Funzioni

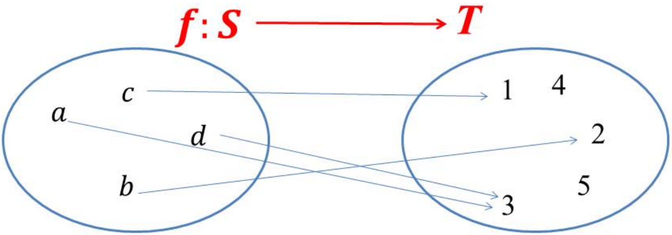
Definizione

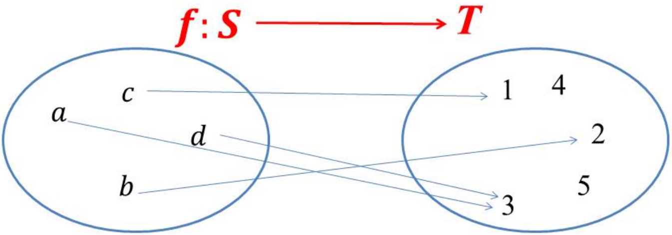
Siano S e T due insiemi.
con il simbolo $f : S \to T$ (si legge f funzione di S in T) si intende che è stata assegnata una legge che associa ad **ogni** elemento di S **uno e un solo elemento di** T

S viene detto dominio di f;
T viene detto codominio di f.

Dati una funzione $f : S \to T$ e un punto x in S ($x \in S$), si definisce immagine di x mediante f, e si indica con $f(x)$, quell'unico elemento di T a cui x corrisponde.

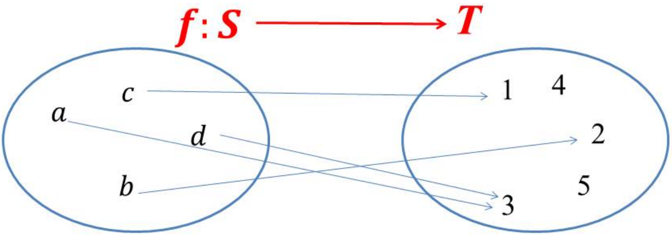
Esempi



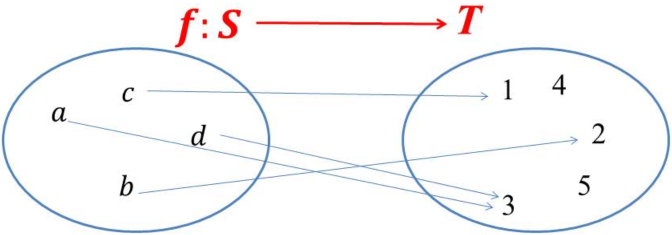


$$a \in S \rightarrow f(a) = 3 \in T$$

Esempi

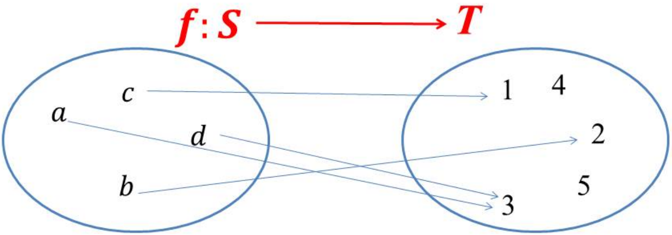


$$a \in S \to f(a) = 3 \in T$$
$$b \in S \to f(b) = 2 \in T$$



$$a \in S \to f(a) = 3 \in T$$
$$b \in S \to f(b) = 2 \in T$$
$$c \in S \to f(c) = 1 \in T$$

Esempi



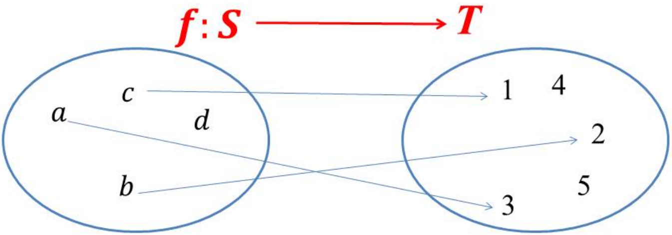
$$a \in S \rightarrow f(a) = 3 \in T$$
$$b \in S \rightarrow f(b) = 2 \in T$$
$$c \in S \rightarrow f(c) = 1 \in T$$
$$d \in S \rightarrow f(d) = 3 \in T$$

