Teoria del portafoglio
A questo punto possiamo definire la composizione del portafoglio
$\alpha = \frac{OBB}{RF}$ —> quota di Obbligazioni; $(1-\alpha) = \frac{M}{RF}$ —> quota di moneta

- $E(r_{RF}) = \alpha E(r_{OBB}) + (1-\alpha) r_m$

- $\sigma_{RF} = \alpha \sigma_{OBB} + (1-\alpha)\sigma_m$

La moneta non ha né rendimento né rischio, quindi abbiamo:
- $E(r_{RF}) = \alpha E(r_{OBB})$
- $\sigma_{RF} = \alpha \sigma_{OBB}$

Se mettiamo a sistema le due equazioni, otteniamo il rapporto rischio/rendimento $\alpha = \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_{OBB}}$:

$$\begin{cases} E(r_{RF}) = \alpha E(r_{OBB}) \\ \alpha = \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_{OBB}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} E(r_{RF}) = \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_{OBB}} E(r_{OBB}) \\ \alpha = \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_{OBB}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} E(r_{RF}) = \frac{E(r_{OBB})}{\sigma_{OBB}} \sigma_{RF} \\ \alpha = \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_{OBB}} \end{cases}$$

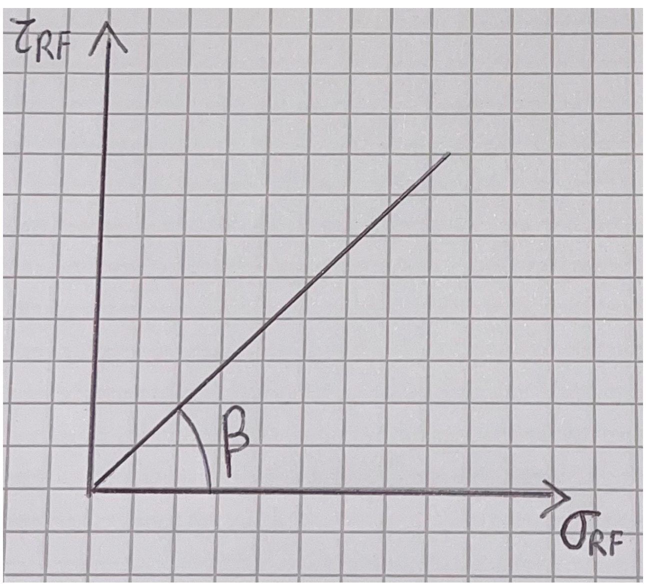
$$\longrightarrow \begin{cases} E(r_{RF}) = \beta \sigma_{RF} \\ \alpha = \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_{OBB}} \end{cases} \text{ dove } \beta = \frac{r_{RF}}{\sigma_{OBB}}$$

La composizione α del portafoglio può essere ricavata dalla rischiosità dell'obbligazione e dell'intero portafoglio:

$$\alpha = \frac{\sigma_{RF}}{\sigma_{OBB}} \text{ oppure } \alpha = \frac{1}{\sigma_{OBB}} \sigma_{RF}$$

α: la quota di titoli è inversamente proporzionale alla rischiosità del titolo.

Curva delle opportunità di composizione del portafoglio oppure detta **Frontiera rischio-rendimento**
Ci dice tutte le combinazioni di rischio/rendimento atteso ottenibili in base alla propria composizione del portafoglio.

