

# MATEMATICA FINANZIARIA

Zelda Marino

## Operazioni eque

## “Operazione finanziaria a scadenario fisso”

Una **operazione finanziaria a scadenario fisso** é un arbitrario insieme di importi monetari  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , caratterizzati dalle rispettive date di esigibilità  $t_1, t_2, \dots, t_m$ , con la convenzione  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ .

**Operazione certa** alla data di valutazione  $t$  quando tutti gli importi e le date di esigibilità sono note in  $t$ .

Vettore dei pagamenti:

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\},$$

vettore delle scadenze:

$$t = \{t_1, t_2, \dots, t_m\},$$

L'operazione finanziaria è costituita dal flusso di importi  $x$  sullo scadenario  $t$ ,  $x/t$ .

## Operazioni coincidenti

Sia  $x/t$ , un'operazione finanziaria; si consideri l'operazione ottenuta estendendo lo scadenziario  $t$  e attribuendo importi di entità nulla alle date aggiuntive; sarà naturale considerare formalmente coincidenti queste due operazioni.

Assegnate due operazioni finanziarie  $x'/t'$  e  $x''/t''$ , è sempre possibile ridefinirle su uno stesso scadenziario  $t$ , scegliendo

$$t = t' \cup t''$$

e completando i vettori  $x'$  e  $x''$  con pagamenti nulli sullo scadenziario unione.

# Esempio

Siano date  $x'/t'$  e  $x''/t''$  con:

$$x' = \{-10, 1, 10, -2\} \quad t' = \{0, 0.5, 1, 1.5\}$$

$$x'' = \{5, 5, 5\} \quad t'' = \{1, 2, 3\}$$

Lo scadenziario unione è:

$$t' \cup t'' = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3\}$$

L'operazione:

$$\{-10, 1, 10, -2, 0, 0\} / \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3\}$$

è uguale alla  $x'/t'$ ; l'operazione:

$$\{0, 0, 5, 0, 5, 5\} / \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3\}$$

coincide con la  $x''/t''$ .

## Somma di operazioni finanziarie.

Date due operazioni finanziarie  $x'/t'$  e  $x''/t''$ , si definisce **operazione finanziaria somma** l'operazione  $x/t$  ottenuta ridefinendo le due operazioni componenti sullo scadenziario unione  $t$  e sommando algebricamente i pagamenti esigibili alle stesse date.

# Esempio

$$x' = \{-10, 1, 10, -2\}, t' = \{0, 0.5, 1, 1.5\}$$

$$x'' = \{5, 5, 5\}, t'' = \{1, 2, 3\}$$

$$t' \cup t'' = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3\}$$

L'operazione finanziaria somma di  $x'/t'$  e  $x''/t''$  è:

$$\{-10, 1, 15, -2, 5, 5\} / \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3\}.$$

# Scomposizione di operazioni finanziarie.

Si consideri un generico flusso di importi:

$$z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$$

sullo scadenziario  $t$ .

Si possono distinguere gli importi  $z_k$  aventi segno positivo separatamente da quelli aventi segno negativo  $\iff$  l'operazione  $z/t$  è scomposta nella somma di un'operazione *attiva*  $x/t$  (crediti netti) e in una *passiva*  $y/t$  (debiti netti).

Si dice anche che  $x$  è il flusso degli *asset* e che  $y$  è il flusso delle *liability*; il vettore complessivo  $z$  è un vettore di *asset-liability*.

# Esempio

L'operazione finanziaria:

$$z/t = \{100, -110, 1100, -1210\}/\{1, 2, 3, 4\}$$

può essere scomposta nell'operazione attiva:

$$x/t = \{100, 0, 1100, 0\}/\{1, 2, 3, 4\}$$

e nell'operazione passiva:

$$y/t = \{0, -110, 0, -1210\}/\{1, 2, 3, 4\}.$$

Il flusso di asset-liability  $z$  è dato, per costruzione, dalla somma del flusso  $x$  degli asset e del flusso  $y$  delle liability.