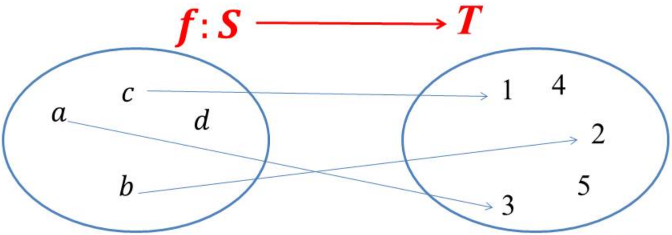
Esempi

Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita mediante la legge $f(n) = n + 1$

- $1 \in \mathbb{N} \to f(1) = 2 \in \mathbb{N}$,
- $2 \in \mathbb{N} \to f(2) = 3 \in \mathbb{N}$,
- $3 \in \mathbb{N} \to f(3) = 4 \in \mathbb{N}$,
- $\ldots$

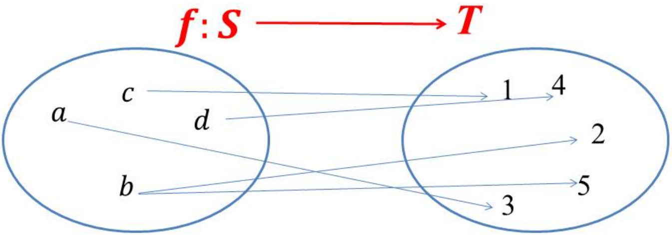
Esempi



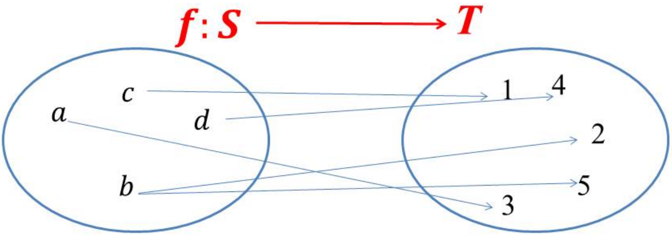


f **non** è una funzione, in quanto a d
non è associato alcun elemento di T

Esempi



Esempi



f **non** è una funzione, in quanto a b vengono associati due elementi di T

Esempi

Il concetto di funzione, nella sua accezione più generale, non appartiene al domino della matematica ma a quello più ampio della logica.

Sia S l'insieme degli individui. Sia x un elemento di S. Consideriamo

- $P(x) =$ padre di x;
- $M(x) =$ madre di x;
- $C(x) =$ coniuge di x;
- $S(x) =$ successivo di x (ad es. vicino di destra di x, se gli individui si immaginano seduti intorno ad un tavolo);
- $N(x) =$ numero di telefono di x.

Simbologia

Con la scrittura

$$y = f(x)$$

esprimiamo il concetto che y dipende da x;

in particolare, y varia con x.

ovvero y è una variabile dipendente, che varia in funzione della variabile indipendente x.

f rappresenta l'operazione (l'atto della mente) attraverso la quale si passa da x a y;

f è l'operatore che trasporta x in y.

Esempi

- un punto P viene trasformato nel suo simmetrico P' rispetto all'origine; (trasformazione)
- un punto P della superficie terrestre viene rappresentato da un punto P' su una carta geografica; (rappresentazione)
- un individuo x viene sostituito con il suo successivo $S(x)$; (sostituzione)
- un individuo x viene messo in relazione con il padre $P(X)$, la madre $M(x)$, e così via. (corrispondenza)

Esempi in più variabili

Siano
$S = \{$ Titoli quotati alla Borsa di Milano (Piazza Affari)$\}$;
$T = \{$ Istanti di tempo (espressi in anno.mese.giorno.ora.minuti.secondi)$\}$.

