Precorso di Matematica

Università degli Studi di Napoli "Parthenope"
Scuola Interdipartimentale di Economia e Giurisprudenza

Insiemistica e Notazioni

Insiemi

Notazioni

Per convenzione indichiamo gli insiemi con lettere maiuscole e i loro elementi con lettere minuscole.
Un insieme può essere rappresentato racchiudendo, fra parentesi graffe

- i singoli elementi che lo costituiscono;
- una proposizione che identifica, in maniera univoca, i suoi elementi.

Esempi

Sia A l'insieme costituito dai primi tre numeri naturali
$A = \{1, 2, 3\}$ oppure $A = \{i\ primi\ tre\ numeri\ naturali\}$.
Sia B l'insieme costituito da tutti i fiumi che nascono in Italia
$B = \{i\ fiumi\ che\ nascono\ in\ Italia\}$.

Appartenenza

- $a \in A$ indica "a appartiene ad A".
- $b \notin A$ indica "b non appartiene ad A".

Esempio

$A = \{1, 2, 3\}$

- $3 \in A$.
- $4 \notin A$.

Quantificatori

- il quantificatore esistenziale $\exists$
  $\exists x \in S : \mathcal{A}$
  “esiste almeno un elemento x di S per cui la proprietà $\mathcal{A}$ è vera”.
- il quantificatore esistenziale di esistenza e unicità $\exists!$
  $\exists! x \in S : \mathcal{A}$
  “esiste un unico elemento x di S per cui la proprietà $\mathcal{A}$ è vera”.
- il quantificatore universale $\forall$
  $\forall x \in S, \mathcal{A}$
  “per ogni elemento x di S la proprietà $\mathcal{A}$ è vera”.

Esempio

Sia $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Allora

- $\exists x \in S : x < 3$. Infatti, nell'insieme S ci sono gli elementi 1 e 2 che sono entrambi strettamente minori di 3.
- $\exists! x \in S : x > 3$. Infatti, nell'insieme S c'è un solo elemento, 4, ad essere strettamente maggiore di 3.
- $\forall x \in S, x < 5$. Infatti, ogni elemento appartenente all'insieme S è strettamente minore di 5.

Sottoinsiemi

Definizioni

- Dati due insiemi A e B si dice che A è un sottoinsieme di B (o A è contenuto in B) e si indica con $A \subseteq B$ se ogni elemento di A è anche elemento di B. Ovvero $x \in A \implies x \in B$.

- Dati due insiemi A e B si dice che A è un sottoinsieme proprio di B (o A è contenuto strettamente in B) e si indica con $A \subsetneq B$ se ogni elemento di A è anche elemento di B ed esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A. Ovvero $x \in A \implies x \in B$ e $\exists b \in B$ tale che $b \notin A$.

Insieme vuoto

Definizione

Si definisce insieme vuoto e si indica con il simbolo $\emptyset$ un insieme privo di elementi.

Si verifica che, assegnato un qualunque insieme A, risulta che l'insieme vuoto è contenuto in esso, ovvero $\emptyset \subseteq A$.

Operazioni fra insiemi

Definizioni

Siano A e B due insiemi.

- $A \cup B$ indica l'insieme, denominato unione di A e di B, costituito da tutti gli elementi di A e tutti gli elementi di B.
  $A \cup B = \{x \,:\, x \in A \, o \, x \in B\}$
- $A \cap B$ indica l'insieme, denominato intersezione di A e B, costituito dagli elementi comuni ai due insiemi. $A \cap B = \{x \,:\, x \in A \, e \, x \in B\}$
- $A \setminus B$ indica l'insieme, denominato differenza tra A e B, costituito dagli elementi di A che non appartengono a B
  $A \setminus B = \{x \,:\, x \in A \, e \, x \notin B\}$
- $A \Delta B$ indica l'insieme, denominato differenza simmetrica di A e B, costituito dall'unione della differenza fra A e B e la differenza fra B e A. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Operazioni fra insiemi

Esempio

Siano $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 5, 7\}$ due insiemi. Allora

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$;
- $A \cap B = \{1, 2\}$;
- $A \setminus B = \{3, 4\}$;
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{3, 4\} \cup \{5, 7\} = \{3, 4, 5, 7\}$.

Operazioni fra insiemi

Prodotto cartesiano

Siano A e B due insiemi. Con $A \times B$ si indica l'insieme, denominato prodotto cartesiano di A e B, costituito da tutte le coppie ordinate, denotate con (a, b), di primo elemento $a \in A$ e secondo elemento $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Prodotto cartesiano

- Se A è diverso da B risulta che $A \times B \neq B \times A$.

$$A \times B = \{(a,b) \ : \ a \in A, \ b \in B\} \neq B \times A = \{(b,a) \ : \ b \in B, \ a \in A\}.$$

- Il prodotto cartesiano di un insieme A per se stesso si indica con il simbolo A^2.

Operazioni fra insiemi

Prodotto cartesiano

Siano $A = \{1, 2\}$ e $B = \{4, 5\}$ due insiemi. Allora

- $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5)\}$
- $B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$
- $A \times B \neq B \times A$

Gli insiemi numerici

Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

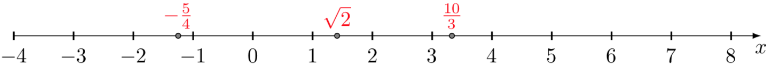
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ = insieme dei numeri naturali;
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ = insieme dei numeri interi relativi;
- $\mathbb{Q} = \{q = \frac{m}{n} \ : n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ = insieme dei numeri razionali;
- $\mathbb{R}$= insieme dei numeri reali, unione dei numeri razionali e dei numeri irrazionali.

osservazione

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Osserviamo, in particolare, che le inclusioni sono proprie ovvero $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

La retta dei numeri reali

L'insieme $\mathbb{R}$ può essere graficamente rappresentato mediante la retta dei numeri reali.
Identificando un punto della retta con lo zero, ogni punto alla sua destra rappresenta un numero positivo, mentre ogni punto a sinistra dello zero rappresenta un numero negativo.



Intervalli limitati di $\mathbb{R}$

Siano a e b due numeri reali con $a < b$.

