiezza uguale al precedente con P' simmetrico di P rispetto all'asse x ;
- $\alpha + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, denotano lo stesso angolo; la misura che ricade in $[0, 2\pi[$ viene detta **misura principale**

misura angolo

misura principale

$$\begin{array}{ccc} \pi/4 & \Longleftrightarrow & \pi/4 \\ 3\pi & \Longleftrightarrow & \pi \\ -\pi/4 & \Longleftrightarrow & \frac{7\pi}{4} \end{array}$$

Sia $\alpha \in [0, 2\pi[$ la misura dell'angolo $\widehat{AOP}$,

- $-\alpha$ è la misura dell'angolo $\widehat{AOP'}$ di ampiezza uguale al precedente con P' simmetrico di P rispetto all'asse x ;
- $\alpha + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, denotano lo stesso angolo; la misura che ricade in $[0, 2\pi[$ viene detta **misura principale**

misura angolo

misura principale

$$\pi/4 \iff \pi/4$$

$$3\pi \iff \pi$$

$$-\pi/4 \iff \frac{7\pi}{4}$$

Sia $\alpha \in [0, 2\pi[$ la misura dell'angolo $\widehat{AOP}$,

- $-\alpha$ è la misura dell'angolo $\widehat{AOP'}$ di ampiezza uguale al precedente con P' simmetrico di P rispetto all'asse x ;
- $\alpha + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, denotano lo stesso angolo; la misura che ricade in $[0, 2\pi[$ viene detta **misura principale**

misura angolo

misura principale

$$\begin{array}{rcl} \pi/4 & \Longleftrightarrow & \pi/4 \\ 3\pi & \Longleftrightarrow & \pi \\ -\pi/4 & \Longleftrightarrow & \frac{7\pi}{4} \end{array}$$

Funzioni trigonometriche

C circonferenza di raggio unitario con il centro in un sistema di assi coordinati;

$$f : x \in \mathcal{R} \Rightarrow P \in \mathbf{C}$$

$$f(x) = f(x + k2\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

funzione periodica di periodo 2π

Funzioni trigonometriche

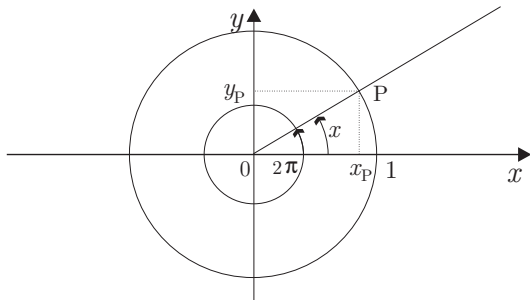
C circonferenza di raggio unitario con il centro in un sistema di assi coordinati;

$$f : x \in \mathcal{R} \Rightarrow P \in \mathbf{C}$$

$$f(x) = f(x + k2\pi) \forall k \in \mathbb{Z}$$

funzione periodica di periodo 2π

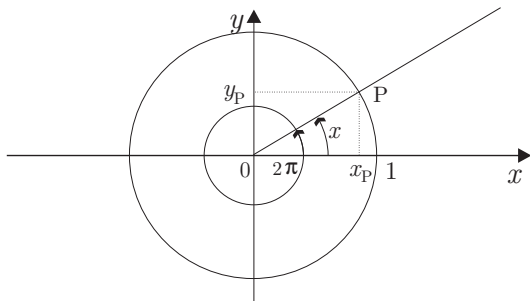
Funzioni seno e coseno



$$x \in \mathcal{R} \Rightarrow P \in \mathbf{C} \Rightarrow (x_P, y_P)$$

- $\cos : x \in \mathcal{R} \rightarrow x_P \in \mathcal{R}$
- $\sin : x \in \mathcal{R} \rightarrow y_P \in \mathcal{R}$