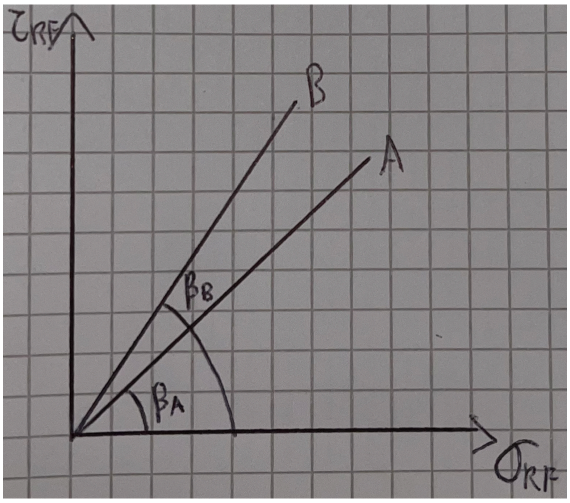


$$r_{RF} = \beta \sigma_{RF}$$

Incremento di rendimento atteso per ogni unità di rischio

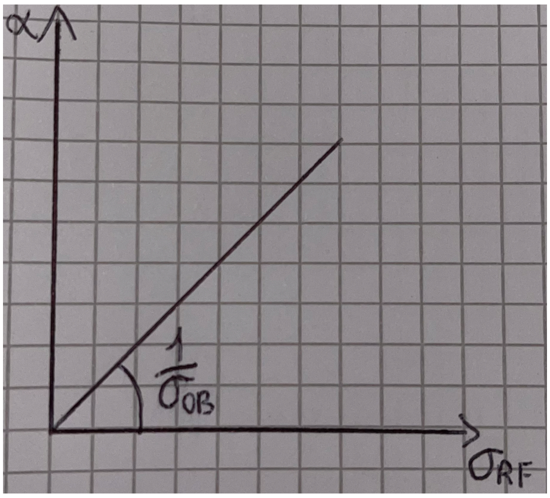
- Se $\uparrow \beta \quad \uparrow r_{RF} \quad \downarrow \sigma_{OBB}$: curva verso l'alto
- Se $\downarrow \beta \quad \downarrow r_{RF} \quad \uparrow \sigma_{OBB}$: curva verso il basso