Assegnati

1. l'elemento x = titolo FIAT appartenente a S;
2. l'elemento $t = 2008.10.1.9.00.00$ appartenente a T;

consideriamo la funzione che trasporta la coppia (x , t) in $z = f(x,t)$= valore del *titolo FIAT* alle ore 9.00.00 del giorno 1.10.2008.

In generale $z = f(x,t)$ è il valore del titolo x quotato in Piazza Affari all'istante t.
f **è una funzione di due variabili**.

Esempi in più variabili

Se fissiamo il titolo quotato $x = \textit{titolo FIAT}$ e facciamo variare l'istante di tempo

- $f(\textit{FIAT}, 2008.10.1.9.00.00) = 21,16$,
- $f(\textit{FIAT}, 2008.10.1.9.00.01) = 21,18$,
- $f(\textit{FIAT}, 2008.10.1.9.00.02) = 21,17$,
- $\cdots$,
- $f(\textit{FIAT}, t) = \textit{valore del titolo FIAT al tempo } t$

possiamo costruire la **serie storica del titolo**.

Se fissiamo l'istante di tempo $t = 2008.10.1.9.00.00$ e facciamo variare il titolo

- $f(FIAT, 2008.10.1.9.00.00) = 21,16$,
- $f(ENI, 2008.10.1.9.00.00) = 26,17$,
- $f(ENEL, 2008.10.1.9.00.00) = 7,97$,

possiamo confrontare i valori dei titoli.

Esempi in più variabili

Siano

- $A = \{\text{Tutte le Borse}\}$,
- $S = \{\text{Titoli quotati in ogni elemento di } A\}$,
- $T = \{\text{Istanti di tempo passato ad oggi}\}$.

Assegnati gli elementi

- $x =$ Borsa di Milano appartenente ad A,
- $y =$ titolo FIAT appartenente a S,
- $t = 2008.10.1.9.00.00$ appartenente a T,

Esempi in più variabili

con $z = f(x,yt)$ si intende il valore del titolo FIAT alla Borsa di Milano alle ore 9.00.00 del giorno 1.10.2008.

In generale $z = f(x,y,t)$ è il valore del titolo y quotato alla Borsa x nell'istante t.
f **è una funzione di tre variabili**.

Esempi in più variabili

Se fissiamo il titolo quotato $x = \mathit{titolo\ FIAT}$ e facciamo variare l'istante di tempo

- $f(\mathit{Piazza\ Affari}, \mathit{FIAT}, 2008.10.1.9.00.00) = 21,16$,
- $f(\mathit{Piazza\ Affari}, \mathit{FIAT}, 2008.10.1.9.00.01) = 21,18$,
  $f(\mathit{Piazza\ Affari}, \mathit{FIAT}, 2008.10.1.9.00.02) = 21,16$,
- $\cdots,$
- $f(\mathit{Piazza\ Affari}, \mathit{FIAT}, t) =$valore del titolo FIAT al tempo t,

possiamo costruire la **serie storica del titolo**.

Esempi in più variabili

Se fissiamo l'istante di tempo $t = 2008.10.1.9.00.00$, la Borsa x e facciamo variare il titolo

- $f(\textit{Piazza Affari}, \textit{FIAT}, 2008.10.1.9.00.00) = 21,16$,
- $f(\textit{Piazza Affari}, \textit{ENI}, 2008.10.1.9.00.00) = 26,17$,
- $f(\textit{Piazza Affari}, \textit{ENEL}, 2008.10.1.9.00.00) = 7,97$,

possiamo confrontare i valori dei titoli.

Esempi in più variabili

Se fissiamo l'istante di tempo $t = 2008.10.1.9.00.00$, il titolo y= FIAT e facciamo variare la borsa

- f(*Piazza Affari*,*FIAT*,2008.10.1.9.00.00) $= 21,16$,
- f(*Berlino*,*FIAT*,2008.10.1.9.00.00) $= 26,17$,
- f(*Shanghai*,*FIAT*,2008.10.1.9.00.00) $= 7,97$,

possiamo costruire la **cross-section** del titolo.