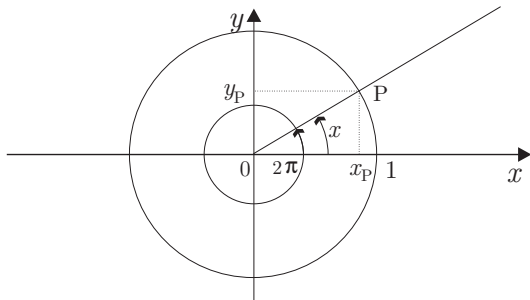
Funzioni seno e coseno



$$x \in \mathcal{R} \Rightarrow P \in \mathbf{C} \Rightarrow (x_P, y_P)$$

- $\cos : x \in \mathcal{R} \rightarrow x_P \in \mathcal{R}$
- $\sin : x \in \mathcal{R} \rightarrow y_P \in \mathcal{R}$

Funzioni seno e coseno

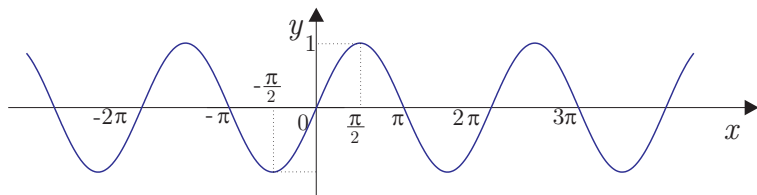


$$x \in \mathcal{R} \Rightarrow P \in \mathbf{C} \Rightarrow (x_P, y_P)$$

- $\cos : x \in \mathcal{R} \rightarrow x_P \in \mathcal{R}$
- $\sin : x \in \mathcal{R} \rightarrow y_P \in \mathcal{R}$

Funzione seno

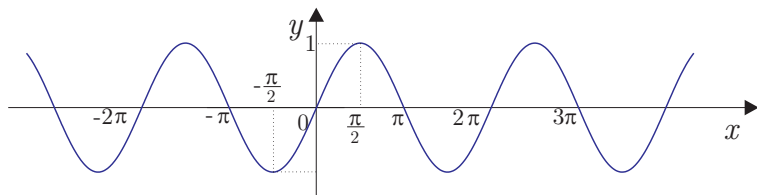
Funzione periodica di periodo 2π



- $E[\sin x] = \mathcal{R}; \sin(\mathcal{R}) = [-1, 1]$
- $\min \sin x = -1, x = -\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$
- $\max \sin x = 1, x = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Funzione seno

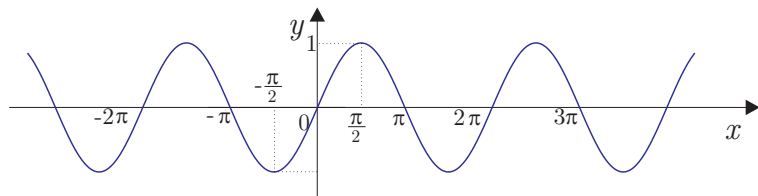
Funzione periodica di periodo 2π



- $E[\sin x] = \mathcal{R}; \sin(\mathcal{R}) = [-1, 1]$
- $\min \sin x = -1, x = -\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$
- $\max \sin x = 1, x = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Funzione seno

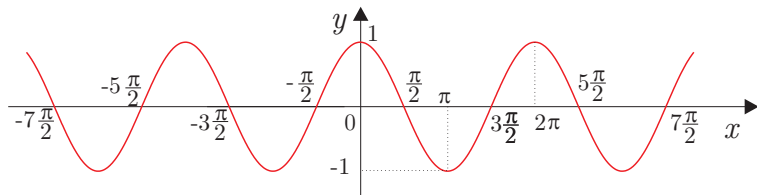
Funzione periodica di periodo 2π



- funzione strettamente
 - **decrescente** in $[\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$;
 - **crescente** in $[-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$;
 - dispari $\Leftrightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$.