- $[a,b]$ (intervallo chiuso) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali compresi tra a e b, estremi inclusi
  $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
- $[a,b[$ (intervallo aperto a destra chiuso a sinistra) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali compresi tra a e b, a incluso, b escluso $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$,
- $]a,b]$ (intervallo aperto a sinistra chiuso a destra) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali compresi tra a e b, a escluso, b incluso $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$,
- $]a,b[$ (intervallo aperto) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali compresi tra a e b, a e b esclusi,
  $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Definizioni

Intervalli illimitati di $\mathbb{R}$

Sia a un numero reale.

- $(-\infty, a]$ (intervallo chiuso illimitato inferiormente) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali minori di a, estremo incluso $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$
- $(-\infty, a[$ (intervallo aperto illimitato inferiormente) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali minori di a, estremo escluso $(-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- $[a, +\infty)$ (intervallo chiuso illimitato superiormente) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali maggiori di a, estremo incluso $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$
- $]a, +\infty)$ (intervallo aperto illimitato superiormente) si intende l'insieme formato da tutti i numeri reali maggiori di a, estremo escluso $]a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.

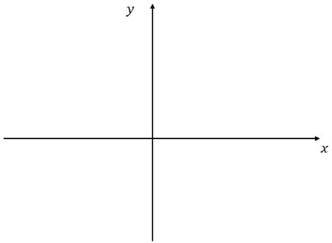
Geometria Analitica

Piano cartesiano

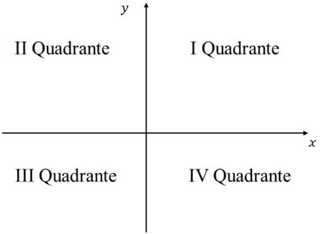
Considerando il piano euclideo Π, è possibile introdurre un sistema di assi cartesiani che identificano il cosiddetto **piano cartesiano**.

Gli **assi cartesiani** sono due rette ortogonali fra di loro, convenzionalmente, una orizzontale, orientata da sinistra verso destra (**asse delle ascisse** o **asse** x), e l'altra verticale, orientata dal basso verso l'alto (**asse delle ordinate** o **asse** y).

Il punto di incontro degli assi cartesiani è detto **origine** del piano cartesiano.

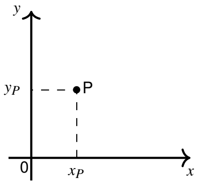


Gli assi cartesiani dividono il piano euclideo in quattro parti denominate **quadranti**. Partendo da quella in alto a destra e procedendo in *senso antiorario*, le quattro parti vengono chiamate rispettivamente primo, secondo, terzo e quarto quadrante.



Un punto P del piano è univocamente determinato mediante una coppia ordinata di numeri reali (x_P, y_P), denominate coordinate del punto P.

- $P \equiv (x_P, y_P)$.
- x_P rappresenta l'**ascissa** di P ed è la proiezione ortogonale del punto sull'asse x.
- y_P rappresenta l'**ordinata** di P ed è la proiezione ortogonale del punto sull'asse y.



Caratteristiche

Dati due punti $A \equiv (x_1, y_1)$ e $B \equiv (x_2, y_2)$, questi identificano in modo univoco un segmento

1) la cui lunghezza (ovvero la distanza fra A e B) è data da

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

e

2) il cui punto medio è

$$M \equiv \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

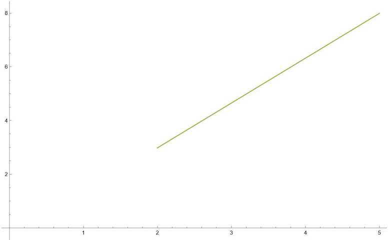
Segmenti

Dati i punti $A \equiv (x_1, y_1) = (2,3)$ e $B \equiv (x_2, y_2) = (5,8)$, allora

1. la distanza fra A e B è data da

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-5)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5,83;$$

2. il punto medio è $M \equiv \left(\frac{2+5}{2}, \frac{3+8}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$.



Equazione della retta

- Fissati due punti distinti $A \equiv (x_1, y_1)$ e $B \equiv (x_2, y_2)$, questi identificano, in modo univoco, una retta.
- Si dimostra che le coordinate di tutti e soli i punti che appartengono a tale retta costituiscono le soluzioni di un'equazione di I grado in x e y la cui formulazione dipende dai valori delle coordinate di A e B.

Equazione della retta

1) Se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, la retta individuata da A e B risulta essere obliqua e avere equazione

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

2) Se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2 = y_0$, la retta individuata da A e B risulta essere orizzontale e avere equazione

$$y = y_0$$

3) Se $x_1 = x_2 = x_0$ e $y_1 \neq y_2$, la retta individuata da A e B risulta essere verticale e avere equazione

$$x = x_0$$

Equazione della retta

- L'equazione di una retta può essere scritta nella forma implicita

$$ax + by + c = 0.$$

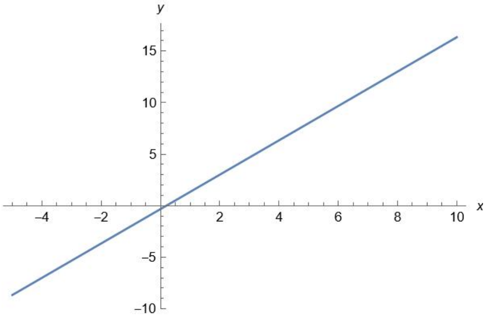
- L'equazione di una retta obliqua o di una retta orizzontale può essere scritta anche nella in forma esplicita rispetto a y

$$y = mx + q.$$

Equazione della retta

Considerando l'equazione $y = mx + q$

- il coefficiente m viene chiamato coefficiente angolare e dipende dall'angolo che la retta forma con l'asse delle x,
- il coefficiente q viene chiamato termine noto e coincide con l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse delle y.



Equazione della retta

Dati i punti $A \equiv (x_1, y_1) = (2, 3)$ e $B \equiv (x_2, y_2) = (5, 8)$, allora la retta passante per i due punti è data dall'equazione

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-3}{8-3} \implies \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{5},$$

ovvero $5(x-2) = 3(y-3) \implies 5x - 10 = 3y - 9 \implies 3y = 5x - 1.$

Attraverso semplici passaggi algebrici, possiamo ottenere l'equazione della retta

- in forma implicita

$$5x - 3y - 1 = 0,$$

- in forma esplicita rispetto a y

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$$

Condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra rette

Forma implicita

Due rette r e s di equazioni rispettive $r \equiv a_r x + b_r y + c_r = 0$, $s \equiv a_s x + b_s y + c_s = 0$, sono

- parallele se $a_r = k a_s, b_r = k b_s$, per k opportuno; in più, se anche $c_r = k c_s$, le rette coincidono;
- perpendicolari se $a_r = k b_s, b_r = -k a_s$, per k opportuno.