Immagine e controimmagine

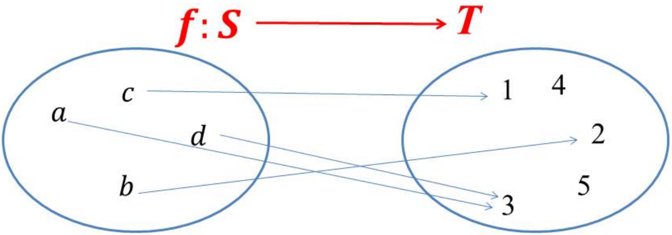
Immagine

Sia $X \subseteq S$, si indica con $f(X)$ il sottoinsieme di T formato dagli elementi di T che sono immagini degli elementi di X;
$f(X)$ viene detta *immagine* di X, $f(X) \subseteq T$;
$f(S)$ ovvero l'immagine di S viene anche detta *immagine di f*.

Controimmagine

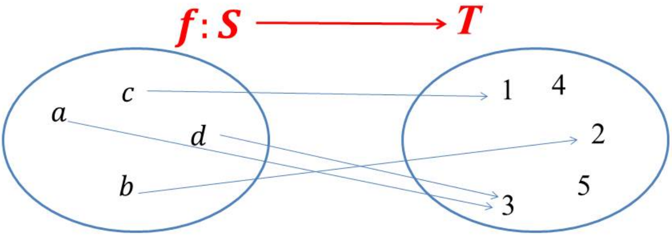
Sia $Y \subseteq T$, si indica con $f^{-1}(Y)$ il sottoinsieme di S formato dagli elementi di S le cui immagini appartengono a Y;
$f^{-1}(Y)$ viene detta *controimmagine* di Y; $f^{-1}(Y) \subseteq S$.

Esempio



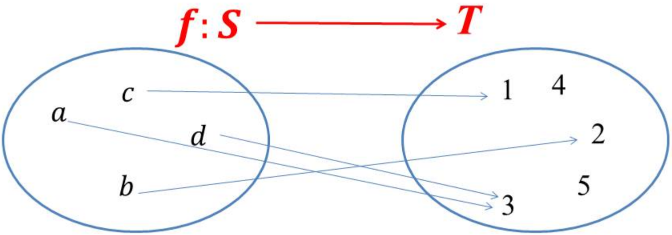
$$f(\{a\}) = \{3\}$$

Esempio



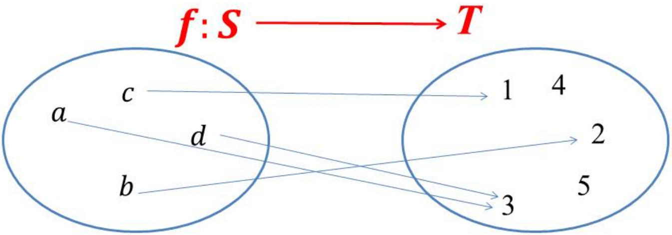
$$f(\{a\}) = \{3\}$$
$$f(\{a, b\}) = \{2,3\}$$

Esempio



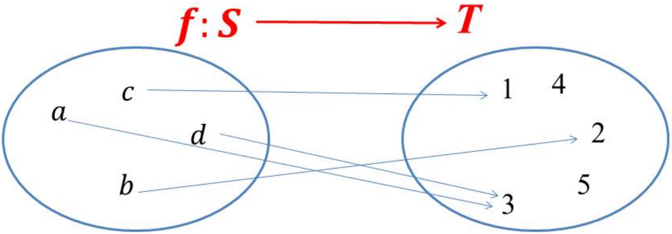
$$f(\{a\}) = \{3\}$$
$$f(\{a, b\}) = \{2,3\}$$
$$f^{-1}(\{1\}) = \{c\}$$

Esempio



$$f(\{a\}) = \{3\}$$
$$f(\{a, b\}) = \{2,3\}$$
$$f^{-1}(\{1\}) = \{c\}$$
$$f^{-1}(\{3\}) = \{a, d\}$$