# Operazioni eque

Se è:

$$W(t; x) = 0$$

l'operazione finanziaria  $x$  si dice *equa*, al tempo  $t$ , conformemente alla legge esponenziale adottata. L'equità caratterizza quindi un'operazione di scambio "in equilibrio", nella quale il valore delle somme incassate è uguale al valore delle somme pagate.

Affinchè l'operazione  $x$  sia equa è necessario che almeno uno degli importi componenti  $x_k$  abbia segno diverso dagli altri.

# Proprietà funzionali della legge esponenziale

## Proprietà invariante

Se un'operazione finanziaria è equa all'istante  $t$  secondo una assegnata legge esponenziale, lo è in qualsiasi altro istante.

## Proprietà additiva

Se due operazioni finanziarie sono eque in un medesimo istante, conformemente a una stessa legge esponenziale, anche l'operazione finanziaria somma è equa allo stesso istante, secondo la stessa legge esponenziale.

## Proprietà di uniformità nel tempo

Se un'operazione finanziaria è equa all'istante  $t$  secondo una assegnata legge esponenziale, l'operazione avente tutte le scadenze traslate di un intervallo di lunghezza  $\tau$  è equa nell'istante  $t + \tau$  conformemente alla stessa legge.

# Scomposizione di operazioni finanziarie

L'operazione finanziaria:

$$z/t = \{100, -105, 1100, -1155\}/\{1, 2, 3, 4\},$$

è equa conformemente alla legge esponenziale con tasso annuo di interesse  $i = 5\%$ . Può essere scomposta nell'operazione attiva:

$$x/t = \{100, 0, 1100, 0\}/\{1, 2, 3, 4\},$$

e nell'operazione passiva:

$$y/t = \{0, -105, 0, -1155\}/\{1, 2, 3, 4\}.$$

Sempre in base alla stessa legge esponenziale, risulta:

$$W(0; x) = 95.2381 + 950.2214 = 1045.4595,$$

e:

$$W(0; y) = -95.2381 - 950.2214 = -1045.4595.$$

# Scomposizione di operazioni finanziarie

Un'altra scomposizione significativa si ottiene separando le somme esigibili in date precedenti un certo istante  $t \geq 0$  assegnato, da quelle pagabili in date successive, esprimendo cioè il valore in  $t$  di  $x/t$  nella forma:

$$W(t; \mathbf{x}) = M(t; \mathbf{x}) + V(t; \mathbf{x}),$$

dove:

$$M(t; \mathbf{x}) := \sum_{k: t_k \leq t} x_k e^{\delta(t-t_k)},$$

definisce il *montante* dell'operazione al tempo  $t$ , e:

$$V(t; \mathbf{x}) := \sum_{k: t_k > t} x_k e^{-\delta(t_k-t)},$$

è il corrispondente *valore residuo*.

Se l'operazione  $x$  è equa (in un qualsiasi istante  $t$ ), sarà  $W(t; x) = 0$  e quindi dovrà essere, per ogni  $t$ :

$$M(t; x) = -V(t; x).$$

# Esempio

Calcolare il valore residuo del contratto

$$x/t = \{-85, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 93\} / \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$$

nell'istante  $\bar{t} = 0.75$  anni in base alla legge esponenziale individuata da  $I/C$ .

Risulta:

$$\frac{I}{C} = \frac{8}{85} = 9.41176\%$$

il tasso interno di rendimento su base annua risulta:

$$i = \left(1 + \frac{I}{C}\right)^2 - 1 = 19.70934\%$$

Il valore di un contratto finanziario in un qualsiasi istante di tempo  $\bar{t}$  con  $t_0 < \bar{t} < t_m$  può essere scomposto nella somma del montante delle poste scadute fino a  $\bar{t}$ ,  $M(\bar{t}, x)$ , e del valore del flusso residuo delle poste con scadenza dopo  $\bar{t}$ ,  $V(\bar{t}, x)$  si ha:

$$W(\bar{t}; x) = M(\bar{t}; x) + V(\bar{t}; x) = \sum_{k:t_k \leq \bar{t}} x_k m(t_k, \bar{t}) + \sum_{k:t_k > \bar{t}} x_k v(\bar{t}, t_k)$$

essendo l'operazione finanziaria equa secondo la legge esponenziale individuata da  $i$ ,  $W(\bar{t}; x) = 0$ , risulta:

$$M(\bar{t}; x) = -V(\bar{t}; x)$$

e quindi si ottiene:

$$V(0.75; x) = - \left[ -85(1+i)^{0.75} + 8(1+i)^{(0.75-0.5)} \right] = 88.91007$$