Funzione coseno

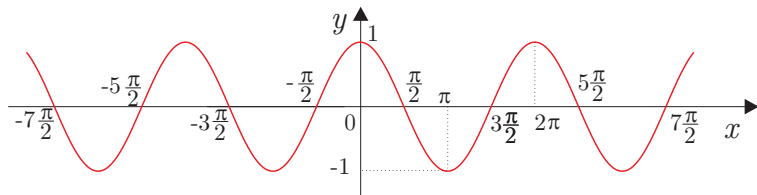
Funzione periodica di periodo 2π



- $E[\cos x] = \mathcal{R}; \cos(\mathcal{R}) = [-1, 1]$
- $\min \cos x = -1, x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z};$
- $\max \cos x = 1, x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$

Funzione coseno

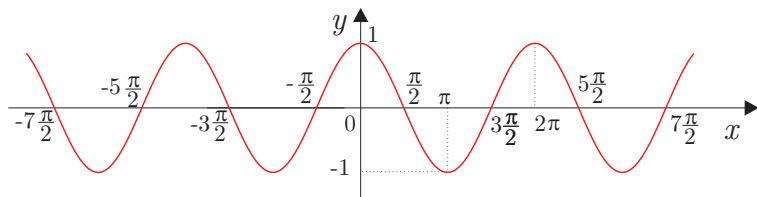
Funzione periodica di periodo 2π



- $E[\cos x] = \mathcal{R}; \cos(\mathcal{R}) = [-1, 1]$
- $\min \cos x = -1, x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z};$
- $\max \cos x = 1, x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$

Funzione coseno

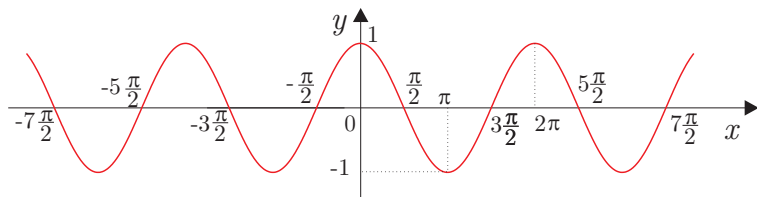
Funzione periodica di periodo 2π



- funzione strettamente:
 - decrescente in $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$;
 - crescente in $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.
- pari $\Leftrightarrow \cos(-x) = \cos(x)$.

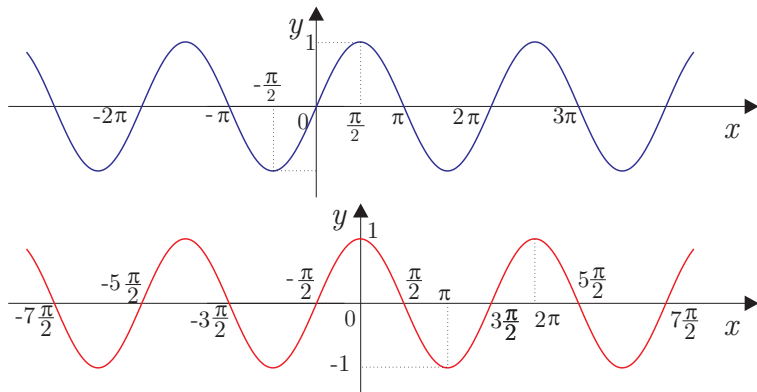
Funzione coseno

Funzione periodica di periodo 2π

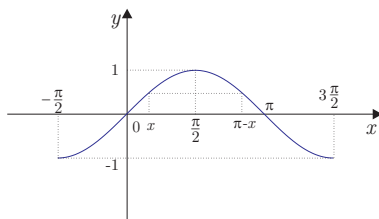


- funzione strettamente:
 - decrescente in $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$;
 - crescente in $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.
- pari $\Leftrightarrow \cos(-x) = \cos(x)$.

Funzioni seno e coseno



Funzione arcoseno



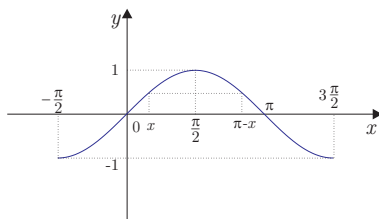
La restrizione della funzione seno all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è invertibile

$$\forall y \in [-1, 1] \exists ! x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : \sin x = y \Leftrightarrow x = \arcsen y$$

L'inversa si chiama **Arcoseno**.

$$\arcsen : y \in [-1, 1] \rightarrow x = \arcsen y \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Funzione arcoseno