A e B

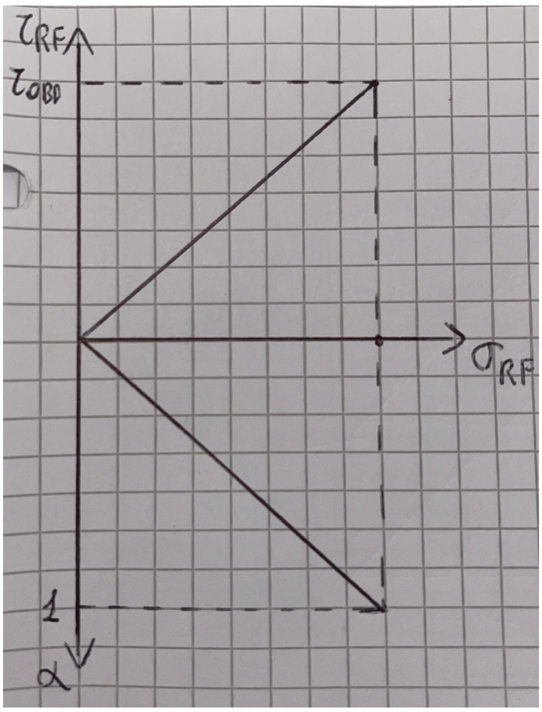


$$\sigma_A > \sigma_B \quad \longrightarrow \quad \beta_A < \beta_B$$

Consideriamo le composizioni del portafoglio



$$\alpha = \frac{1}{\sigma_{OBB}}\sigma_{RF}$$

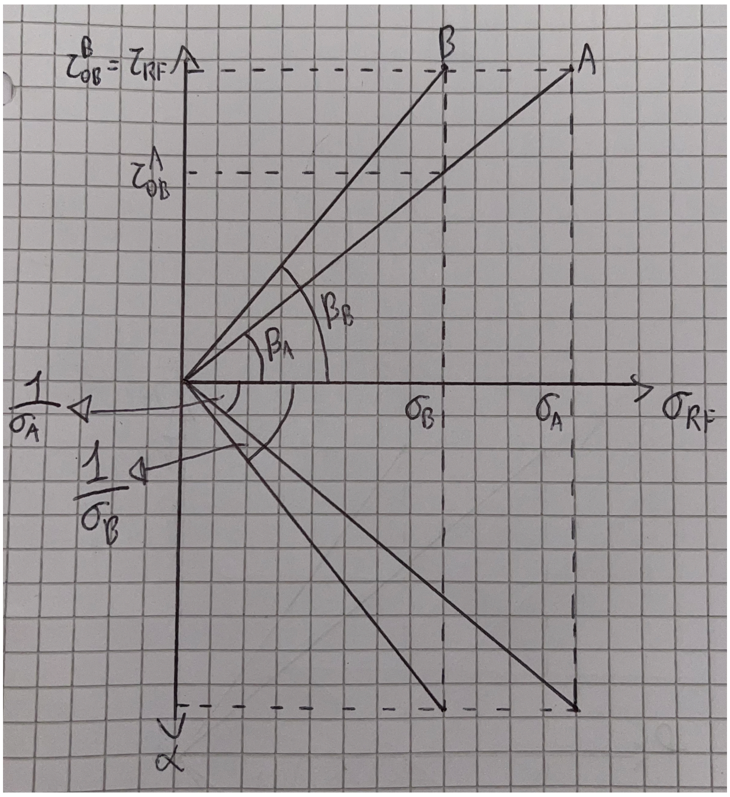


Se $\alpha = 1$

$r_{RF} = r_{OBB}$

$\sigma_{RF} = \sigma_{OBB}$

Se consideriamo A e B



A parità di rischio (es. σ^B) "A" si aspetta di detenere un rendimento di portafoglio minore ($\downarrow r_{RF}$) e anche la sua quota di titoli sarà più bassa.

Attitudini dei soggetti

In base alle preferenze, Tobin divideva i soggetti in:

- Indifferenti al rischio
- Avversi al rischio
- Amanti del rischio

Per ogni categoria è possibile calcolare una funzione di utilità e delineare le mappe di indifferenza. Le preferenze sono descritte dalle curve di indifferenza che rappresentano tutte le combinazioni rischio-rendimento che danno al soggetto lo stesso livello di utilità:

$$U = E(r_{RF}) + \sigma_{RF}$$

$-> \Delta U = MUr_{RF}\Delta r_{RF} + MU\sigma_{RF}\Delta\sigma_{RF} ->$

$MUr_{RF}\Delta r_{RF} = - MU\sigma_{RF}\Delta\sigma_{RF} -> \dfrac{\Delta r_{RF}}{\Delta\sigma_{RF}} = -\dfrac{MU\sigma_{RF}}{MUr_{RF}}$ —> Pendenza della curva di indifferenza che ci rappresenta il rapporto di sostituzione tra rischio e rendimento.

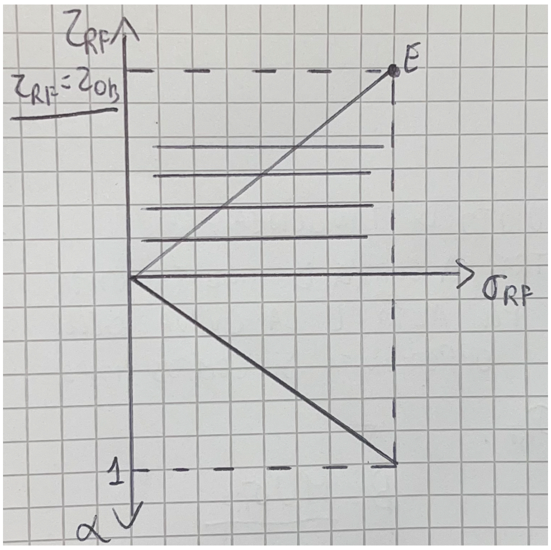
Le curve sono decrescenti perché il rendimento aumenta e il rischio diminuisce. Più in alto abbiamo la curva di differenza preferita perché l'utilità aumenta.

Indifferenti al rischio

Non percepiscono il rischio —> quindi le curve di indifferenza sono orizzontali e pari al rendimento atteso:

$$U = E(r_{RF}) + \cancel{\sigma_{RF}}$$

$\Delta U = MUr_{RF}\Delta r_{RF}$



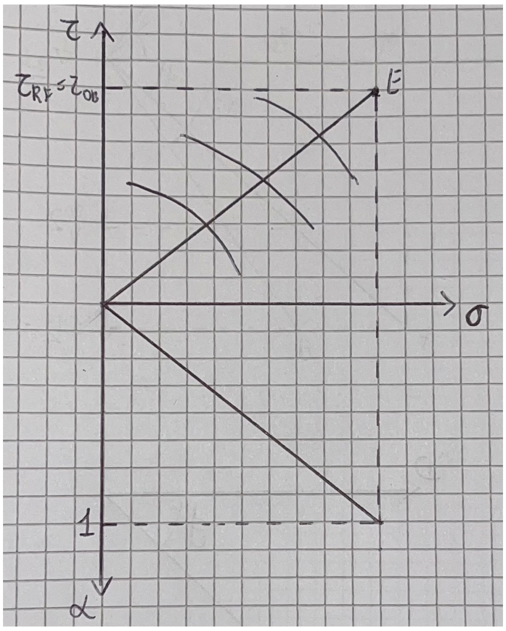
Utilità crescenti per ogni livello di rendimento

A parità di rischio, l'utilità aumenta al crescere del rendimento. Quindi ci posizioniamo nel punto più in alto in cui $M = 0$.
Detengono solo obbligazioni —> soluzione d'angolo α=1

↓

Teoria Tradizionale, senza rischio conta solo il rendimento atteso

Amanti del rischio
L'utilità aumenta all'aumentare del rischio σ —> sono disposti a rischiare di più per avere rendimenti più alti. Le curve di indifferenza sono decrescenti (perché l'utilità marginale del rischio è positiva $MU\sigma_{RF} > 0$). Le curve più in alto sono preferite.



