# Funzioni Numeriche

# Funzioni numeriche

- funzioni di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ (successioni)
- funzioni di $X \subseteq \mathbb{R}$.

# Richiami

## Massimo e minimo di un insieme

Sia $A$ un sottoinsieme di un insieme numerico $B$, si definisce

- minimo di $A$, se esiste, quell'elemento di $A$ minore o uguale ad ogni altro elemento di $A$:

$$min\, A \leqslant x, \ \forall x \in A$$

- massimo di $A$, se esiste, quell'elemento di $A$ maggiore o uguale ad ogni altro elemento di $A$:

$$max\, A \geqslant x, \ \forall x \in A$$

# Richiami

## Estremo inferiore di un insieme

Sia $A$ un sottoinsieme di un insieme numerico $B$,

- si definisce minorante di $A$, ogni elemento di $B$ minore o uguale ad ogni altro elemento di $A$.
- si indica con $A_{min}$ l'insieme dei minoranti di $A$

$$b \in A_{min} \Leftrightarrow b \in B, \;\; b \leqslant x, \; \forall x \in A$$

- se $A_{min} \neq \emptyset$ (ovvero esistono minoranti per l'insieme $A$) allora $A$ viene detto limitato inferiormente
- se $A_{min} = \emptyset$ (ovvero non esistono minoranti per l'insieme $A$) allora $A$ viene detto illimitato inferiormente
- si definisce estremo inferiore di $A$, se esiste, il massimo dei minoranti

$$infA = maxA_{min}$$

# Richiami

## Estremo superiore di un insieme

Sia $A$ un sottoinsieme di un insieme numerico $B$,

- si definisce maggiorante di $A$, ogni elemento di $B$ maggiore o uguale ad ogni altro elemento di $A$.
- si indica con $A_{mag}$ l'insieme dei maggioranti di $A$

$$b \in A_{mag} \Leftrightarrow b \in B, \;\; b \geqslant x, \; \forall x \in A$$

- se $A_{mag} \neq \emptyset$ (ovvero esistono maggioranti per l'insieme $A$) allora $A$ viene detto limitato superiormente
- se $A_{mag} = \emptyset$ (ovvero non esistono maggioranti per l'insieme $A$) allora $A$ viene detto illimitato superiormente
- si definisce estremo superiore di $A$, se esiste, il minimo dei maggioranti

$$supA = minA_{mag}$$

**Esistenza estremi di un insieme**

Dato l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$,

- ogni suo sottoinsieme limitato inferiormente ammette estremo inferiore,
- ogni suo sottoinsieme limitato superiormente ammette estremo superiore.

## Esistenza estremi di un insieme

Risulta utile definire un estremo inferiore (superiore) anche per insiemi non limitati inferiormente (superiormente).

- Se $A$ è illimitato inferiormente, si pone $\inf A = -\infty$,
- Se $A$ è illimitato superiormente, si pone $\sup A = +\infty$.

Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ammette estremo inferiore e estremo superiore.

## Estremi di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Sia $A$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

- Se $A$ è limitato inferiormente, allora $\inf A \in \mathbb{R}$,
- Se $A$ è illimitato inferiormente, allora $\inf A = -\infty$,
- Se $A$ è limitato superiormente, allora $\sup A \in \mathbb{R}$,
- Se $A$ è illimitato superiormente, allora $\sup A = +\infty$.

# Minimo assoluto di una funzione

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione numerica. Con il simbolo $\min_{x \in X} f(x)$ si indica il **minimo assoluto di $f$ per $x \in X$**.

Il minimo assoluto di $f$ corrisponde al minimo assoluto dell'immagine della funzione:
$\min_{x \in X} f(x) = \min f(X)$.

Di conseguenza

$$\min_{x \in X} f(x) \leqslant f(x) \ \forall x \in X.$$

# Punto di minimo assoluto

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione numerica. Un valore $x_0$ nel quale si realizza il minimo $f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$ si definisce **punto di minimo assoluto per la funzione $f$**.

# Massimo assoluto di una funzione

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione numerica. Con il simbolo $\max_{x \in X} f(x)$ si indica il **massimo assoluto di $f$ per $x \in X$**.

Il massimo assoluto di $f$ corrisponde al massimo assoluto dell'immagine della funzione:
$\max_{x \in X} f(x) = \max f(X)$.

Di conseguenza

$$\max_{x \in X} f(x) \geqslant f(x) \ \forall x \in X.$$

# Punto di minimo assoluto

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione numerica. Un valore $x_0$ nel quale si realizza il massimo $f(x_0) = \max_{x \in X} f(x)$ si definisce **punto di massimo assoluto per la funzione $f$**.