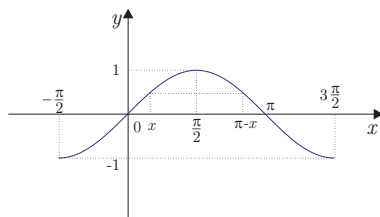
La restrizione della funzione seno all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è invertibile

$$\forall y \in [-1, 1] \exists ! x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : \sin x = y \Leftrightarrow x = \arcsin y$$

L'inversa si chiama **Arcoseno**.

$$\arcsin : y \in [-1, 1] \rightarrow x = \arcsin y \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Funzione arcoseno



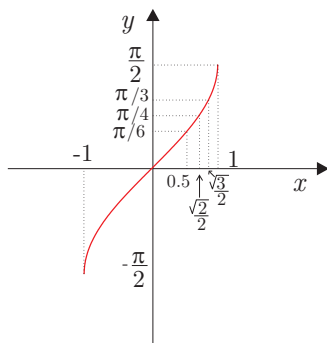
La restrizione della funzione seno all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è invertibile

$$\forall y \in [-1, 1] \exists ! x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : \sin x = y \Leftrightarrow x = \arcsin y$$

L'inversa si chiama **Arcoseno**.

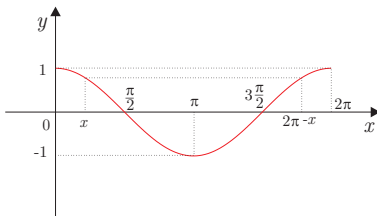
$$\arcsin : y \in [-1, 1] \rightarrow x = \arcsin y \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Funzione arcoseno



- $E[\arcsen x] = [-1, 1]$; $\arcsen([-1, 1]) = [-\pi/2, \pi/2]$
- $\min \arcsen x = -\pi/2, x = -1$; $\max \arcsen x = \pi/2, x = 1$;
- strettamente crescente;
- iniettiva e suriettiva su $[-\pi/2, \pi/2]$.

Funzione arcocoseno



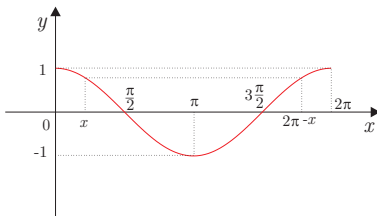
La restrizione della funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$ è invertibile

$$\forall y \in [-1, 1] \exists ! x \in [0, \pi] : \cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y$$

L'inversa si chiama **Arcocoseno**.

$$\arccos : y \in [-1, 1] \rightarrow x = \arccos y \in [0, \pi].$$

Funzione arcocoseno



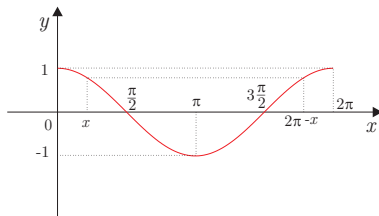
La restrizione della funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$ è invertibile

$$\forall y \in [-1, 1] \exists ! x \in [0, \pi] : \cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y$$

L'inversa si chiama **Arcocoseno**.

$$\arccos : y \in [-1, 1] \rightarrow x = \arccos y \in [0, \pi].$$

Funzione arcocoseno



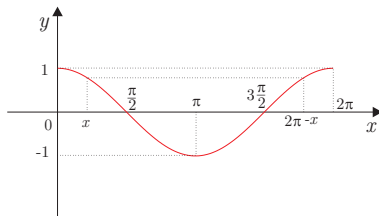
La restrizione della funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$ è invertibile

$$\forall y \in [-1, 1] \exists ! x \in [0, \pi] : \cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y$$

L'inversa si chiama **Arcocoseno**.

$$\arccos : y \in [-1, 1] \rightarrow x = \arccos y \in [0, \pi].$$

Funzione arcocoseno



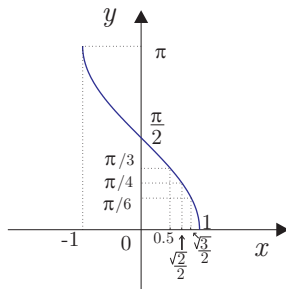
La restrizione della funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$ è invertibile

$$\forall y \in [-1, 1] \exists ! x \in [0, \pi] : \cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y$$

L'inversa si chiama **Arcocoseno**.

$$\arccos : y \in [-1, 1] \rightarrow x = \arccos y \in [0, \pi].$$

Funzione arcocoseno



- $E[\arccos x] = [-1, 1]; \arccos([-1, 1]) = [0, \pi]$
- $\min \arccos x = 0, x = 1; \max \arccos x = \pi, x = -1;$
- strettamente decrescente.
- iniettiva e suriettiva su $[0, \pi]$.