Esempio



$$f(\{a\}) = \{3\}$$
$$f(\{a, b\}) = \{2,3\}$$
$$f^{-1}(\{1\}) = \{c\}$$
$$f^{-1}(\{3\}) = \{a, d\}$$
$$f^{-1}(\{4\}) = \emptyset$$

OSSERVAZIONE

Siano S e T due insiemi e sia $f : S \to T$.
La definizione di funzione tra insiemi impone che **ad ogni elemento del dominio sia associato uno e un solo del codominio**.
Nulla vieta che un elemento del codominio sia

- associato a diversi elementi del dominio;
- non sia associato a nessun elemento del dominio stesso.

$$\forall y \in T \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f^{-1}(\{y\}) = \emptyset; \\ f^{-1}(\{y\}) = \{a\} \subseteq S; \\ f^{-1}(\{y\}) = \{a, b, \dots\} \subseteq S. \end{cases}$$

Suriettiva

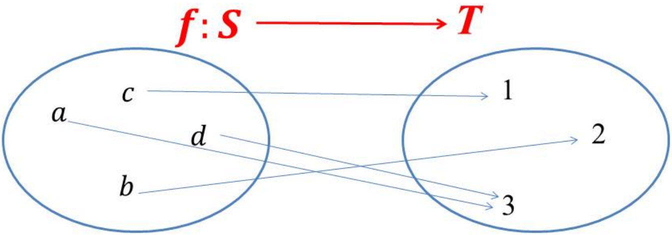
Una funzione $f : S \to T$ si dice
suriettiva o *su* T
se l'immagine di f coincide con il codominio.

ovvero

ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio.

$$\forall y \in T \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f^{-1}(\{y\}) = \{a\} \subseteq S; \\ f^{-1}(\{y\}) = \{a, b, ...\} \subseteq S. \end{cases}$$

Esempio



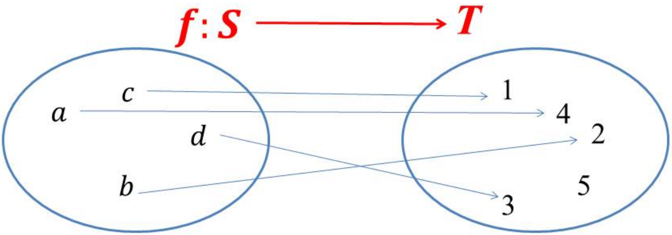
Una funzione $f : S \to T$ si dice
iniettiva
se ad elementi distinti del dominio corrispondono elementi distinti del codominio.

ovvero

ogni elemento del codominio è immagine di al più un elemento del dominio.

$$\forall y \in T \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f^{-1}(\{y\}) = \emptyset; \\ f^{-1}(\{y\}) = \{a\} \subseteq S. \end{cases}$$

Esempio



Biunivoca

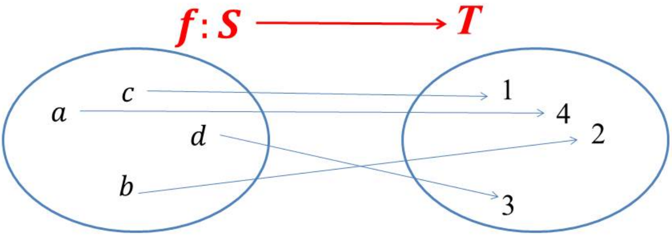
Una funzione $f : S \to T$ si dice
biunivoca o *biettiva*
se è contemporaneamente suriettiva e iniettiva.

ovvero

ogni elemento del codominio è immagine di un solo elemento del dominio.

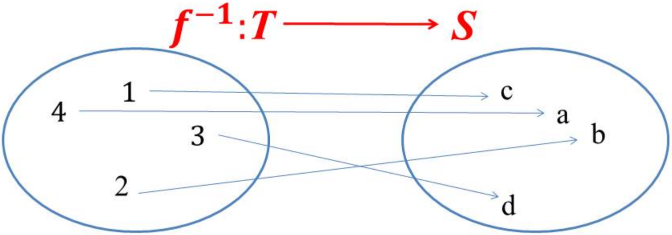
$$\forall y \in T \Rightarrow f^{-1}(\{y\}) = \{a\} \subseteq S.$$

Esempio



Una funzione $f : S \to T$ biunivoca
è *invertibile*
se definisce *funzione inversa di f* e si indica con f^{-1} la funzione che ad ogni elemento y di T associa l'unico elemento di S di cui y è immagine.