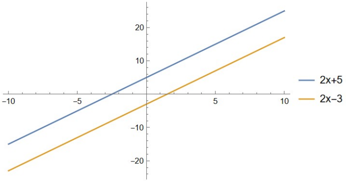
Forma esplicita

Due rette r e s di equazioni rispettive $r \equiv y = m_r x + q_r$, $s \equiv y = m_s x + q_s$, sono

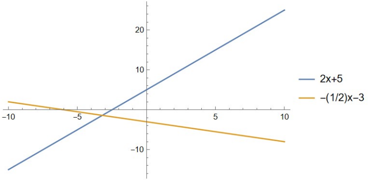
- parallele se $m_r = m_s$;
- perpendicolari se $m_r = -\frac{1}{m_s}$.

Condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra rette

- Le rette $r \equiv y = 2x + 5$ e $s \equiv y = 2x - 3$ sono parallele, poichè risulta $m_r = m_s = 2$.



- Le rette $r \equiv y = 2x + 5$ e $s \equiv y = -\frac{1}{2}x - 3$ sono perpendicolari, poichè risulta $m_r = -\frac{1}{m_s}$. Infatti $-\frac{1}{m_s} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = -1(-\frac{2}{1}) = 2 = m_r$.



Esempio

Esercizio

Determinare l'equazione della retta r passante per il punto $A = (3, 1)$ e parallela alla retta $y = 4x + 2$.

Svolgimento

- Sappiamo che due rette per essere parallele devono avere lo stesso coefficiente angolare. Quindi deve risultare $m_r = 4$.
- L'equazione della retta r sarà del tipo $y = 4x + q$. Risulta, quindi, necessario determinare il valore del termine noto q.
- La retta r passa per il punto $(3, 1)$, quindi deve essere verificata l'equazione $1 = 4 \cdot 3 + q$, da cui si ricava $q = -11$.
- L'equazione della retta r è, quindi, $y = 4x - 11$.

Equazioni e Disequazioni

Equazioni

- Si dice equazione una uguaglianza fra espressioni matematiche nelle quali compare almeno una incognita.
- Risolvere un'equazione significa determinare quei valori, se esistono, da attribuire alle incognite affinché l'uguaglianza assegnata risulti essere una identità.

Equazioni

Equazione

Sia data l'equazione $ax + b = 0$, con $a = 0$ e b numero reale preassegnato.

Due possibilità

1) Se il numero b è diverso da zero $\Rightarrow$ per qualunque valore assegnamo a x, risulta $0 = 0x + b = b \neq 0$.
   - Il problema non ammette soluzione.
2) Se il numero b è uguale a zero $\Rightarrow$ per qualunque valore assegnamo a x, risulta $0 = 0x + b = b = 0$.
   - Il problema ammette soluzione;
   - tale soluzione non è unica;
   - ogni numero reale è soluzione dell'equazione $\Rightarrow$ l'equazione ammette infinite soluzioni.

Equazione di primo grado

Data l'equazione $ax + b = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, risolvere l'equazione significa determinare i valori da assegnare a x affinché l'uguaglianza sia verificata.
Risulta

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Osservazione

Esiste un unico valore, $x = -\frac{b}{a}$, che sostituito nella espressione assegnata la rende uguale a zero, infatti, $a \cdot \frac{-b}{a} + b = 0$.

Equazione di primo grado $ax + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

In sintesi, l'equazione di primo grado $ax + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

- ammette soluzione;
- tale soluzione è unica;
- la soluzione è $x = -\frac{b}{a}$.

RIASSUMENDO

Equazione $ax + b = 0$

Data l'equazione $ax + b = 0$, con a e b numeri reali preassegnati,

- se $a = 0$ e $b \neq 0$, l'equazione non ammette soluzioni;
- se $a = 0$ e $b = 0$, l'equazione ammette infinite soluzioni;
- se $a \neq 0$, l'equazione ammette un'unica soluzione, $x = -\frac{b}{a}$.

Esempi

Esercizio

Si determinino le eventuali soluzioni della seguente equazione

$$3x - 5 = 0.$$

Svolgimento

$$3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}.$$

Esempi

Esercizio

Si determinino le eventuali soluzioni della seguente equazione

$$7x + 14 = 0.$$

Svolgimento

$$7x + 14 = 0 \Rightarrow 7x = -14 \Rightarrow x = -\frac{14}{7} = -2.$$

Esempi

Esercizio

Si determinino le eventuali soluzioni della seguente equazione

$$-10x + 15 = 0.$$

Svolgimento

$$-10x + 15 = 0 \Rightarrow 10x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

Esempi

Esercizio

Si determinino le eventuali soluzioni della seguente equazione

$$-5x - 15 = 0.$$

Svolgimento

$$-5x - 15 = 0 \Rightarrow 5x = -15 \Rightarrow x = -\frac{15}{5} = -3.$$

Equazione di secondo grado

Data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b e c numeri preassegnati e $a \neq 0$, risolvere l'equazione significa determinare i valori da assegnare a x affinché l'uguaglianza sia verificata.

Risoluzione

Per risolvere l'equazione si valuta la quantità, detta discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$ e ne si analizza il segno.

Equazioni di secondo grado: casi

1. $\Delta < 0 \Rightarrow$ non esistono soluzioni reali;
2. $\Delta = 0 \Rightarrow$ esiste un'unica soluzione reale
$$x = -\frac{b}{2a};$$
3. $\Delta > 0 \Rightarrow$ esistono due soluzioni reali distinte
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Esercizio

Si determinino le eventuali soluzioni della seguente equazione

$$3x^2 - 5x + 7 = 0.$$

Svolgimento

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 25 - 84 = -59 < 0$$

quindi l'equazione non ammette soluzioni.

Esempi

Esercizio

Si determinino le eventuali soluzioni della seguente equazione

$$4x^2 - 3x - 7 = 0.$$

Svolgimento

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-7) = 9 + 112 = 121 > 0$$

quindi l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte.