# Osservazioni

- Il minimo e il massimo assoluto di una funzione sono elementi del codominio della funzione.
- I punti di minimo e i punti di massimo di una funzione sono elementi del dominio della funzione.
- Il minimo assoluto e il massimo assoluto, se esistono, sono unici.
- I punti di minimo e i punti di massimo assoluto possono essere più di uno.

# Esempio

Siano $X = \{1,2,3,4\} \subseteq \mathbb{R}$ e $f : x \in X \to x^2 + 1 \in \mathbb{R}$.

Determiniamo $\min\limits_{x\in X} f(x)$ e $\max\limits_{x\in X} f(x)$.

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 1^2 + 1 = 2,\\
f(2) &= 2^2 + 1 = 5,\\
f(3) &= 3^2 + 1 = 10,\\
f(4) &= 4^2 + 1 = 17.
\end{aligned}
$$

- minimo di $f = 2$ con $x = 1$ punto di minimo,
- massimo di $f = 17$ con $x = 4$ punto di massimo.

# Esempio

Siano $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathbb{R}$ e
$f : x \in X \to x^2 + 1 \in \mathbb{R}$.

Determiniamo $\min_{x \in X} f(x)$ e $\max_{x \in X} f(x)$.

$f(0) = 1$
$f(1) = 1^2 + 1 = 2,\ f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2,$
$f(2) = 2^2 + 1 = 5,\ f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5,$
$f(3) = 3^2 + 1 = 10,\ f(-3) = (-3)^2 + 1 = 10,$
$f(4) = 4^2 + 1 = 17,\ f(-4) = (-4)^2 + 1 = 17.$

- minimo di $f = 1$ con $x = 0$ punto di minimo,
- massimo di $f = 17$ con $x = -4$ e $x = 4$ punto di massimo.

# Esempio

Sia $f : x \in \mathbb{Z} \to 1 - x^2 \in \mathbb{R}$.

Determiniamo $\min\limits_{x\in\mathbb{Z}} f(x)$ e $\max\limits_{x\in\mathbb{Z}} f(x)$.

$f(0) = 1$
$f(1) = 0$, $f(-1) = 0$,
$f(2) = -3$, $f(-2) = -3$,
$f(3) = -8$, $f(-3) = -8$,
$f(4) = -15$, $f(-4) = -15$.

- $\nexists$ minimo di $f$,
- massimo di $f = 1$ con $x = 0$ punto di massimo.

# Estremo inferiore di una funzione

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione numerica. Con il simbolo $\inf_{x \in X} f(x)$ si indica **l'estremo inferiore di $f$ per $x \in X$**.

L'estremo inferiore di $f$ corrisponde all'estremo inferiore dell'immagine della funzione:
$\inf_{x \in X} f(x) = \inf f(X)$.

Se l'estremo inferiore è

- finito allora la funzione si dice limitata inferiormente;
- $-\infty$ allora la funzione si dice illimitata inferiormente.

# Estremo superiore di una funzione

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione numerica. Con il simbolo $\sup_{x \in X} f(x)$ si indica **l'estremo superiore di $f$ per $x \in X$**.

L'estremo superiore di $f$ corrisponde all'estremo superiore dell'immagine della funzione:
$\sup_{x \in X} f(x) = \sup f(X).$

Se l'estremo superiore è

- finito allora la funzione si dice limitata superiormente;
- $+\infty$ allora la funzione si dice illimitata superiormente.

# Funzioni limitate

Una funzione limitata sia superiormente sia inferiormente si dice limitata

- $\exists \min_{x \in X} f(x) \Rightarrow \exists \inf_{x \in X} f(x)$ e $\min_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in X} f(x)$;
- $\exists \max_{x \in X} f(x) \Rightarrow \exists \sup_{x \in X} f(x)$ e $\max_{x \in X} f(x) = \sup_{x \in X} f(x)$;
- $\exists \inf_{x \in X} f(x) \not\Rightarrow \exists \min_{x \in X} f(x)$;
- $\exists \sup_{x \in X} f(x) \not\Rightarrow \exists \max_{x \in X} f(x)$.

# Esempio

Siano $X = [1,2[ \subseteq \mathbb{R}$ e $f : x \in X \to -2x \in \mathbb{R}$.

Si osservi che
$1 \leqslant x < 2 \Rightarrow (-2) \cdot 1 \geqslant -2x > -2 \cdot 2 \Rightarrow -2 \geqslant -2x > -4.$
Pertanto $f(X) = ]-4, -2]$.