Funzione tangente

Per ogni x per cui $\cos x \neq 0$ definiamo la funzione:

$$\operatorname{tg} : x \in \mathcal{R} - A \rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \in \mathcal{R}$$

dove

$$A = \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Funzione tangente

Per ogni x per cui $\cos x \neq 0$ definiamo la funzione:

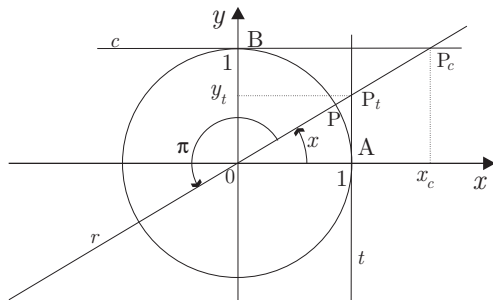
$$\operatorname{tg} : x \in \mathcal{R} - A \rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \in \mathcal{R}$$

dove

$$A = \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Funzione tangente

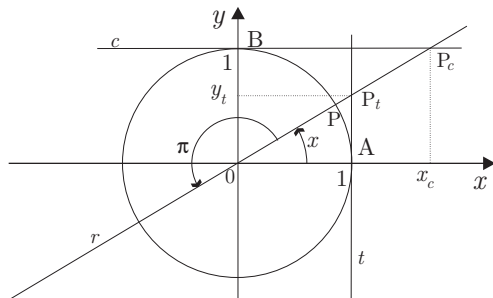
Geometricamente:



$\operatorname{tg} x = \text{ordinata del punto } P_t$

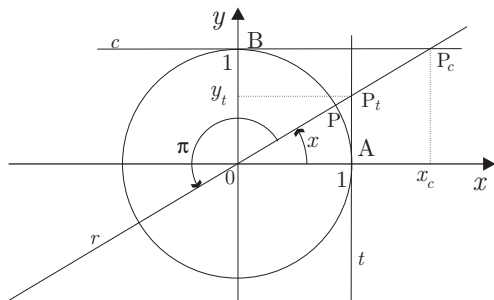
Funzione tangente

Geometricamente:



$\operatorname{tg} x = \text{ordinata del punto } P_t$

Funzione tangente

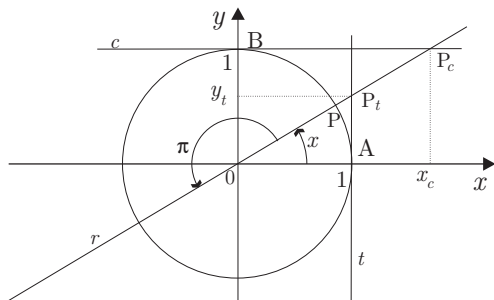


Detta H la proiezione del punto P sull'asse delle ascisse, i triangoli OPH e OP_tA sono simili.

Allora:

$$\frac{\text{HP}}{\text{OH}} = \frac{AP_t}{OA} \Leftrightarrow \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = \frac{\text{tg } x}{1}$$

Funzione tangente

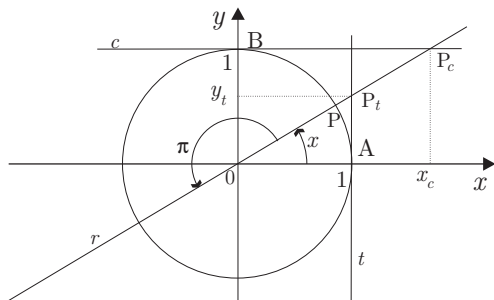


Detta H la proiezione del punto P sull'asse delle ascisse, i triangoli OPH e OP_tA sono simili.