PORTAFOGLIO NON DIVERSIFICATO

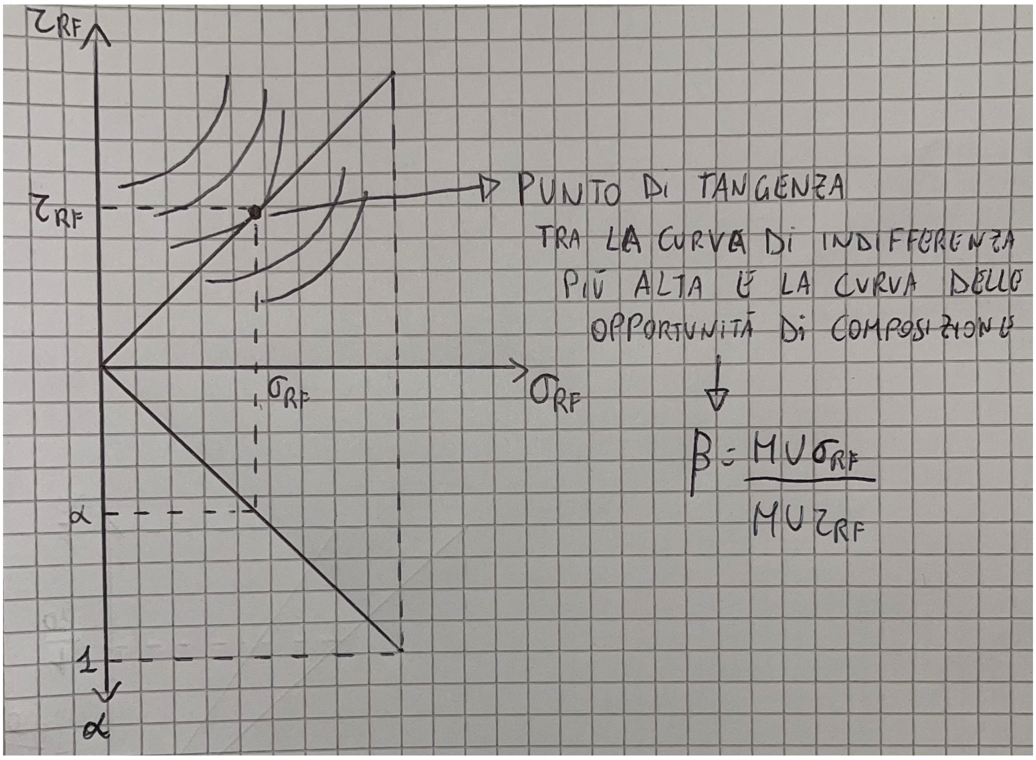
L'utilità cresce fino al punto E in cui $M = 0$ e $\alpha = 1$
$r_{RF} = r_{OBB}$ $\sigma_{RF} = \sigma_{OBB}$

Avversi al rischio
All'aumento del rischio (↑σ), gli operatori hanno un'utilità negativa che deve essere quindi compensata da livelli maggiori di r_{RF}. Le curve sono inclinate positivamente perché $MU\sigma_{RF} < 0$

$\Delta U = MUr_{RF}\Delta r_{RF} + (-MU\sigma_{RF})\Delta\sigma_{RF}$ dove $\Delta U = 0$

$$-> MUr_{RF}\Delta r_{RF} = MU\sigma_{RF}\Delta\sigma_{RF} -> \frac{MU\sigma_{RF}}{MUr_{RF}} > 0$$

L'utilità diminuisce se ci si sposta verso curve che hanno un rischio maggiore (↑σ)
L'avversione al rischio porta l'operatore a diversificare e a detenere α_{OBB} e (1-α)M.



$\alpha < 1 \qquad \sigma_{RF} < \sigma_{OBB} \qquad r_{RF} < r_{OBB}$