- $\inf\limits_{x \in X} f(x) = -4$ e $\nexists \min\limits_{x \in X} f(x)$,
- $\sup\limits_{x \in X} f(x) = \max\limits_{x \in X} f(x) = -2$ con $x = 1$ punto di massimo.

Siano $f$ una funzione definita in $X$ e $x_0 \in X$.
$x_0$ è un **punto di massimo relativo** per $f$ $\Leftrightarrow$ esiste un intorno di $x_0$ in cui il massimo di $f$ è $f(x_0)$, cioè se

$$\exists\, I \in I(x_0) \; : \; f(x_0) \geq f(x) \,, \qquad \forall\, x \in I \cap X$$

$f(x_0)$ è detto **massimo relativo** per $f$.

# Minimo relativo

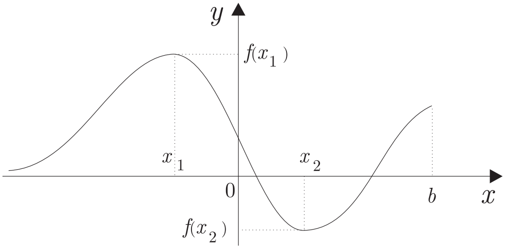
Siano $f$ una funzione definita in $X$ e $x_0 \in X$.
$x_0$ è un **punto di minimo relativo** per $f \iff$ esiste un intorno di $x_0$ in cui il minimo di $f$ è $f(x_0)$, cioè se

$$\exists\, I \in I(x_0) \;:\; f(x_0) \leq f(x)\,, \qquad \forall\, x \in I \cap X$$

$f(x_0)$ è detto **minimo relativo** per $f$.

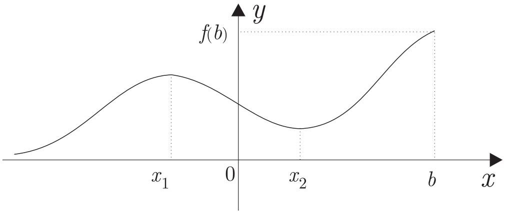
# Esempio

Si consideri la funzione




$x_1$ è un punto di massimo relativo, $x_2$ è un punto di minimo relativo.

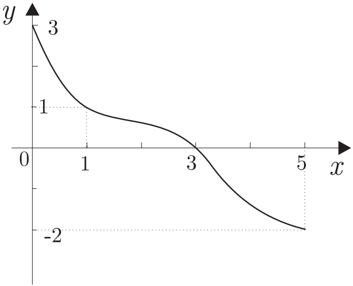
# Esempio




La funzione

- è limitata inferiormente , $\inf f(x) = 0$, **non ha minimo assoluto**;
- **ha un minimo relativo** in $x_2$;
- **ammette massimo assoluto** nel punto $b$;
- **ha un massimo relativo** in $x_1$.

# Esempio




La funzione

- ammette **massimo assoluto** in 0;
- non ha punti di **massimo relativo**;
- ammette minimo assoluto in 5;
- non ha punti di **minimo relativo**.

# Funzioni monotone

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione numerica.

Se $\forall x_1$ e $x_2$ in $X$ con $x_1 < x_2$

- $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, la funzione $f$ si dice crescente
- $f(x_1) < f(x_2)$, la funzione $f$ si dice strettamente crescente
- $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, la funzione $f$ si dice decrescente
- $f(x_1) > f(x_2)$, la funzione $f$ si dice strettamente decrescente

Una funzione che gode di una delle proprietà precedenti viene detta monotona.

# Monotonia in un punto

Siano $f$ una funzione definita in $X$ e $x_0$ un punto di $X$.

Se esiste un intorno di $x_0$ nel quale la funzione è strettamente crescente, si dice che la funzione è **strettamente crescente in** $x_0$.

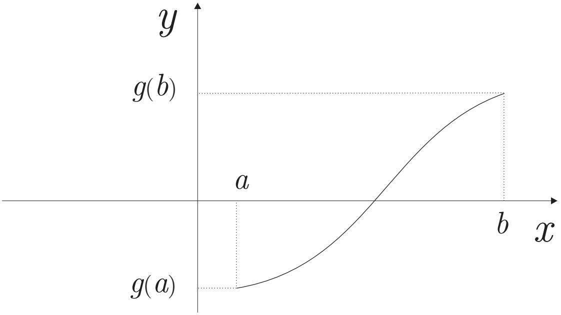
Se esiste un intorno di $x_0$ nel quale la funzione è strettamente decrescente, si dice che la funzione è **strettamente decrescente in** $x_0$.