# MATEMATICA FINANZIARIA

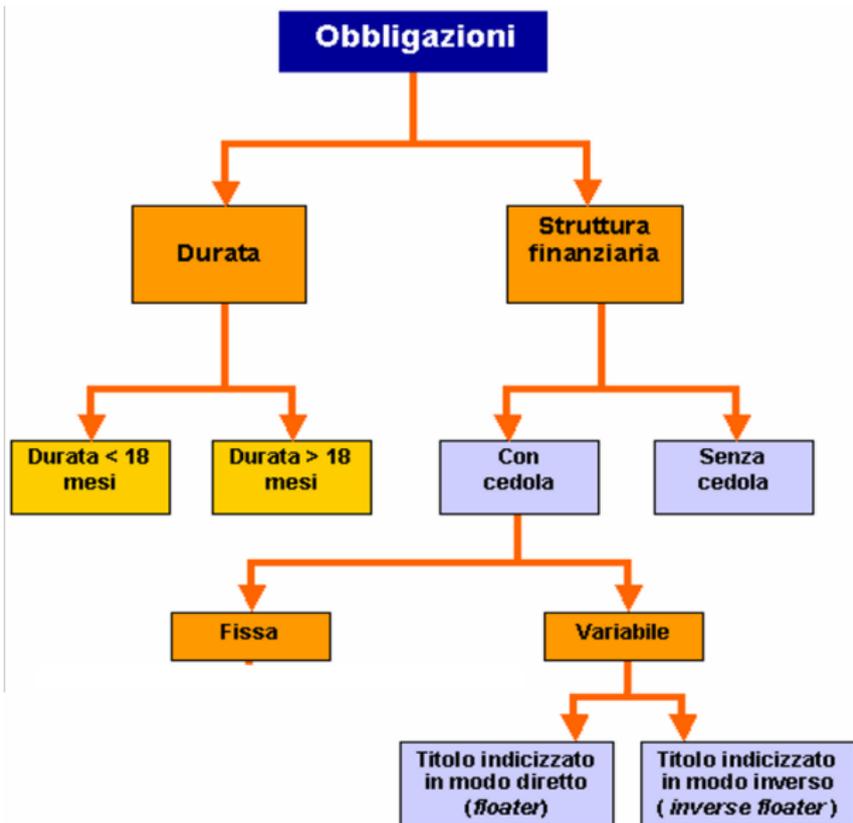
Zelda Marino

## Le obbligazioni





# La classificazione delle obbligazioni



## Definizioni

Si definiscono:

- **valore facciale, nominale, nozionale** = importo fissato  $C$  il cui pagamento é garantito da parte dell'emittente a una data futura  $s$  stabilita (data di scadenza del titolo);
- **prezzo di emissione** = prezzo  $P$  che l'investitore deve pagare nell'istante corrente  $t$  per acquisire questo diritto.

Alcuni titoli garantiscono al portatore il pagamento di un flusso di  $m$  importi detti **cedola** o **coupon**.

Le obbligazioni possono essere emesse:

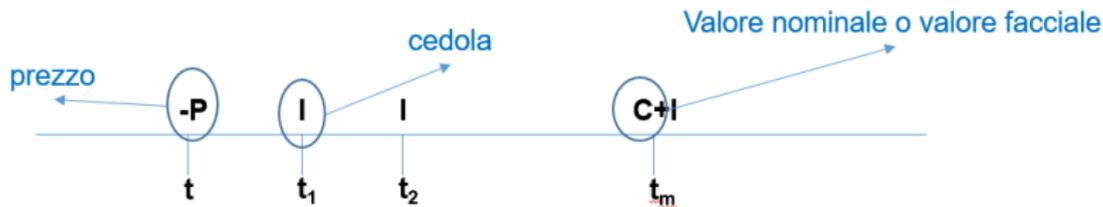
- **alla pari**,  $P = C$ ;
- **sotto la pari**,  $P < C$ ;
- **sopra la pari**,  $P > C$ .