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{121}}{8} = -1, \qquad x_2 = \frac{3 + \sqrt{121}}{8} = \frac{7}{4}.$$

Esempi

Esercizio

Si determinino le eventuali soluzioni della seguente equazione

$$9x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Svolgimento

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$$

quindi l'equazione ammette un'unica soluzione reale.

$$x = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Non è sempre strettamente necessario determinare il valore di Δ.

Equazioni di secondo grado spurie $ax^2 + bx = 0$

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Equazioni di secondo grado purie $ax^2 + c = 0$

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}} & \textit{se } ac \leqslant 0 \\ \text{non ammette soluzioni} & \textit{se } ac > 0 \end{cases}$$

Esercizio

Si determinino le eventuali soluzioni della seguente equazione

$$5x^2 - 3x = 0.$$

Svolgimento

$$5x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(5x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{5}.$$

Esempi

Esercizio

Si determinino le eventuali soluzioni della seguente equazione

$$5x^2 - 10 = 0.$$

Svolgimento

$$5x^2 - 10 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2}.$$

Esempi

Esercizio

Si determinino le eventuali soluzioni della seguente equazione

$$7x^2 + 3 = 0.$$

Svolgimento

$$7x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{7} \Rightarrow 7x^2 + 3 = 0 \text{ non ammette soluzioni.}$$

OSSERVAZIONE

$7x^2 + 3 = 0$ è somma di una quantità non negativa, $7x^2$, e una positiva, 3, pertanto non può essere nulla.

Disequazioni

- Si dice disequazione una disuguaglianza fra espressioni matematiche nelle quali compare almeno una incognita.
- Risolvere una disequazione significa determinare quei valori, se esistono, da attribuire alle incognite affinché la disuguaglianza assegnata risulti essere soddisfatta.

Disequazione di primo grado

Data la disequazione $ax + b > 0$, con a e b numeri preassegnati e $a \neq 0$, risolvere la disequazione significa determinare i valori da assegnare a x affinché la disuguaglianza sia verificata.

Due casi

$$ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right) & se\, a > 0 \\ x < -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right[& se\, a < 0 \end{cases}$$

Disequazione di primo grado

Data la disequazione $ax + b < 0$, con a e b numeri preassegnati e $a \neq 0$, risolvere la disequazione significa determinare i valori da assegnare a x affinché la disuguaglianza sia verificata.

Due casi

$$ax + b < 0 \Rightarrow ax < -b \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right[& se\, a > 0 \\ \\ x > -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right) & se\, a < 0 \end{cases}$$

Disequazioni

Disequazione di primo grado

Se la disequazione si presenta nella forma

$$ax + b \geqslant 0$$

o

$$ax + b \leqslant 0$$

si deve tener conto delle soluzioni dell'equazione associata.

$ax + b \geqslant 0$

$$ax + b \geqslant 0 \Rightarrow ax \geqslant -b \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right) & se\, a > 0 \\ x \leqslant -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right] & se\, a < 0 \end{cases}$$

$ax + b \leqslant 0$

$$ax + b \leqslant 0 \Rightarrow ax \leqslant -b \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right] & se\, a > 0 \\ x \geqslant -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right) & se\, a < 0 \end{cases}$$

Esercizio

Determinare le soluzioni della seguente disequazione $3x - 2 > 0$.

Svolgimento

$$3x - 2 > 0 \Rightarrow 3x > 2 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \Rightarrow x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

Esempi

Esercizio

Determinare le soluzioni della seguente disequazione $-6x + 9 > 0$.

Svolgimento

$$-6x + 9 > 0 \Rightarrow 6x - 9 < 0 \Rightarrow 6x < 9 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right[.$$

Esercizio

Determinare le soluzioni della seguente disequazione $4x + 8 \geqslant 0$.

Svolgimento

$$4x + 8 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -2 \Rightarrow x \in [-2, +\infty) \, .$$

Esercizio

Determinare le soluzioni della seguente disequazione $-4x+3 \leqslant 0$.

Svolgimento

$$-4x+3 \leqslant 0 \Rightarrow 4x-3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{3}{4} \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{4}, +\infty\right).$$

Esercizio

Determinare le soluzioni della seguente disequazione $5x+6 \leqslant 0$.

Svolgimento

$$5x+6 \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -\frac{6}{5} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{6}{5}\right].$$

Esercizio

Determinare le soluzioni della seguente disequazione $7x + 5 < 0$.

Svolgimento

$$7x + 5 < 0 \Rightarrow x < -\frac{5}{7} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{5}{7}\right[.$$

Disequazioni

Disequazione di secondo grado

Si consideri la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
Si consideri l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$.
Sussistono allora le tre seguenti eventualità

Prima eventualità

1) $(\Delta < 0)$ l'equazione associata non ammette soluzioni reali

- se $a > 0$, tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ soddisfano la disequazione;
- se $a < 0$, nessun valore di x soddisfa la disequazione.

Seconda eventualità

2) $(\Delta = 0)$ l'equazione associata ammette un'unica soluzione reale $x_1 = -\frac{b}{2a}$

- se $a > 0$, tutti i valori di $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$ soddisfano la disequazione;
- se $a < 0$, nessun valore di x soddisfa la disequazione.

Terza eventualità

3) $(\Delta > 0)$ l'equazione associata ammette due soluzioni reali e distinte $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

- se $a > 0$, tutti i valori di $x \in (-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty)$ soddisfano la disequazione;
- se $a < 0$, tutti i valori di $x \in]x_1, x_2[$ soddisfano la disequazione.

Disequazione di secondo grado

Se la disequazione si presenta nella forma

$$ax^2 + bx + c < 0$$

ci si può ricondurre a una disequazione della precedente forma, infatti,

$$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow -ax^2 - bx - c > 0.$$

Disequazione di secondo grado

Se la disequazione si presenta nella forma

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0$$

o

$$ax^2 + bx + c \leqslant 0$$

si deve tener conto delle soluzioni dell'equazione associata.

Disequazione di secondo grado

Si consideri la disequazione $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Prima eventualità

1) $(\Delta < 0)$ l'equazione non ammette soluzioni reali

- se $a > 0$, tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ soddisfano la disequazione;
- se $a < 0$, nessun valore di x soddisfa la disequazione.