Esempio



Esempio

Supponiamo di assegnare 100 posti in aereo; siano

- x = numero del biglietto;
- $y = f(x)$= numero del posto assegnato al biglietto x.

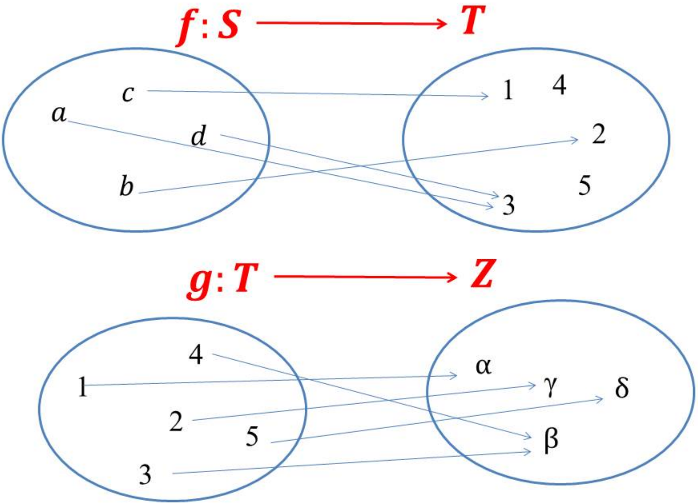
Consideriamo i seguenti casi

1. 50 biglietti emessi, collocati su 50 posti diversi f iniettiva ma non suriettiva sui 100 posti (f è suriettiva sui 50 collocati);
2. 100 biglietti emessi, collocati su 100 posti diversi (f è iniettiva e suriettiva, quindi biunivoca);
3. 150 biglietti emessi, collocati su 100 posti (situazione di OVERBOOKING) f suriettiva ma non iniettiva.

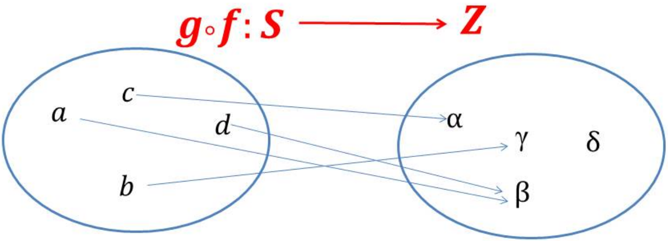
Composta

Assegnati gli insiemi S, T e Z e le funzioni $f : S \to T$ e $g : T \to Z$
si definisce funzione composta di f e g (si indica con $g \circ f : S \to Z$ e si legge g composto f, funzione di S in Z) la funzione di S in Z che ad ogni x in S associa l'elemento $z = g(f(x)) \in Z$.

Esempio



Esempio



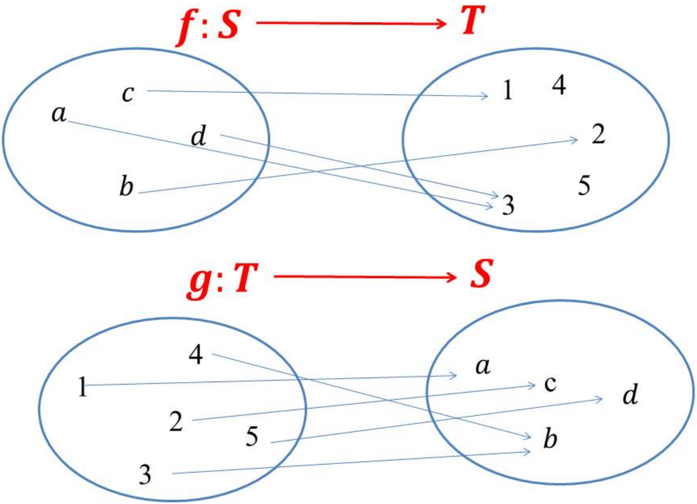
Composta

Assegnati gli insiemi S, T e Z e le funzioni $f : S \to T$ e $g : T \to Z$ mentre si può definire la funzione composta $g \circ f$, in generale, non è possibile definire la funzione composta $f \circ g$.