# TCN e TCF

## TCN (Titolo a cedola nulla o ZCB)



## TCF (Titolo a cedola fissa)



$$I = j \cdot C$$

$j$  é il tasso cedolare

# Tipologie

	ZERO COUPON BOND		CEDOLA FISSA	CEDOLA VARIABILE			
<i>Titolo</i>	<u>BoT</u>	<u>CTz</u>	<u>BTp</u>	<u>CcT</u>	<u>CCTeu</u>	<u>BTPGI</u>	<u>BTP Italia</u>
<b>Anno di creazione</b>	1850	1995	1892	1977			
<b>Durata attuale</b>	2,3,6,12 mesi	2 anni	3,5,7,10,15,20,30 e 50 anni	7 anni	7 anni	5,10,15 e 30 anni	4,6 e 8 anni
<b>Tasso</b>	Fisso	Fisso	Fisso	Variabile	Variabile	Variabile	Variabile
<b>Periodicità cedola</b>	Zero coupon	Zero Coupon	Semestrale	Semestrale	Semestrale	Semestrale	Semestrale
<b>Remunerazione</b>	Scarto di emissione	Scarto di emissione	Cedole ed eventuale scarto di emissione	Cedole indicizzate ai BOT più spread ed eventuale scarto d'emissione	Cedole indicizzate Euribor 6 mesi più spread ed eventuale scarto d'emissione	Cedole indicizzate all'IAPC ed eventuale scarto d'emissione più rivalutazione del capitale a scadenza	Cedole e capitale rivalutati in base al FOI
<b>Rimborso</b>	Alla pari	Alla pari	Alla pari	Alla pari	Alla pari	In unica soluzione a scadenza	In unica soluzione a scadenza
<b>Meccanismo d'asta</b>	Asta competitiva sul rendimento	Asta marginale	Asta marginale	Asta marginale	Asta marginale	Asta marginale	Collocamento diretto sul MOT
<b>Periodicità aste</b>	Variabile	Una al mese	Due al mese	Una al mese	Una al mese	Una al mese	
<b>Corso</b>	<u>Tel</u> -quel	Tel-quel	Corso secco	Corso secco	Corso secco	Corso secco	Corso secco

## Mercato primario e secondario

### mercato primario

é il “luogo” di collocazione; operano su questo mercato gli emittenti che raccolgono fondi e si indebitano, e gli investitori che acquistano titoli.

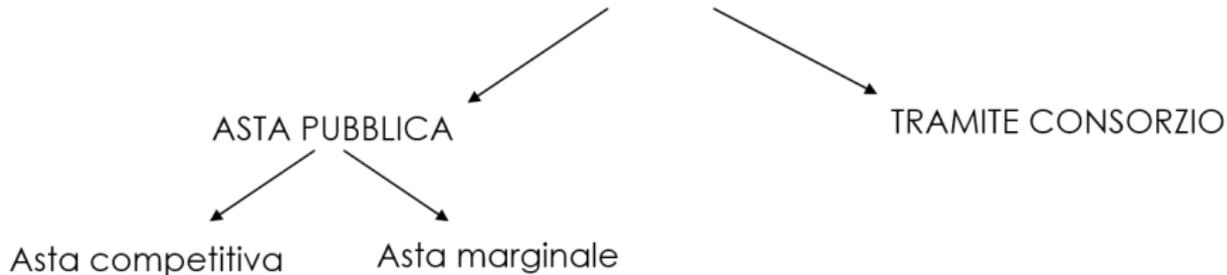
### mercato secondario

é il “luogo” di scambio; il mercato fissa i prezzi di scambio e consente al detentore del titolo di liquidare l'investimento.

