MATEMATICA FINANZIARIA

Zelda Marino

Tasso interno di rendimento

Operazioni eque

Ricordiamo che se è:

$$W(t; \boldsymbol{x}) = 0$$

l'operazione finanziaria $\boldsymbol{x}$ si dice *equa*, al tempo t, conformemente alla legge esponenziale adottata. L'equità caratterizza quindi un'operazione di scambio "in equilibrio", nella quale il valore delle somme incassate è uguale al valore delle somme pagate.

Affinchè l'operazione $\boldsymbol{x}$ sia equa è necessario che almeno uno degli importi componenti x_k abbia segno diverso dagli altri.

Proprietà funzionali della legge esponenziale

Proprietà invariantiva

Se un'operazione finanziaria è equa all'istante t secondo una assegnata legge esponenziale, lo è in qualsiasi altro istante.

Proprietà additiva

Se due operazioni finanziarie sono eque in un medesimo istante, conformemente a una stessa legge esponenziale, anche l'operazione finanziaria somma è equa allo stesso istante, secondo la stessa legge esponenziale.

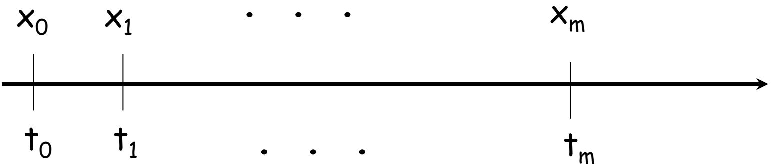
Proprietà di uniformità nel tempo

Se un'operazione finanziaria è equa all'istante t secondo una assegnata legge esponenziale, l'operazione avente tutte le scadenze traslate di un intervallo di lunghezza τ è equa nell'istante $t + \tau$ conformemente alla stessa legge.

Il Tasso Interno di Rendimento (TIR)

Definizione

Data l'operazione finanziaria x/t:

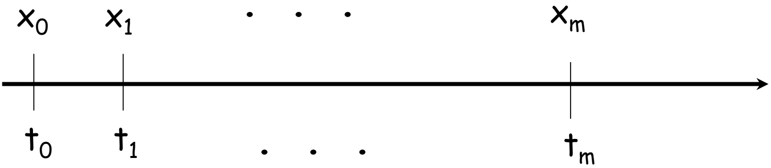


L'operazione è equa se:

$$x_0 + \sum_{k=1}^{m} x_k (1+i)^{-(t_k - t_o)} = 0$$

Definizione

Data l'operazione finanziaria x/t:



Tasso Interno di Rendimento (TIR): tasso di interesse della legge esponenziale conformemente alla quale l'operazione risulta equa.

Il TIR è soluzione dell'equazione:

$$\sum_{k=0}^{m} x_k (1+i^*)^{-(t_k - t_o)} = 0$$

Semplifichiamo

$$\sum_{k=0}^{m} x_k (1+i^*)^{-(t_k - t_0)} = 0$$

Poniamo $t_0=0$

$$\sum_{k=0}^{m} x_k (1+i^*)^{-t_k} = 0$$

Se assumiamo pagamenti periodici (ad esempio, annuali) $t_k=k$

$$\sum_{k=0}^{m} x_k (1+i^*)^{-k} = 0$$

Semplificazioni

sostituiamo v = 1/(1+i)

$$(1+i^*)^{-k} = v^k$$

abbiamo l'equazione algebrica di grado m nell'incognita v:

$$\sum_{k=0}^{m} x_k (1+i^*)^{-k} = \sum_{k=0}^{m} x_k v^k = 0$$

Significatività

La soluzione che cerchiamo rappresenta un fattore di sconto. Affinché la soluzione dell’eq. del T.I.R. abbia significato finanziario deve risultare $0 < v < 1$ cioè:

- la soluzione dell’equazione deve essere unica;
- la soluzione deve essere un numero reale positivo;
- la soluzione deve essere minore di 1.

