Applicazione del calcolo differenziale

Salvatore Scognamiglio

Università degli studi di Napoli "Parthenope"

Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{e - e^{x^2}},$$

determinare:

- il campo di esistenza (max 2 punti);
- la legge della derivata prima (max 1 punto);
- gli eventuali massimi e minimi (max 1 punto)

(totale max 4 punti).

Campo di esistenza

$$E[f(x)] = \{x \in \mathcal{R} : e - e^{x^2} \geq 0\};$$

$$e - e^{x^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -e^{x^2} \geq -e \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq 1;$$

$$x \in [-1, 1].$$

Legge della derivata prima

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{e - e^{x^2}} \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{e - e^{x^2}}} \cdot (-2xe^{x^2})
\end{aligned}
$$

Ricerca di massimi e minimi

Se si considera una funzione definita in un intervallo e derivabile in tutto il suo dominio, ad eccezione al più di un insieme finito di punti, i punti di minimo e massimo devono essere localizzati:

- agli estremi degli intervalli che compongono il dominio di f;
- nei punti di minimo e massimo relativo in cui
  - la funzione è derivabile e la derivata è nulla;
  - la funzione non è derivabile.

Ricerca di massimi e minimi

Calcoliamo il massimo ed il minimo della funzione $f(x) = \sqrt{e - e^{x^2}}$ per $x \in [-1, 1]$.

1. Valutazione della funzione agli estremi:

$$f(-1) = 0, \; f(1) = 0;$$

2. ricerca dei punti in cui la derivata si annulla e valutazione della funzione in corrispondenza dei punti suddetti:

$$\frac{1}{2\sqrt{e - e^{x^2}}} \cdot (-2xe^{x^2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad f(0) = \sqrt{e-1} \simeq 1.3108.$$

Ricerca di massimi e minimi

La funzione ammette derivata in tutti i punti interni del suo campo di esistenza.
Posto

$$y_1 = f(-1) = 0, \; y_2 = f(0) \simeq 1.3108, \; y_3 = f(1) = 0.$$

Si ha

$$\min f = \min\{y_1, y_2, y_3\} \Rightarrow$$

$$\min f = 0, \; x \in \{-1, 1\} \text{ punti di minimo}$$

$$\max f = \max\{y_1, y_2, y_3\} \Rightarrow$$

$$\max f = y_2, \; x = 0 \text{ punto di massimo.}$$

Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{log(4 - x^2)},$$

determinare:

- il campo di esistenza (max 2 punti);
- la legge della derivata prima (max 1 punto);
- gli eventuali massimi e minimi (max 1 punto).

(totale max 4 punti).

Campo di esistenza

$$E[f(x)] = \{x \in \mathcal{R} : log(4 - x^2) \geq 0; 4 - x^2 > 0\}$$

$$log(4 - x^2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad log(4 - x^2) \geq log\ 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x^2 \geq 1$$

$$x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$$4 - x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 > -4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq 4$$

$$x \in]-2, 2[$$

$$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cap]-2, 2[= [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

Legge della derivata prima

$$f(x) = \sqrt{log(4 - x^2)}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{log(4 - x^2)} \cdot (4 - x^2)}$$

Ricerca di massimi e minimi

Calcoliamo il massimo ed il minimo della funzione $f(x) = \sqrt{log(4-x^2)}$ per $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

1. Valutazione della funzione agli estremi:

$$f(-\sqrt{3}) = 0, \; f(\sqrt{3}) = 0;$$

2. ricerca dei punti in cui la derivata si annulla e valutazione della funzione in corrispondenza dei punti suddetti:

$$\frac{-2x}{2\sqrt{log(4-x^2)} \cdot (4-x^2)} = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad f(0) = \sqrt{e-1} \simeq 1.1774.$$

Ricerca di massimi e minimi

La funzione ammette derivata in tutti i punti interni del suo campo di esistenza.
Posto

$$y_1 = f(-\sqrt{3}) = 0,\ y_2 = f(0) \simeq 1.1774,\ y_3 = f(-\sqrt{3}) = 0.$$

Si ha

$$\min f = \min\{y_1, y_2, y_3\} \Rightarrow$$

$$\min f = 0,\ x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\} \text{ punti di minimo}$$

$$\max f = \max\{y_1, y_2, y_3\} \Rightarrow$$

$$\max f = y_2,\ x = 0 \text{ punto di massimo.}$$