# Emissione

- **dove** → sul mercato primario
- **come** → tramite collocamento

## IL COLLOCAMENTO



[http://www.dt.tesoro.it/it/debito\\_pubblico/titoli\\_di\\_stato/aste\\_titoli\\_stato.html](http://www.dt.tesoro.it/it/debito_pubblico/titoli_di_stato/aste_titoli_stato.html)

# Negoziazione

- **dove** → sul mercato secondario
- **MOT** → Mercato delle Obbligazioni e dei Titoli di Stato  
La contrattazione può avvenire solo mediante intermediari finanziari autorizzati, principalmente SIM (Società di Intermediazione Mobiliare) e Banche. Gli strumenti finanziari trattati nei mercati regolamentati sono dematerializzati
- **come** → contratti tipo → con clausole standardizzate → per quantitativi minimi (lotti o tagli minimi)

# Come Investire

## ACQUISTARE TITOLI DI STATO

Prenotare presso  
la Banca le obbligazioni  
In asta



Inoltrando la prenotazione  
Almeno un giorno prima  
dell'asta ad un  
intermediario finanziario  
abilitato da Banca d'Italia

Sul mercato regolamentato  
MOT di Borsa Italiana



Tramite intermediario



Direttamente  
se in possesso  
di un conto online  
per eseguire  
le transazioni finanziarie  
presso la propria banca.

**i titoli vengono acquistati in forma dematerializzata**

**importo minimo pari a 1.000 euro**

## Stipulazione/Liquidazione contratti

### giorno di stipulazione (o negoziazione):

giorno in cui il contratto viene concluso con l'abbinamento fra proposta di acquisto e proposta di vendita

### giorno di liquidazione:

giorno in cui il contratto viene eseguito con il passaggio di proprietà dei titoli oggetto della contrattazione e pagamento del relativo prezzo

giorno stipulazione + 2 gg. Borsa aperta = giorno liquidazione

#### esempio

stipulazione MARTEDÍ + 2 gg. Borsa aperta = liquidazione GIOVEDÍ

stipulazione GIOVEDÍ + 2 gg. Borsa aperta = liquidazione LUNEDÍ

## CORSI (prezzi)

corso secco: valore capitale

corso tel quel: prezzo che comprende oltre al valore capitale anche gli interessi maturati dal giorno in cui è scaduta l'ultima cedola

$$\text{corso tel quel} = \text{corso secco} + \text{interessi maturati}$$

### calcolo interessi

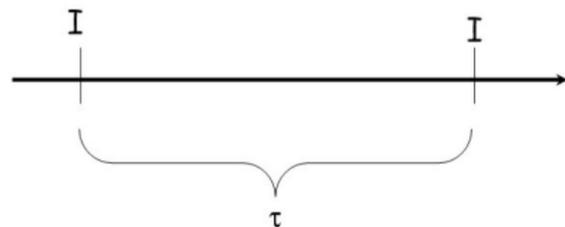
base di calcolo: valore nominale del titolo

tasso: tasso nominale annuo / numero periodi dell'anno

giorni: dal giorno di inizio maturazione cedola (escluso) al giorno di valuta dell'operazione

## Tasso cedolare e tasso nominale

Si consideri un *coupon bond* con valore facciale  $C$



$I/C =$  *tasso cedolare* del titolo.

$\sum I/C =$  *tasso nominale* (annuo) dell'obbligazione.

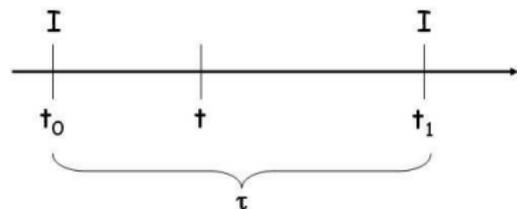
tasso nominale = tasso cedolare \* numero annuo di coupon.

### Esempio

Se il titolo ha periodicità semestrale, il tasso nominale è  $2I/C$ .

## Grandezze caratteristiche di un coupon bond

Acquisto del coupon bond trattato in  $t$  successivo alla data di emissione.