Teorema fondamentale dell'algebra

Sia:

$$p_m(v) = \sum_{k=0}^{m} x_k v^k$$

r_i, i=1,…,h: radici del polinomio $p_m(v)$, in generale numeri complessi
n_i: molteplicità di r_i

Si ha che:

$$\sum_{k=0}^{m} x_k v^k = x_m (v - r_1)^{n_1} (v - r_2)^{n_2} \ldots (v - r_h)^{n_h}$$

$$n_1 + n_2 \cdots + n_h = m$$

Esistenza e unicità

Teorema di Cartesio

Sia N il numero delle variazioni nella successione dei segni dei coefficienti di $p_m(v)$, e sia h il numero delle sue radici positive. Allora N − h è un numero pari positivo o nullo.

N=0 ➔ h=0: non esistono radici positive
N=1 ➔ h=1: esiste una sola radice positiva

Corollario

Condizione sufficiente affinché l'equazione $p_m(v)=0$ ammetta un'unica soluzione positiva è che gli importi del flusso $\underline{x}$ cambino segno una sola volta.

Significatività finanziaria

$$v = \frac{1}{1+i} \qquad\qquad i = \frac{1}{v} - 1$$

Il corollario al teorema di Cartesio garantisce che la soluzione sia unica e che sia un un numero reale positivo.

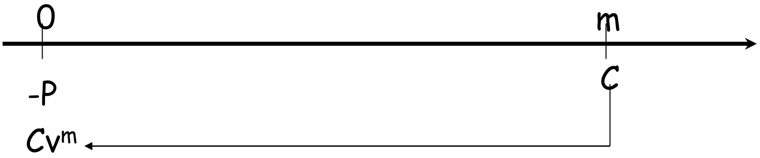
Vediamo quali sono le condizione che assicurano che sia $v<1$

TIR di un titolo a cedola nulla

P: prezzo di acquisto

C: valore facciale

m: scadenza

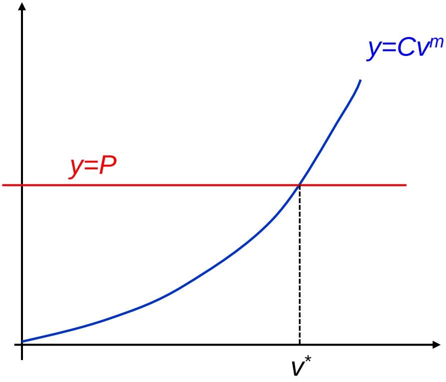


$$\sum_{k=0}^{m} x_k v^k = 0 \Leftrightarrow -P + Cv^m = 0$$

TIR di un titolo a cedola nulla

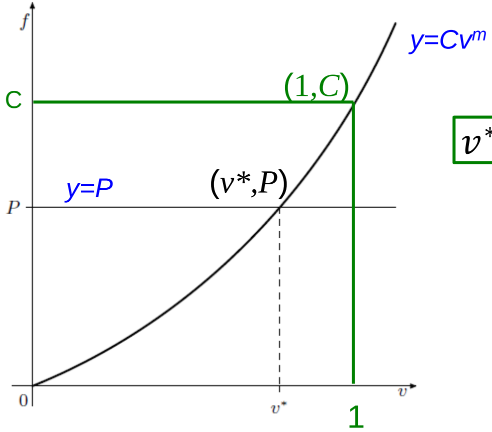
$$f(v) = -P + Cv^m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = P \\ y = Cv^m \end{cases}$$

Graficamente:



Significatività finanziaria

$$i^* > 0 \Leftrightarrow 0 < v^* < 1$$



$$\boxed{v^* < 1 \Leftrightarrow P < C}$$

TIR di un'operazione di investimento

Acquisto in 0 al prezzo P di un flusso x di m pagamenti:

$$P = \sum_{k=1}^{m} x_k v^k$$

$$f(v) = \sum_{k=1}^{m} x_k v^k$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{m} x_k v^k = 0 \Leftrightarrow f(v) = P$$

TIR di un'operazione di investimento

$$f(v) = x_1 v + x_2 v^2 + \cdots + x_m v^m$$

Derivando:

$$f'(v) = \underbrace{x_1}_{\geq 0} + \underbrace{2x_2 v}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{m x_m v^{m-1}}_{>0} \Rightarrow$$

f monotona strettamente crescente

Derivando ancora:

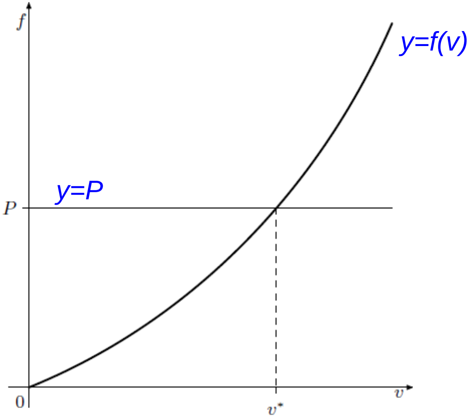
$$f''(v) = \underbrace{2x_2}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{m(m-1) x_m v^{m-2}}_{>0} \Rightarrow$$

f strettamente convessa

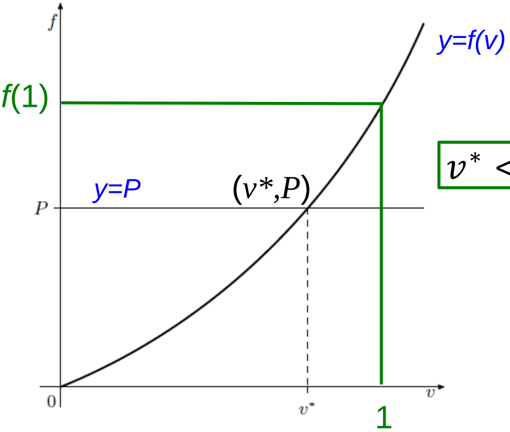
TIR di un'operazione di investimento

$$f(v) = P \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(v) \\ y = P \end{cases}$$

Graficamente:



Significatività finanziaria



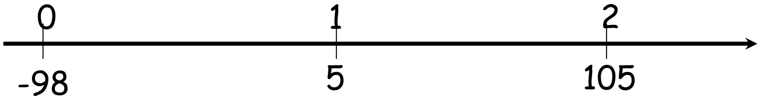
$$\boxed{v^* < 1 \Leftrightarrow P < f(1)}$$

$$f(v) = x_1 v + x_2 v^2 + \cdots + x_m v^m \qquad f(1) = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$$

La somma degli incassi futuri deve essere maggiore del prezzo di acquisto

Esempio

Acquisto in 0 al prezzo P=98 del coupon bond con valore facciale C=100, durata m=2 anni, cedola annua I=5 euro.



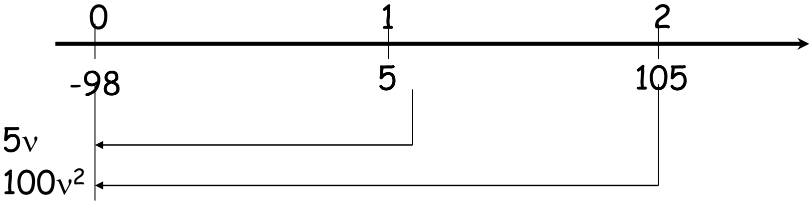
$$\boxed{P < C + 2I}$$

$$\boxed{98 < 100 + 2 \cdot 5 = 110}$$

$\Rightarrow$ esistenza e unicità del tir

Esempio

Acquisto in 0 al prezzo P=98 del coupon bond con valore facciale C=100, durata m=2 anni, cedola I=5 euro.



$$-98 + 5v + 105v^2 = 0 \Leftrightarrow 105v^2 + 5v - 98 = 0$$

Esempio

$$\boxed{105v^2 + 5v - 98 = 0}$$

$v_1 \cong -0.990195 \Rightarrow$ non significativa dal punto di vista finanziario

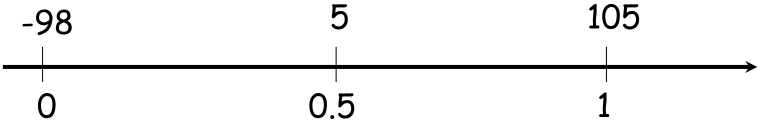
$v_2 \cong 0.942576 \Rightarrow \boldsymbol{v^* = v_2}$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{i^* = \frac{1}{v^*} - 1 \cong 0.060923 = 6.0923\%}$$

Esempio

Acquisto in 0 al prezzo P=98 del coupon bond con valore facciale C=100, che paga cedole di importo I=5 euro alla date $t_1=0.5$ e $t_2=1$, essendo il tempo espresso in anni.