Allora:

$$\frac{\text{HP}}{\text{OH}} = \frac{\text{AP}_t}{\text{OA}} \Leftrightarrow \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = \frac{\text{tg } x}{1}$$

Funzione tangente

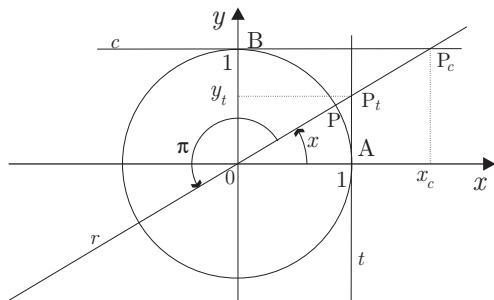


Detta H la proiezione del punto P sull'asse delle ascisse, i triangoli OPH e OP_tA sono simili.

Allora:

$$\frac{\text{HP}}{\text{OH}} = \frac{AP_t}{OA} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tan x}{1}$$

Funzione tangente

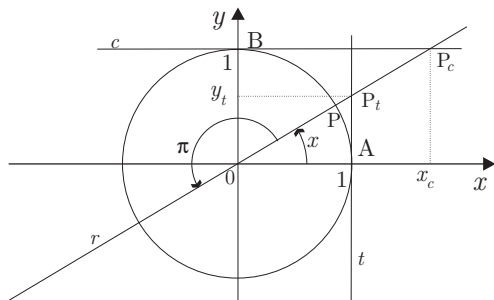


Detta H la proiezione del punto P sull'asse delle ascisse, i triangoli OPH e OP_tA sono simili.

Allora:

$$\frac{\text{HP}}{\text{OH}} = \frac{\text{AP}_t}{\text{OA}} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tan x}{1}$$

Funzione tangente



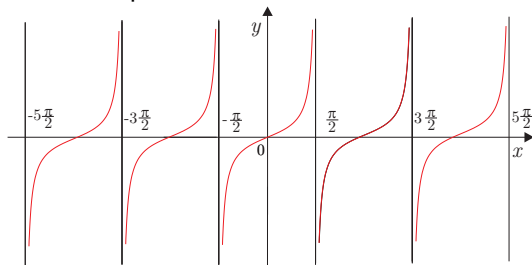
Detta H la proiezione del punto P sull'asse delle ascisse, i triangoli OPH e OP_tA sono simili.

Allora:

$$\frac{\text{HP}}{\text{OH}} = \frac{\text{AP}_t}{\text{OA}} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x} = \frac{\text{tg}x}{1}$$

Funzione tangente

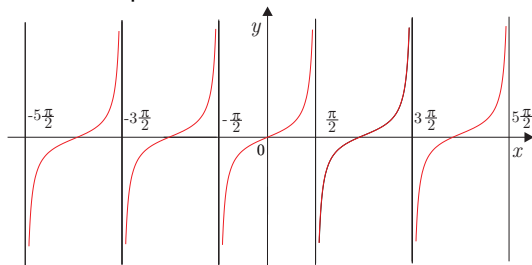
Funzione periodica di periodo π



- $E[\tan x] = \mathcal{R} - \{a : a = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
- immagine di $\tan x = \mathcal{R}$
- $\inf \tan x = -\infty$; $\sup \tan x = +\infty$

Funzione tangente

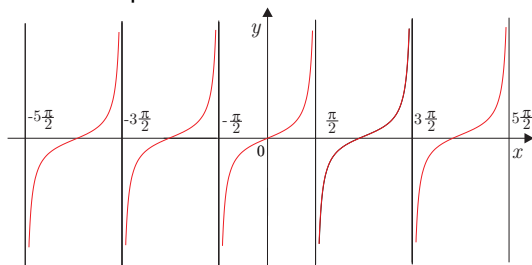
Funzione periodica di periodo π



- $E[\operatorname{tg} x] = \mathcal{R} - \{a : a = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
- immagine di $\operatorname{tg} x = \mathcal{R}$
- $\inf \operatorname{tg} x = -\infty$; $\sup \operatorname{tg} x = +\infty$