La cedola esigibile in  $t_1$ , viene chiamata **cedola in corso**.

L'intervallo  $[t_0, t_1]$  costituisce il **periodo di godimento** della cedola in corso.

Il **rateo di interesse**  $A$  al tempo  $t$  è:

$$A = I \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = I \left( 1 - \frac{t_1 - t}{\tau} \right),$$

rappresenta l'interesse maturato (*accrued interest*) tra  $t_0$  e  $t$ .

$P$  (prezzo effettivamente dovuto)  $\implies$  “corso **tel quel**”

Nel mercato obbligazionario secondario, si usa effettuare le contrattazioni in riferimento al cosiddetto “corso **secco**”  $Q$

$$Q = P - A,$$

$Q$  é un prezzo fittizio che permette di confrontare i prezzi di titoli che richiedono tempi d'attesa diversi per l'incasso della prossima cedola. Il corso secco coincide col corso tel quel all'emissione e immediatamente dopo lo stacco di ogni cedola.

## Esempio

Titolo con cedola fissa:

- $I = 3$  euro,
- $C = 100$  euro,
- periodicità trimestrale,
- prezzo tel quel  $P = 98$  euro,
- $m = 5$  pagamenti con prima cedola staccata dopo 1 mese

$$y/s = \{-98, 3, 3, 3, 3, 103\} / \{0, 1, 4, 7, 10, 13\}$$

L'obbligazione:

- è stata acquistata dopo la data di emissione;
- è quotata sotto la pari;
- la vita residua del titolo è 13 mesi;
- il tasso cedolare è  $3/100 = 3\%$ ;
- il tasso nominale è  $4 \times 3/100 = 12\%$ ;
- il rateo è dato da:  $A = 3 \times \frac{2}{3} = 2$  euro;
- il corso secco è  $Q = 98 - 2 = 96$  euro.

## Esempio

Il BTP 4.50% 1/11/1993-1/11/2023 paga, per ogni 100 euro di nominale, cedole semestrali di 2.25 euro il 1/5 e il 1/11 (convenzione EFF/EFF).  
In  $t = 1/10/2016$ , il valore del rateo è:

$$A(t) = 2.25 \times \frac{153}{184} = 1.870924,$$

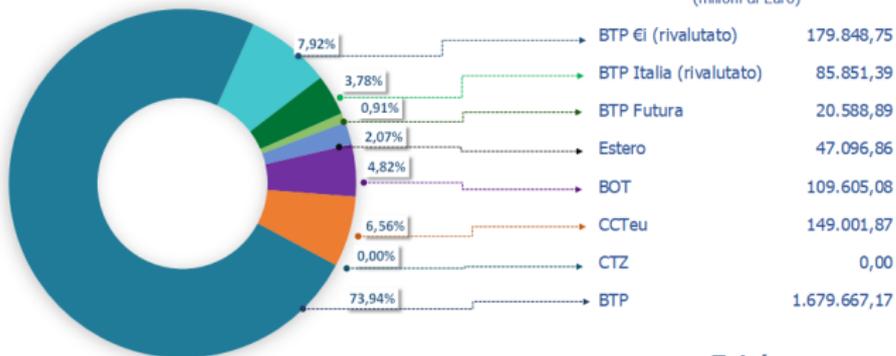
poiché:

- 153 = numero di giorni effettivi che intercorrono tra la data di inizio godimento della cedola 01/05/2016 e la data di calcolo del rateo;
- 184 = numero di giorni effettivi dell'intervallo cedolare [01/05/2016, 01/11/2016].