Seconda eventualità

2) $(\Delta = 0)$ l'equazione ammette un'unica soluzione reale $x_1 = -\frac{b}{2a}$

- se $a > 0$, tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ soddisfano la disequazione;
- se $a < 0$, solo $x_1 = -\frac{b}{2a}$ soddisfa la disequazione.

Terza eventualità

3) $(\Delta > 0)$ l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

- se $a > 0$, tutti i valori di $x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$ soddisfano la disequazione;

- se $a < 0$, tutti i valori di $x \in [x_1, x_2]$ soddisfano la disequazione.

Disequazione di secondo grado

Se la disequazione si presenta nella forma

$$ax^2 + bx + c \leqslant 0$$

ci si può ricondurre a una disequazione della precedente forma, infatti,

$$ax^2 + bx + c \leqslant 0 \Leftrightarrow -ax^2 - bx - c \geqslant 0.$$

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni della seguente disequazione $3x^2 + 11x - 4 \geqslant 0$.

Svolgimento

Consideriamo l'equazione associata $3x^2 + 11x - 4 = 0$

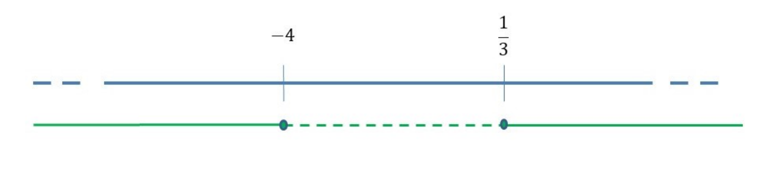
$\Delta = (11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 121 + 48 = 169 > 0$. L'equazione associata ammette due soluzioni reali e distinte

$$x_1 = \frac{-11 - \sqrt{169}}{6} = \frac{-11 - 13}{6} = -4, x_2 = \frac{-11 + \sqrt{169}}{6} = \frac{-11 + 13}{6} = \frac{1}{3}.$$

Esempi

Svolgimento

$a = 3 > 0$, $\Delta = 169 > 0$



La disequazione $3x^2 + 11x - 4 \geqslant 0$ è soddisfatta per ogni $x \in (-\infty, -4] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

Esempi

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni della seguente disequazione $x^2 - 3x + 5 \leqslant 0$.

Svolgimento

Consideriamo l'equazione associata $x^2 - 3x + 5 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 9 - 20 = -11 < 0$. L'equazione associata non ammette soluzioni reali.

Esempi

Svolgimento

$a = 1 > 0$, $\Delta = -11 < 0$

la disequazione $x^2 - 3x + 5 \leqslant 0$ non ammette soluzioni.

Esempi

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni della seguente disequazione $x^2 + 5x + 7 \geqslant 0$.

Svolgimento

Consideriamo l'equazione associata $x^2 + 5x + 7 = 0$

$\Delta = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 25 - 28 = -3 < 0$. L'equazione associata non ammette soluzioni reali.

Esempi

Svolgimento

$a = 1 > 0$, $\Delta = -3 < 0$

la disequazione $x^2 + 5x + 7 \geqslant 0$ è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempi

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni della seguente disequazione $-2x^2 + 3x - 3 \geqslant 0$.

Svolgimento

Consideriamo l'equazione associata $-2x^2 + 3x - 3 = 0$

$\Delta = (3)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3) = 9 - 24 = -15 < 0$. L'equazione associata non ammette soluzioni reali.

Esempi

Svolgimento

$a = -2 < 0$, $\Delta = -15 < 0$

la disequazione $-2x^2 + 3x - 3 \geqslant 0$ non ammette soluzioni.

Esempi

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni della seguente disequazione $-x^2 + 7x - 13 < 0$.

Svolgimento

Consideriamo l'equazione associata $-x^2 + 7x - 13 = 0$

$\Delta = (7)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-13) = 49 - 52 = -3 < 0$. L'equazione associata non ammette soluzioni reali.

Esempi

Svolgimento

$a = -1 < 0,\ \Delta = -3 < 0$

la disequazione $-x^2 + 7x - 13 < 0$ è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempi

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni della seguente disequazione $x^2 - x - 20 > 0$.

Svolgimento

Consideriamo l'equazione associata $x^2 - x - 20 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 1 + 80 = 81 > 0$. L'equazione associata ammette due soluzioni reali e distinte

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{81}}{2} = \frac{1 - 9}{2} = -4, x_2 = \frac{1 + \sqrt{81}}{2} = \frac{1 + 9}{2} = 5.$$

Esempi

Svolgimento

$a = 1 > 0$, $\Delta = 81 > 0$

La disequazione $x^2 - x - 20 > 0$ è soddisfatta per ogni $x \in (-\infty, -4[\cup]5, +\infty)$.

Esempi

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni della seguente disequazione $-x^2 + 3x - 2 > 0$.

Svolgimento

Consideriamo l'equazione associata $-x^2 + 3x - 2 = 0$ che equivale a $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$. L'equazione associata ammette due soluzioni reali e distinte

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1, x_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

Esempi

Svolgimento

$a = -1 < 0$, $\Delta = 1 > 0$

La disequazione $-x^2 + 3x - 2 > 0$ è soddisfatta per ogni $x \in]1, 2[$.

Esempi

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni della seguente disequazione $-x^2 + 9x - 18 \leqslant 0$.

Svolgimento

Consideriamo l'equazione associata $-x^2 + 9x - 18 = 0$ che equivale a $x^2 - 9x + 18 = 0$

$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 81 - 72 = 9 > 0$. L'equazione associata ammette due soluzioni reali e distinte

$$x_1 = \frac{9-3}{2} = 3, x_2 = \frac{9+3}{2} = 6.$$

Esempi

Svolgimento

$a = -1 < 0$, $\Delta = 9 > 0$

La disequazione $-x^2 + 9x - 18 \leqslant 0$ è soddisfatta per ogni $x \in (-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$.

Esempio

Esercizio

Determinare i valori di k in $\mathbb{R}$ tali per cui la disequazione

$$5x^2 + 5kx + 1 \geqslant 0$$

risulta essere soddisfatta per ogni x in $\mathbb{R}$.