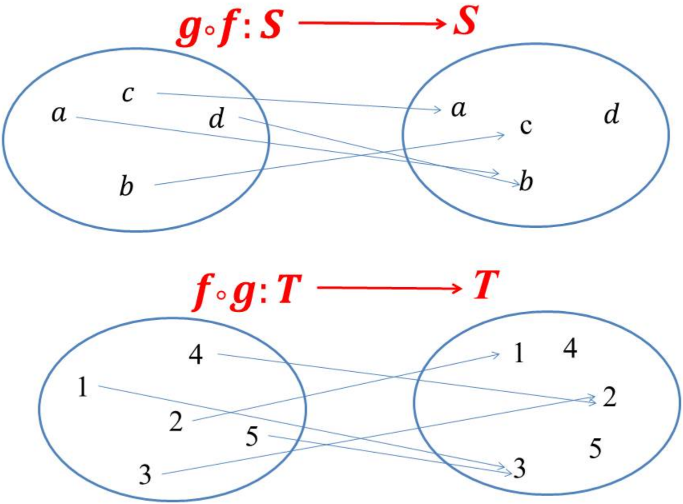
NOTA

Nei casi in cui possono essere definite $g \circ f$ e $f \circ g$, in generale, non sono la stessa funzione.

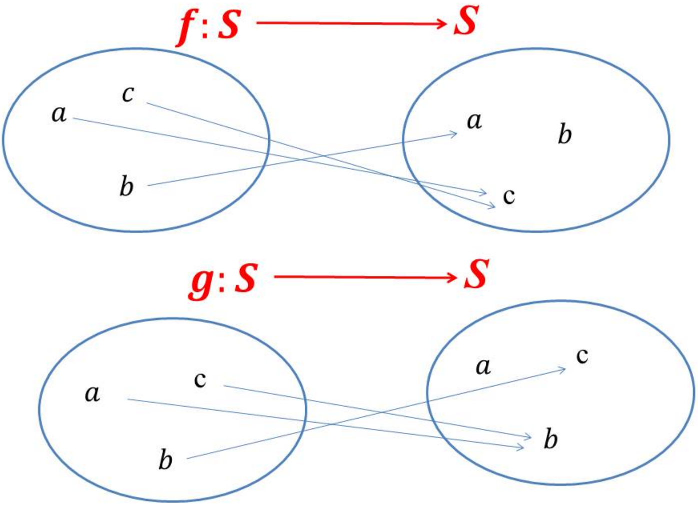
Esempio



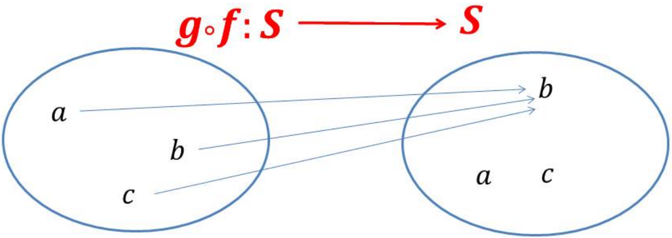
Esempio


$g \circ f : S \longrightarrow S$
a c d b
a c d b
$f \circ g : T \longrightarrow T$
4 1 2 5 3
1 4 2 5 3

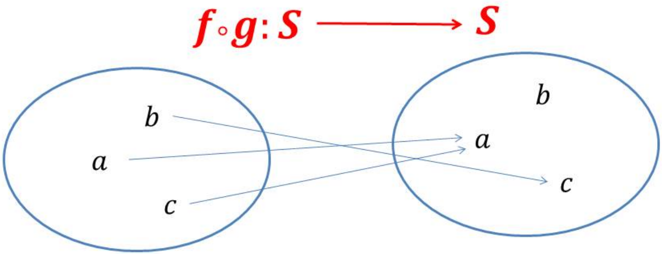
Esempio



Esempio



$g \circ f : S \longrightarrow S$
a
b
c
b
a
c



$f \circ g : S \longrightarrow S$
b
a
c
b
a
c

Esempi

Sia S l'insieme degli individui. Sia x un elemento di S. consideriamo

- $P(x) =$ padre di x;
- $M(x) =$ madre di x;
- $N(x) =$ numero di telefono di x.