# Situazione al 31 luglio 2020



## Debito Pubblico COMPOSIZIONE DEI TITOLI DI STATO



### Valori in circolazione al 30 settembre 2022 (milioni di Euro)

BTP €i (rivalutato)	179.848,75
BTP Italia (rivalutato)	85.851,39
BTP Futura	20.588,89
Estero	47.096,86
BOT	109.605,08
CCTeu	149.001,87
CTZ	0,00
BTP	1.679.667,17

**Totale**  
**2.271.660,01**

**Vita media 7,12 anni**



[www.dt.mef.gov.it](http://www.dt.mef.gov.it)



Debito Pubblico

**COSTI MEDI ALL'EMISSIONE DEI TITOLI DI STATO**

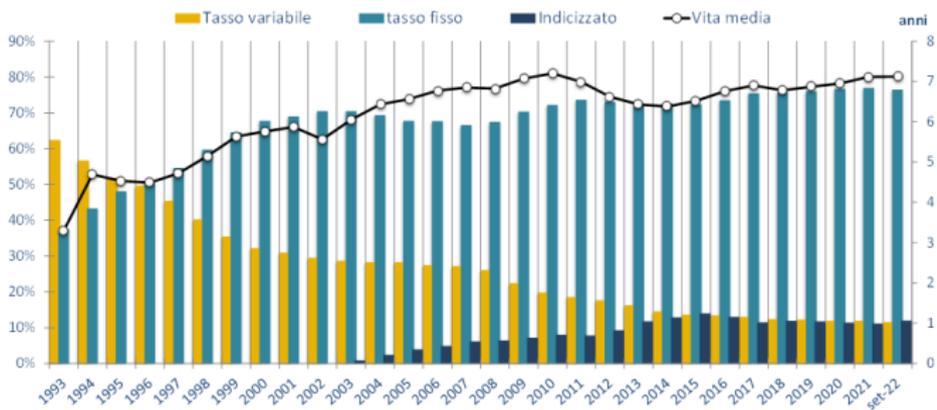
Andamento del tasso medio ponderato di interesse dei titoli di Stato calcolato sulla base dei rendimenti lordi all'emissione dei titoli emessi nel singolo anno


[www.dt.mef.gov.it](http://www.dt.mef.gov.it)

Dipartimento  
del Tesoro

Debito Pubblico

## EVOLUZIONE DELLA STRUTTURA DEL DEBITO E VITA MEDIA



www.dt.mef.gov.it

# ISIN

ISIN (International Securities Identification Number) é un codice identificativo dei valori mobiliari a livello internazionale. É utilizzato per identificare le azioni, le obbligazioni, i warrant e gli ETF.

Composizione di un codice ISIN											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Codice del Paese		NSIN									<u>Check digit</u>

**IT**  
Per l'Italia

Numero di controllo

assegnato dalla **NNA** (National Numbering Agency) di ciascun paese.  
In Italia l'agenzia assegnatrice è la Banca d'Italia.

# Esempio

Dati estratti da [www.borsaitaliana.it](http://www.borsaitaliana.it) in data 11/09/2020

Isin ▼	Descrizione ▼	Ultimo	Cedola ▼	Scadenza ▼	Acquisto	Vendita	
IT0000366655	Btp-1nv23 9%	127,82	4,50	01/11/2023	127,80	127,86	
IT0000366721	Btp-22dc23 8,5%		4,25	22/12/2023	131,00	148,00	

Tasso cedolare

$$i(0, 0.5) = \frac{0.09}{2} = 0.045 = 4.5\%$$

# Esempio

Dati estratti da [www.borsaitaliana.it](http://www.borsaitaliana.it) in data 11/09/2020

Isin ▼	Descrizione ▼	Ultimo	Cedola ▼	Scadenza ▼	Acquisto	Vendita	
IT0000366655	Btp-1nv23 9%	127,82	4,50	01/11/2023	127,80	127,86	
IT0000366721	Btp-22dc23 8,5%		4,25	22/12/2023	131,00	148,00	

Tasso cedolare

$$i(0, 0.5) = \frac{0.09}{2} = 0.045 = 4.5\%$$

Cedola

$$I = i(0, 0.5) \cdot C = 0.045 \cdot 100 = 4.5$$

# Esempio

Dati estratti da [www.borsaitaliana.it](http://www.borsaitaliana.it) in data 11/09/2020