Osservazione

Osserviamo che $a = 5 > 0$.
Ricordiamo che se $a > 0$, allora l'equazione $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ risulta essere soddisfatta per ogni x in $\mathbb{R}$ se e solo se $\Delta \leqslant 0$.

Esempio

Svolgimento

- Calcolando il Δ si ha $\Delta = 25k^2 - 20 = 5(5k^2 - 4)$.
- La disequazione $\Delta \leqslant 0$ equivale a $5k^2 - 4 \leqslant 0$ che risulta essere soddisfatta per ogni k in $\left[-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right]$.
- Pertanto la disequazione $5x^2 + 5kx + 1 \geqslant 0$ risulta essere soddisfatta per ogni x in $\mathbb{R}$ se e solo se $k \in \left[-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right]$.

Esempio

Esercizio

Determinare i valori di k in $\mathbb{R}$ tali per cui l'equazione

$$3x^2 - 7x + k = 0$$

ammette un'unica soluzione.

Svolgimento

Ricordiamo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ammette un'unica soluzione se e solo se $\Delta = 0$.
Quindi, $3x^2 - 7x + k = 0$ ammette un'unica soluzione se e solo se $\Delta = 49 - 12k = 0$, ovvero se e solo se $k = \dfrac{49}{12}$.

Esempio

Esercizio

Determinare i valori di k in $\mathbb{R}$ tali per cui l'equazione

$$kx^2 - 5x - 3 = 0$$

ammette due soluzioni reali distinte.

Svolgimento

Ricordiamo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ammette due soluzioni reali e distinte se e solo se $\Delta > 0$.
Quindi, $kx^2 - 5x - 3 = 0$ ammette due soluzioni reali e distinte se e solo se $\Delta = 25 + 12k > 0$, ovvero se e solo se $k > -\dfrac{25}{12}$.

Esercizio

Determinare i valori di k in $\mathbb{R}$ tali per cui l'equazione

$$kx^2 - 7x + 6 = 0$$

non ammette soluzioni.

Svolgimento

Ricordiamo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ non ammette soluzioni se e solo se $\Delta < 0$.
Quindi, $kx^2 - 7x + 6 = 0$ non ammette soluzioni se e solo se $\Delta = 49 - 24k < 0$, ovvero se e solo se $k > \dfrac{49}{24}$.

Esempio

Esercizio

Determinare i valori di k in $\mathbb{R}$ tali per cui la disequazione

$$-4x^2 + kx - 1 > 0$$

non ammette soluzioni.

Svolgimento

- Osserviamo che $a = -4 < 0$.
- Ricordiamo che se $a < 0$, allora l'equazione $ax^2 + bx + c > 0$ non ammette soluzioni se e solo se $\Delta \leqslant 0$.

Esempio

Svolgimento

- Calcolando il Δ si ha $\Delta = k^2 - 16$.
- La disequazione $\Delta = k^2 - 16 \leqslant 0$ risulta essere soddisfatta per ogni k in $[-4, 4]$.
- La disequazione $-4x^2 + kx - 1 > 0$ non ammette soluzioni per ogni k in $[-4, 4]$.

Disequazioni razionali o fratte

Si dice disequazione razionale (o fratta) una disuguaglianza fra espressioni matematiche nelle quali compare almeno una incognita a denominatore.

Metodo risolutivo

Indichiamo con $N(x)$ il numeratore e con $D(x)$ il denominatore.

- è necessario porre $D(x) \neq 0$, overo escludere tutti i valori di x che annullano il denominatore;
- studiare i segni di numeratore e denominatore.

Regole da seguire

- Una frazione ha significato se e solo se il denominatore è diverso da 0.
- Regole dei segni
  - Una frazione è nulla se e solo se è nullo il numeratore.
  - Una frazione è positiva se e solo se numeratore e denominatore sono di segno concorde (entrambi positivi o entrambi negativi).
  - Una frazione è negativa se e solo se numeratore e denominatore sono di segno discorde.

Esempi

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni della seguente disequazione

$$\frac{5x+1}{3x^2-4x} > 0.$$

Svolgimento

Condizioni da studiare

- $D(x) = 3x^2 - 4x \neq 0$
- $N(x) = 5x + 1$ e $D(x) = 3x^2 - 4x$ di segno concorde.

Esempi

Svolgimento

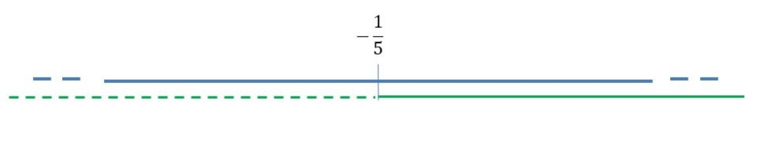
Affinché la frazione abbia significato il denominatore deve essere diverso da 0.

$D(x) = 3x^2 - 4x \neq 0 \Rightarrow x(3x-4) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, x \neq \frac{4}{3}$.

Svolgimento

Studio del segno di $N(x)$

$5x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$



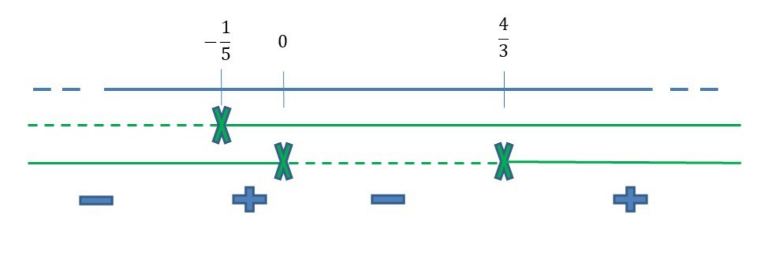
Svolgimento

Studio del segno di $D(x)$

$D(x) = 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{4}{3}$.

Svolgimento

Regola dei segni



La disequazione $\dfrac{5x+1}{3x^2-4x} > 0$ è soddisfatta per ogni $x \in \left]-\frac{1}{5}, 0\right[\cup \left]\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

Esempi

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni della seguente disequazione

$$\frac{x^2 + 5x - 6}{-x + 3} \leqslant 0.$$

Svolgimento

Condizioni da studiare

- $D(x) = -x + 3 \neq 0$
- $N(x) = x^2 + 5x - 6$ e $D(x) = -x + 3$ di segno discorde.

Svolgimento

Affinché la frazione abbia significato il denominatore deve essere diverso da 0.