Equazione del TIR:

$$-98 + 5v^{1/2} + 105v^{1} = 0$$

Esempio

$$-98 + 5v^{1/2} + 105v^{1} = 0$$

Poniamo:

$$x = v^{1/2} \qquad \Longrightarrow v = x^2$$

Con la sostituzione:

$$-98 + 5x + 105x^2 = 0$$

$$\boxed{105x^2 + 5x - 98 = 0}$$

Esempio

Risolvendo l'equazione otteniamo:

$$x^* \cong 0.94257561$$ su base semestrale

$$i^* = \frac{1}{x^*} - 1 \cong 0.060922847 = 6.09285\%$$

su base semestrale

Il TIR su base annua è:

$$\boldsymbol{i_a^* = (1 + i^*)^2 - 1 \cong 0.125557 = 12.5557\%}$$

Progressione geometrica

Una relazione algebrica fondamentale usata per valutare una rendita è la formula per il calcolo della somma di una successione geometrica finita.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$$

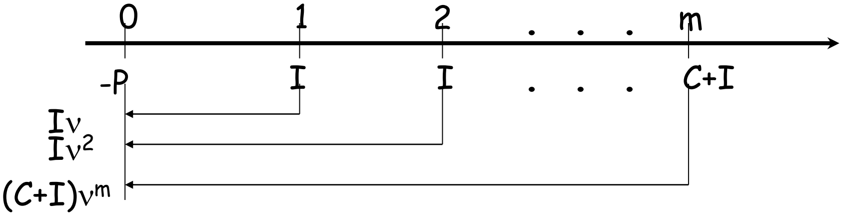
x: ragione della progressione

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$x + x^2 + \cdots + x^n = x(1 + x + \cdots + x^{n-1}) = x\frac{1 - x^n}{1 - x}$$

TIR di un titolo a cedola fissa

Acquisto in 0 al prezzo P di un titolo a cedola fissa I, di durata m e valore facciale C:



Equazione del TIR:

$$-P + \sum_{k=1}^{m} I v^k + C v^m = 0$$

TIR di un titolo a cedola fissa

$$-P + \sum_{k=1}^{m} I v^k + C v^m = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-P + Iv \frac{1 - v^m}{1 - v} + C v^m = 0$$

$$\Rightarrow Iv \frac{1 - v^m}{1 - v} = P - C v^m$$

TIR di un titolo a cedola fissa

a) P<C:

$$\boxed{P < C \Rightarrow P < C + mI}$$

$$Iv\frac{1-v^m}{1-v} = P - Cv^m < C - Cv^m = C(1-v^m)$$

$$\Downarrow$$

$$Iv\frac{1-v^m}{1-v} < C(1-v^m) \Rightarrow I\frac{v}{1-v} < C \Rightarrow \frac{I}{C}\frac{v}{1-v} < 1$$

$$\boxed{\frac{v}{1-v} = \frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1}{i}}$$

$$\frac{I}{C}\frac{1}{i^*} < 1 \Rightarrow i^* > \frac{I}{C}$$

Se P<C il T.I.R. è maggiore del tasso cedolare

TIR di un titolo a cedola fissa

b) P=C:

$$\boxed{P = C \;\; e \;\; C < C + mI \Rightarrow P < C + mI}$$

$$Iv\frac{1-v^m}{1-v} = P - Cv^m = C - Cv^m = C(1-v^m)$$

$$\Downarrow$$

$$Iv\frac{1-v^m}{1-v} = C(1-v^m) \Rightarrow \;\; I\frac{v}{1-v} = C$$

$$\Rightarrow \frac{I}{C}\cdot\frac{1}{i^*} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{i^* = \frac{I}{C}}$$

Se P=C il T.I.R. è uguale al tasso cedolare

TIR di un titolo a cedola fissa

c) P>C:

$$\boxed{P < C + mI}$$

$$Iv\frac{1-v^m}{1-v} = P - Cv^m > C - Cv^m = C(1-v^m)$$

$$\Downarrow$$

$$Iv\frac{1-v^m}{1-v} > C(1-v^m) \quad \Rightarrow I\frac{v}{1-v} > C$$

$$\Rightarrow \frac{I}{C}\cdot\frac{1}{i^*} > 1 \Rightarrow \boldsymbol{i^* < \frac{I}{C}}$$

Se P>C il T.I.R. è minore
del tasso cedolare