Isin ▼	Descrizione ▼	Ultimo	Cedola ▼	Scadenza ▼	Acquisto	Vendita	
IT0000366655	Btp-1nv23 9%	127,82	4,50	01/11/2023	127,80	127,86	
IT0000366721	Btp-22dc23 8,5%		4,25	22/12/2023	131,00	148,00	

Tasso cedolare

$$i(0, 0.5) = \frac{0.09}{2} = 0.045 = 4.5\%$$

Cedola

$$I = i(0, 0.5) \cdot C = 0.045 \cdot 100 = 4.5$$

Data godimento ultima cedola 01/05/2020

# Esempio

Dati estratti da [www.borsaitaliana.it](http://www.borsaitaliana.it) in data 11/09/2020

Isin ▼	Descrizione ▼	Ultimo	Cedola ▼	Scadenza ▼	Acquisto	Vendita	
IT0000366655	Btp-1nv23 9%	127,82	4,50	01/11/2023	127,80	127,86	
IT0000366721	Btp-22dc23 8,5%		4,25	22/12/2023	131,00	148,00	

Tasso cedolare

$$i(0, 0.5) = \frac{0.09}{2} = 0.045 = 4.5\%$$

Cedola

$$I = i(0, 0.5) \cdot C = 0.045 \cdot 100 = 4.5$$

Data godimento ultima cedola 01/05/2020

Acquistato il 11/09/2020, con valuta il 15/09/2020, interessi maturati dal 01/05 fino al 15/09 → 137 giorni.

## Esempio

Il titolo é quotato al MOT ad un corso secco pari a  $P_{CS} = 127.80$ , a quanto ammonta l'esborso totale del compratore?

$$C = 100$$

## Esempio

Il titolo é quotato al MOT ad un corso secco pari a  $P_{CS} = 127.80$ , a quanto ammonta l'esborso totale del compratore?

$$C = 100$$

$$A(0, 137) = C \cdot i(0, 0.5) \frac{T}{n} = 100 \cdot 0.045 \cdot \frac{137}{184} = 3.3505$$

## Esempio

Il titolo é quotato al MOT ad un corso secco pari a  $P_{CS} = 127.80$ , a quanto ammonta l'esborso totale del compratore?

$$C = 100$$

$$A(0, 137) = C \cdot i(0, 0.5) \frac{T}{n} = 100 \cdot 0.045 \cdot \frac{137}{184} = 3.3505$$

$$P_{tq} = P_{CS} + A = 127.80 + 3.3505 = 131.1505$$

## Esempio

Sul mercato monetario americano sono offerte le seguenti possibilità di investimento a breve periodo:

- Un deposito che paga il 5% annuo [ $Act/365$ ].
- Un T-Bond che paga il 5% annuo [ $Act/360$ ].

Qual é l'investimento che offre un rendimento effettivo maggiore?

Si consideri un investimento pari a 10.000.000 per due mesi (gennaio e febbraio).

In entrambi i casi il numero di giorni è pari a 59. I rendimenti effettivi sono dati da:

$$10000000 \cdot 0.05 \cdot \frac{59}{365} = 80821.92$$

$$10000000 \cdot 0.05 \cdot \frac{59}{360} = 81944.44$$

Sebbene i due tassi siano nominalmente identici, il T-Bond ha un rendimento effettivo maggiore.

## Esempio

Il tasso LIBOR per operazioni finanziarie in euro con scadenza una settimana é quotato a 4.54138%, base  $[Act/360]$ . Si ipotizzi che sul mercato sia possibile reperire denaro per scadenze non superiori ad una settimana ad un tasso pari al 4.58%, base  $[Act/365]$ .

Qual è il tasso più conveniente?

Per effettuare un confronto é necessario esprimere i tassi in esame nella stessa base. Si supponga di trasformare il tasso LIBOR nella base  $[Act/365]$ .

$$i \cdot \frac{Act}{365} = 4.54138\% \frac{Act}{360} \rightarrow i = 4.54138\% \frac{365}{360} = 4.60445\%$$

L'operazione di finanziamento al 4.58% é sicuramente più conveniente (circa 2.5 basis point meno costosa) in quanto  $4.58\% < 4.60445\%$ .