$D(x) = -x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3.$

Esempi

Svolgimento

Studio del segno di $N(x)$

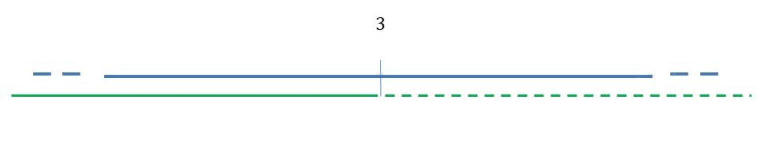
$x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -6, x_2 = 1$

Esempi

Svolgimento

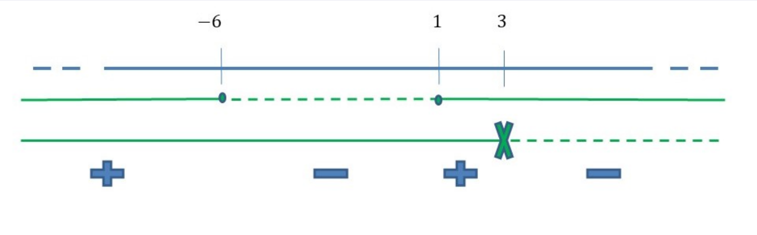
Studio del segno di $D(x)$

$D(x) = -x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$



Svolgimento

Regola dei segni



La disequazione $\dfrac{x^2+5x-6}{-x+3} \leqslant 0$ è soddisfatta per ogni $x \in [-6, 1] \cup]3, +\infty)$.

Esempi

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni della seguente disequazione

$$\frac{x-5}{x^2+3x+5} > 0.$$

Svolgimento

Condizioni da studiare

- $D(x) = x^2 + 3x + 5 \neq 0$
- $N(x) = x - 5$ e $D(x) = x^2 + 3x + 5$ di segno concorde.

Svolgimento

Affinché la frazione abbia significato il denominatore deve essere diverso da 0.

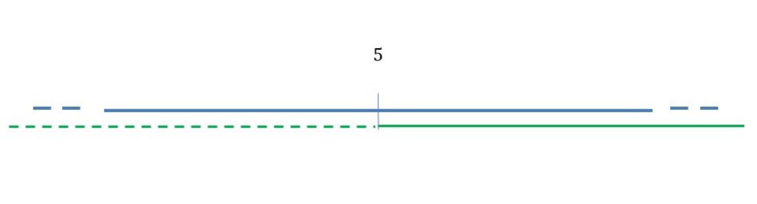
$D(x) = x^2 + 3x + 5 \neq 0$. $\Delta = -11 < 0$ l'equazione $x^2 + 3x + 5 = 0$ non ammette soluzioni, quindi non esistono valori di x per cui il denominatore si annulla.

Esempi

Svolgimento

Studio del segno di $N(x)$

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$



Esempi

Svolgimento

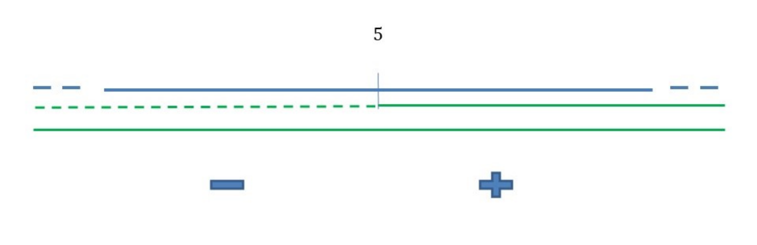
Studio del segno di $D(x)$

$D(x) = x^2 + 3x + 5 \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
$a = 1 > 0, \Delta = -11 < 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 5 > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Esempi

Svolgimento

Regola dei segni



La disequazione $\dfrac{x-5}{x^2+3x+5} > 0$ è soddisfatta per ogni $x \in]5, +\infty)$.

Esempi

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni della seguente disequazione

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 11x + 24} \geqslant 0.$$

Svolgimento

Condizioni da studiare

- $D(x) = x^2 - 11x + 24 \neq 0$
- $N(x) = x^2 - 7x + 12$ e $D(x) = x^2 - 11x + 24$ di segno concorde.

Svolgimento

Affinché la frazione abbia significato il denominatore deve essere diverso da 0.

$D(x) = x^2 - 11x + 24 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3, x \neq 8$

Esempi

Svolgimento

Studio del segno di $N(x)$

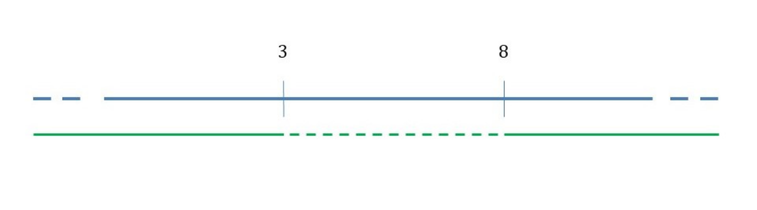
$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3, x = 4$$

Esempi

Svolgimento

Studio del segno di $D(x)$

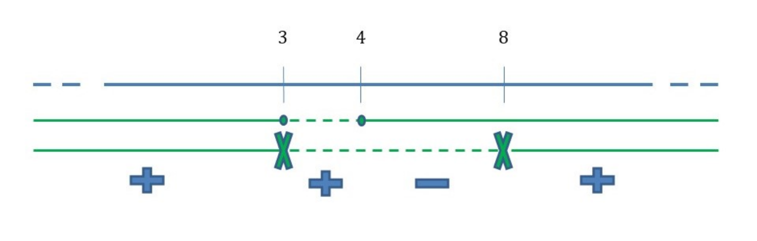
$$D(x) = x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow x = 3, x = 8$$



Esempi

Svolgimento

Regola dei segni



La disequazione $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 11x + 24} \geqslant 0$ è soddisfatta per ogni $x \in (-\infty, 3[\cup]3, 4] \cup]8, +\infty)$.

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni della seguente disequazione

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 5x + 6} \leqslant 0.$$

Svolgimento

Condizioni da studiare

- $D(x) = x^2 - 5x + 6 \neq 0$
- $N(x) = x^2 - 2x - 15$ e $D(x) = x^2 - 5x + 6$ di segno discorde.