Sia S l'insieme degli individui. Sia x un elemento di S. consideriamo

- $M(P(x)) =$ madre del padre di x= nonna paterna di x;
- $P(M(x)) =$ padre della madre di x= nonno materno di x;
- $N(P(x)) =$ numero di telefono del padre di x;
- $P(N(x))$ non ha significato.

Problema diretto e problema inverso

Tutti i problemi reali che vengono risolti con strumenti matematici utilizzano funzioni.
Si presentano due tipi di problemi:

- ***problema diretto***;
- ***problema inverso***.

Problema diretto e problema inverso

Problema diretto

Sia $f : S \to T$.
Assegnato $x \in S$, valutare l'immagine $f(x) \in T$

$x \in S$ valore assegnato $\to$ $f(x) \in T$ valore da determinare.

Nessun problema formale.
Solo calcoli.
Eventuali problemi computazionali.

Problema diretto e problema inverso

Problema inverso

Sia $f : S \to T$.
Assegnato $y \in T$, valutare la controimmagine $f^{-1}(y) \in S$

$y \in T$ valore assegnato $\to$ $x \in S$ tali che $y = f(x)$ valori da determinare.

Problema molto più complesso:

- esistenza di valori per la x;
- unicità;
- determinazione

Esempio

Incremento di un capitale depositato in una banca

- C_0 = capitale iniziale
- C_t = capitale al tempo t.

Detto I il tasso di interesse un possibile modello è

$$C_t = C_0 + C_0 \cdot I \cdot t = C_0(1 + I \cdot t).$$

$$f : t \in \mathbb{R}^+ \to f(t) = C_t = C_0(1 + I \cdot t),$$

con C_0 e I parametri del problema.

Esempio

Problema diretto

Valutare il capitale C_t ad un tempo assegnato t.

Problema inverso

Valutare il tempo t al quale il capitale iniziale si sarà incrementato all'assegnato valore C_t.

Esempio

Un caso particolare

$C_0 = 1000$ euro e $I = 10\%$ (annuo).
Modello

$$\begin{aligned} f : t \in \mathbb{R}^+ \to f(t) = C_t &= 1000(1 + \frac{10}{100}t) = \\ &= 1000 + 100t. \end{aligned}$$

Esempio

problema diretto

Valutare il capitale tra sei mesi ossia per $t = 0.5$

$$
\begin{aligned}
t = 0.5 \to C_t &= f(t) = f(0.5) \\
&= 1000 + 100 \cdot 0.5 = 1050.
\end{aligned}
$$

e si risolve con semplici calcoli.

Esempio

problema inverso

Valutare il tempo t nel quale il capitale varrà 1075 euro. Determinare, se esiste, il valore di t per cui

$$C_t = f(t) = 1075$$

$$1000 + 100t = 1075$$

da cui

$$t = \frac{1075 - 1000}{100} = 0.75.$$

Esempio

Il problema:

- ammette soluzione
- la soluzione è unica
- la soluzione è 0.75 anni = 9 mesi.

Esempio

La funzione f è invertibile e la sua inversa, f^{-1}, si scrive

$$f^{-1} : C_t \in \mathbb{R}^+ \to t = f^{-1}(C_t) = \frac{C_t - 1000}{100}.$$

Il problema inverso si è ridotto ad un problema diretto:

$$\begin{aligned} C_t = 1075 \to t &= f^{-1}(C_t) = \\ &= f^{-1}(1075) = \\ &= \frac{1075 - 1000}{100} = 0.75. \end{aligned}$$