LE LEGGI FINANZIARIE
o REGIMI FINANZIARI

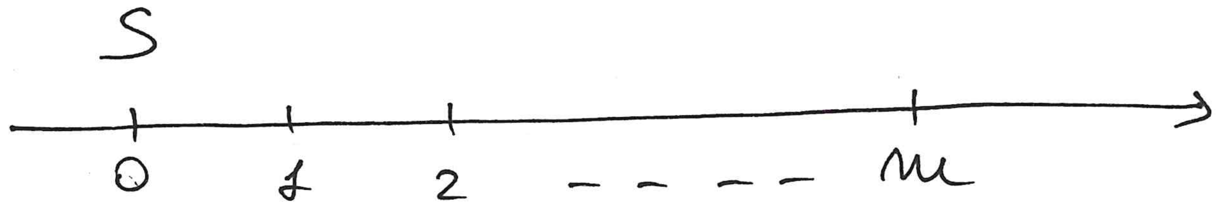
Fino ad ora nella definizione di fattori e tassi la variabile "Tempo" non è comparsa in modo esplicito

Siamo interessati a definire le grandezze fondamentali, interesse, montante, sconto, fattori, tassi, come funzioni della durata dell'operazione finanziaria

→ regime degli interessi semplici (RIS)
o legge lineare

→ regime degli interessi composti: (RIC)

Consideriamo ora un'operazione in cui un debito di importo S contratto al tempo $T=0$ possa essere rimborsato dopo uno, oppure dopo due, ---, oppure dopo n anni



LEGGE DEGLI INTERESSI SEMPLICI

per ogni anno di investimento viene pagata una maggiorazione costante $I = iS$ $\Rightarrow$ una percentuale fissata del prestito iniziale

$$W(0) = S$$
$$W(1) = S + iS = S(1+i)$$
$$W(2) = S + 2iS = S(1+2i)$$
$$\vdots$$
$$W(n) = S + niS = S(1+ni)$$

I termini $W(0), W(1), \ldots, W(m)$ sono in progressione aritmetica di ragione $I = iS$ perché

$$W(k) - W(k-1) = iS \qquad k = 1, \ldots, m$$

(la differenza tra due termini consecutivi è costante)

$$i_k = \frac{I}{W(k-1)} = \frac{I}{S(1+(k-1)i)}$$

è decrescente all'aumentare di k

Estendendo ad un qualunque istante $T > 0$ si ha

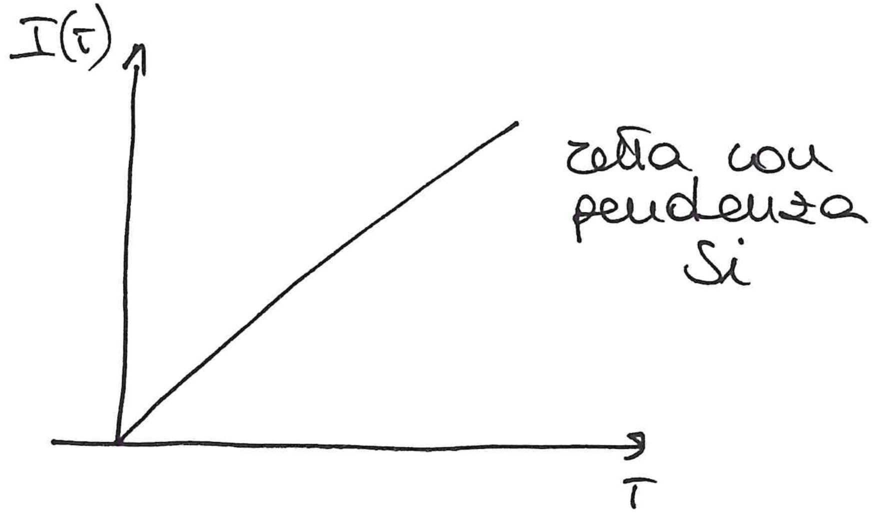
$$W(T) = S(1 + iT)$$

LEGGE DEGLI INTERESSI SEMPLICI O LEGGE LINEARE

$$W(T) = S(1+iT)$$

$$m(T) = 1+iT$$

$$I(T) = SiT \rightarrow \text{lineare}$$



da $W(T) = S(1+iT)$ si ricava:

$$\rightarrow \quad S = \frac{W(T)}{1+iT}$$

$$\rightarrow \quad \frac{W(T)}{S} = 1+iT \Rightarrow \frac{W(T)}{S} - 1 = iT \Rightarrow$$

$$i(T) = \left(\frac{W(T)}{S} - 1\right)\frac{1}{T}$$

$$T = \left(\frac{W(T)}{S} - 1\right)\frac{1}{i}$$

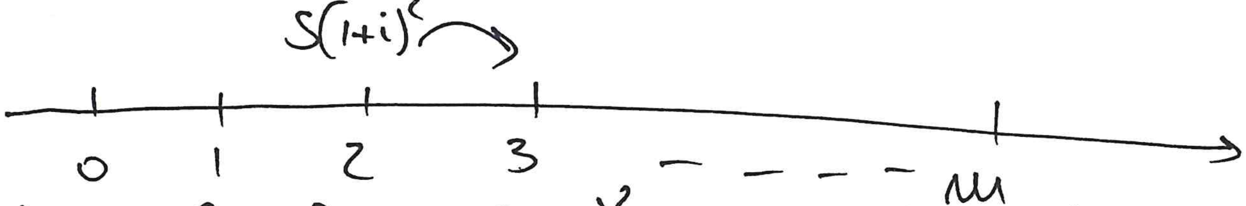
LEGGE DEGLI INTERESSI COMPOSTI

Si suppone adesso che l'interesse da aggiungere sia calcolato come una percentuale costante del debito accumulato all'inizio dell'anno precedente

$$W(0) = S$$

$$W(1) = S + iS = S(1+i)$$

$$W(2) = S(1+i) + iS(1+i) = S(1+i)(1+i) = S(1+i)^2$$



$$W(3) = S(1+i)^2 + iS(1+i)^2 = S(1+i)^2(1+i) = S(1+i)^3$$

$\vdots$

$$W(n) = S(1+i)^{n-1} + i\,S(1+i)^{n-1} = S(1+i)^{n-1}(1+i) = S(1+i)^{n}$$

Gli $n+1$ termini $W(0), W(1), \dots, W(n)$ sono in progressione geometrica di ragione $1+i$ poiché

$$\frac{W(k)}{W(k-1)} = \frac{S(1+i)^{k}}{S(1+i)^{k-1}} = 1+i$$

(il rapporto tra due termini consecutivi è costante)

$$i_k = \frac{\Delta W(k)}{W(k-1)} = \frac{W(k)-W(k-1)}{W(k-1)} = \frac{S(1+i)^{k} - S(1+i)^{k-1}}{S(1+i)^{k-1}} = \frac{S(1+i)^{k-1}\left[1+i-1\right]}{S(1+i)^{k-1}} = \underset{\text{costante}}{i}$$

Estendendo al caso continuo $t \geq 0$

$$W(t) = S(1+i)^{t}$$

<u>legge composta</u> o <u>esponenziale</u>

$$W(T) = S(1+i)^T$$

$$m(T) = (1+i)^T$$

$$\Rightarrow S = \frac{W(T)}{(1+i)^T} = W(T)(1+i)^{-T}$$

$$v(T) = \frac{1}{(1+i)^T} = (1+i)^{-T}$$

da $W(T) = S(1+i)^T$ si ricava:

$$\frac{W(T)}{S} = (1+i)^T \Rightarrow \left[\frac{W(T)}{S}\right]^{\frac{1}{T}} = 1+i \Rightarrow i = \left[\frac{W(T)}{S}\right]^{\frac{1}{T}} - 1$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{W(T)}{S}\right) = \ln(1+i)^T = T\ln(1+i)$$

$$\Rightarrow T = \frac{\ln\left(\frac{W(T)}{S}\right)}{\ln(1+i)}$$

Confronto tra i due regimi

$\boxed{RIS}$ $W(T) = S(1+iT)$

$W(0) = S$

$W(1) = S(1+i)$

$\boxed{RIC}$ $W(T) = S(1+i)^T$

$W(0) = S$

$W(1) = S(1+i)$