Elementi di topologia

Definizione di intorno

Sia

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Consideriamo $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si definisce intorno I di x_0

- un intervallo aperto contenente x_0 se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- ciascun intervallo $]a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, se $x_0 = +\infty$;
- ciascun intervallo $(-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$, se $x_0 = -\infty$.

Definizione di punto di accumulazione

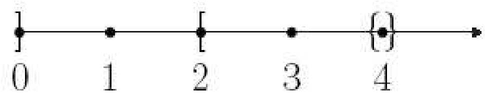
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Un valore $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice punto di accumulazione per A se ogni intorno I di x_0 contiene almeno un punto di A distinto da x_0,

$$A \cap (I - \{x_0\}) \neq \emptyset, \quad \forall I \in I(x_0)$$

Esempio

Sia

$$A =]0,2[\cup \{4\}$$



- 1 è punto di accumulazione per A
- 4 non è punto di accumulazione per A
- 2 è punto di accumulazione per A
- $\forall x \in [0,2],\ x$ è punto di accumulazione per A

Un punto di accumulazione per un insieme A **può** appartenere ad A:

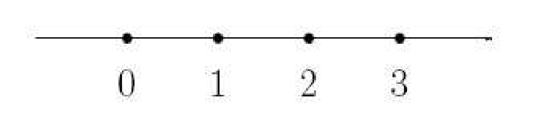
- $A = [0, 1] \Rightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \in A$
- $A =]0, 1[\Rightarrow 0$ è un punto di accumulazione per A, $0 \notin A$

Un elemento di un insieme A **può** essere punto di accumulazione per A:

- $A = [0,2] \Rightarrow 1 \in A$, 1 è di accumulazione per A
- $A = \{1\} \cup [2,3] \Rightarrow 1 \in A$, 1 non è di accumulazione per A

Un insieme **può non avere** punti di accumulazione.

Esempio: l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ non ha punti di accumulazione.



Punti isolati

Definizione di punto isolato

Un punto $x \in A$ che non sia punto di accumulazione per A, è detto isolato.

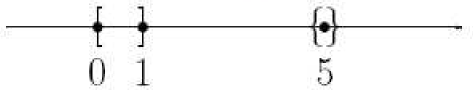
In questo caso

$$\exists I \in I(x_0) : I \cap A = \{x_0\}$$

Esempio

Sia

$$A = [0, 1] \cup \{5\}$$



5 è un punto isolato per A.