**NOTA**

se una funzione è strettamente crescente in tutto $X$ allora essa è strettamente crescente in ogni punto di $X$; viceversa, se una funzione è strettamente crescente in ogni punto di $X$ potrebbe non essere strettamente crescente in tutto $X$.

# Esempio

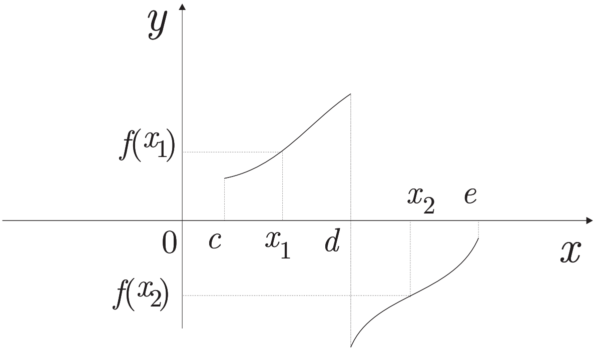
Consideriamo la funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}$;




$g$ è strettamente crescente in tutto $[a, b]$.

# Esempio

Consideriamo la funzione $f : [c, d[ \cup ]d, e] \to \mathbb{R}$;




$f$ è strettamente crescente in ogni punto di $[c, d[ \cup ]d, e]$ ma non è strettamente crescente in tutto $[c, d[ \cup ]d, e]$:

$$\forall x_1 \in [c, d[, x_2 \in ]d, e] \Rightarrow x_1 < x_2, \; f(x_1) > f(x_2)$$

# Funzioni lineari e affini

Siano $a$ e $b$ appartententi a $\mathbb{R}$ con $a > 0$. Sia
$f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = ax + b \in \mathbb{R}$.

Si osservi che $\forall x_1$ e $x_2$ in $X$ con $x_1 < x_2$
$f(x_1) = ax_1 + b < ax_2 + b = f(x_2)$
quindi la funzione $f$ è strettamente crescente

# Funzioni lineari e affini

In generale una funzione lineare $f(x) = ax$ e una funzione affine $f(x) = ax + b$ sono

- strettamente crescenti se $a > 0$,
- strettamente decrescenti se $a < 0$,
- costanti (contemporaneamente crescenti e decrescenti) se $a = 0$.

# Funzioni quadratiche

Sia $a$ appartentente a $\mathbb{R}$ con $a > 0$. Sia
$f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = ax^2 \in \mathbb{R}$.

Si osservi che
$0 \leqslant x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = ax_1^2 < ax_2^2 = f(x_2)$
mentre
$x_1 < x_2 \leqslant 0 \Rightarrow f(x_1) = ax_1^2 > ax_2^2 = f(x_2)$

- strettamente crescenti se $x \in [0, +\infty[$,
- strettamente decrescenti se $x \in ]-\infty, 0]$.

# Monotonia di funzioni composte

Siano

- $f : X \to Y$
- $g : Y \to Z$

Considerata la funzione composta $h = g \circ f$ si ha

- se $f$ e $g$ sono entrambe (strettamente) crescenti o decrescenti $h$ è (strettamente) crescente;
- se $f$ e $g$ sono una (strettamente) crescente, l'altra (strettamente) decrescente $h$ è (strettamente) decrescente.

# Monotonia dell'inversa

Una $f : X \to f(X)$ strettamente monotona è

- iniettiva
- suriettiva

quindi è biunivoca e invertibile.

La funzione inversa $f^{-1} : f(X) \to X$
è (strettamente) monotona.

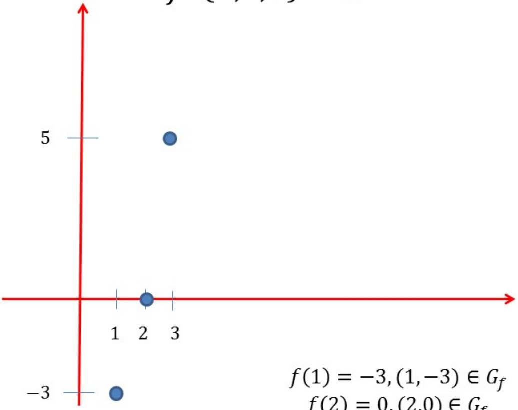
# Grafico di una funzione

Data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si definsce Grafico di $f$ l'insieme delle coppie ordinate
$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Il grafico di una funzione numerica si rappresenta con un opportuno insieme di punti del piano.

# Esempi

$$f:\{1,2,3\} \to x^2 - 4$$




$$f(1) = -3, (1,-3) \in G_f$$
$$f(2) = 0, (2,0) \in G_f$$
$$f(3) = 5, (3,5) \in G_f$$

# Esempi