Esempi

Svolgimento

Affinché la frazione abbia significato il denominatore deve essere diverso da 0.

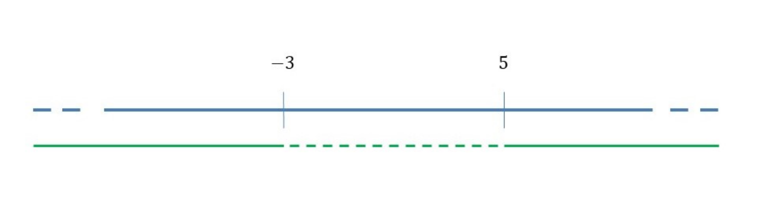
$D(x) = x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2, x \neq 3$

Esempi

Svolgimento

Studio del segno di $N(x)$

$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = -3, x = 5$



Svolgimento

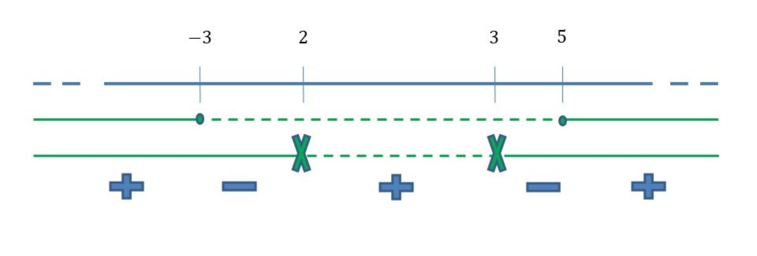
Studio del segno di $D(x)$

$D(x) = x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3$

Esempi

Svolgimento

Regola dei segni



La disequazione $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 5x + 6} \leqslant 0$ è soddisfatta per ogni $x \in [-3, 2[\cup]3, 5]$.

Sistemi di disequazioni

- Si dice sistema di disequazioni in una variabile un insieme composto da due o più disequazioni in una stessa variabile.
- Risolvere un sistema di disequazioni significa determinare, se esistono, quei valori della variabile che rendono contemporaneamente soddisfatte le disequazioni che compongono il sistema.
- Si definiscono soluzioni del sistema tutte e sole le soluzioni che soddisfano ogni disequazione del sistema.

Sistemi di disequazioni

Determinazione delle soluzioni

La risoluzione di un sistema di disequazioni si effettua

- risolvendo, indipendentemente l'una dalle altre, le singole disequazioni;
- intersecando, successivamente, gli insiemi che ne costituiscono le soluzioni.

Esempi

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 \geqslant 0 \\ \\ x^2 - 11x + 24 \geqslant 0 \end{cases}$$

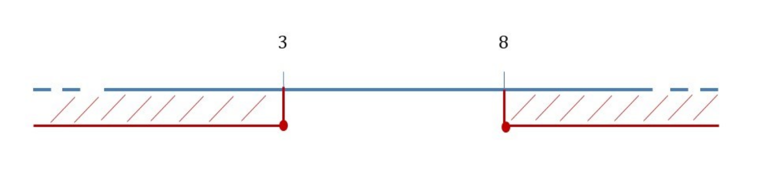
Svolgimento

Determinazione delle eventuali soluzioni della prima disequazione $x^2 - 7x + 12 \geqslant 0$.
L'equazione associata $x^2 - 7x + 12 = 0$ ammette due soluzioni reali e distinte $x = 3, x = 4$.

Esempi

Svolgimento

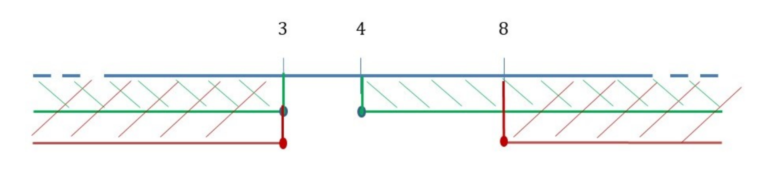
Determinazione delle eventuali soluzioni della seconda disequazione $x^2 - 11x + 24 \geqslant 0$.
L'equazione associata $x^2 - 11x + 24 = 0$ ammette due soluzioni reali e distinte $x = 3, x = 8$.



Esempi

Svolgimento

Intersezione degli insiemi delle soluzioni



Soluzione

Il sistema è verificato per ogni $x \in (-\infty, 3] \cup [8, +\infty)$

Esempi

Esercizio

Determinare le eventuali soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geqslant 0 \\ \\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 0 \end{cases}$$

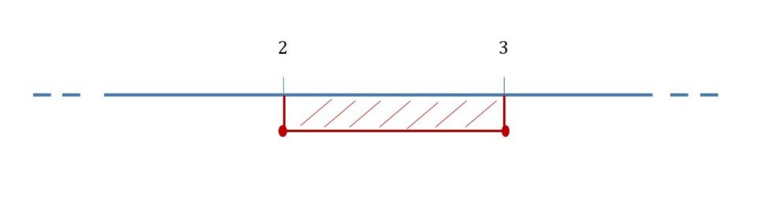
Svolgimento

Determinazione delle eventuali soluzioni della prima disequazione $x^2 - 2x - 15 \geqslant 0$.
L'equazione associata $x^2 - 2x - 15 = 0$ ammette due soluzioni reali e distinte $x = -3, x = 5$.

Esempi

Svolgimento

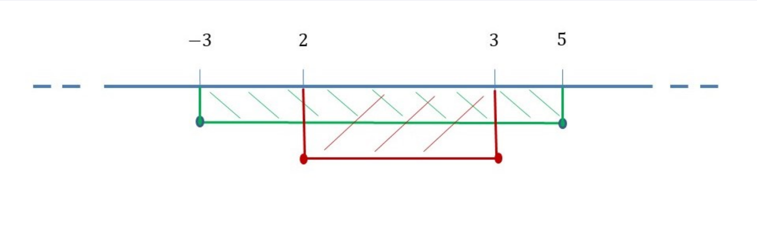
Determinazione delle eventuali soluzioni della seconda disequazione $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$.
L'equazione associata $x^2 - 5x + 6 = 0$ ammette due soluzioni reali e distinte $x = 2, x = 3$.



Esempi

Svolgimento

Intersezione degli insiemi delle soluzioni



Soluzione

Il sistema è verificato per ogni $x \in [2, 3]$