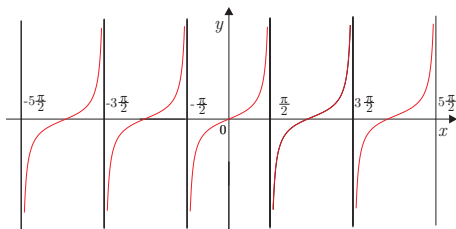
Funzione tangente

Funzione periodica di periodo π



- strettamente crescente in $] -\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$;
- dispari $\Leftrightarrow \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$.

Funzione Arcotangente



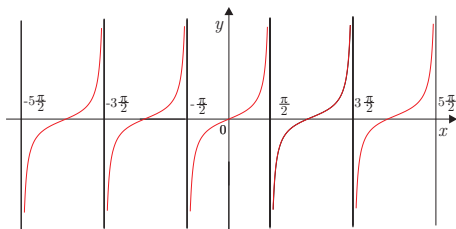
La restrizione della funzione tangente all'intervallo $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ è invertibile

$$\forall y \in \mathcal{R} \exists ! x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: \operatorname{tg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} y.$$

L'inversa si chiama **Arcotangente**.

$$\operatorname{arctg} : y \in \mathcal{R} \rightarrow x = \operatorname{arctg} y \in] -\pi/2, \pi/2[.$$

Funzione Arcotangente



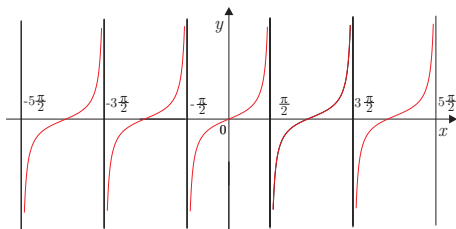
La restrizione della funzione tangente all'intervallo $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ è invertibile

$$\forall y \in \mathcal{R} \exists ! x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: \operatorname{tg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} y.$$

L'inversa si chiama **Arcotangente**.

$$\operatorname{arctg} : y \in \mathcal{R} \rightarrow x = \operatorname{arctg} y \in] -\pi/2, \pi/2[.$$

Funzione Arcotangente



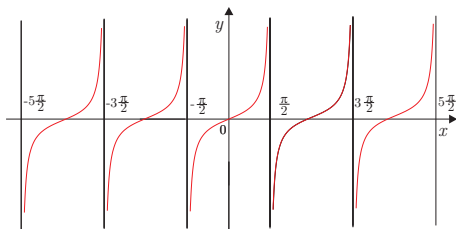
La restrizione della funzione tangente all'intervallo $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ è invertibile

$$\forall y \in \mathcal{R} \exists ! x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: \operatorname{tg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} y.$$

L'inversa si chiama **Arcotangente**.

$$\operatorname{arctg} : y \in \mathcal{R} \rightarrow x = \operatorname{arctg} y \in] - \pi/2, \pi/2[.$$

Funzione Arcotangente



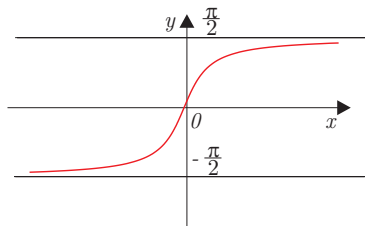
La restrizione della funzione tangente all'intervallo $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ è invertibile

$$\forall y \in \mathcal{R} \exists ! x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: \operatorname{tg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} y.$$

L'inversa si chiama **Arcotangente**.

$$\operatorname{arctg} : y \in \mathcal{R} \rightarrow x = \operatorname{arctg} y \in] -\pi/2, \pi/2[.$$

Funzione arcotangente



- $E[\arctg x] = \mathcal{R}; \arctg(\mathcal{R}) =] - \pi/2, \pi/2[$
- $\inf \arctg x = -\pi/2; \sup \arctg x = \pi/2;$
- strettamente crescente.
- iniettiva e suriettiva su $] - \pi/2, \pi/2[$.