Dipartimento di Ingegneria

Precorsi di Fisica

Derivate di Vettori

Lezione 8

Università degli Studi di Napoli Parthenope

La Derivata di un Vettore

Molte grandezze in Fisica hanno natura vettoriale

$$\vec{v} = v(t) \cdot \hat{v}(t)$$

Un vettore può variare sia cambiando il modulo sia cambiando la direzione

La Derivata di un Vettore

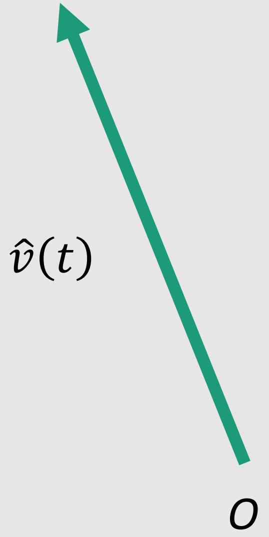
Applichiamo le regole di derivazione, la derivata di un prodotto si calcola nel seguente modo:

$$\frac{d(f(x) \cdot g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

Diventa evidente l'importanza di definire per bene se la grandezza fisica sia uno scalare oppure un vettore

La Derivata di un Versore

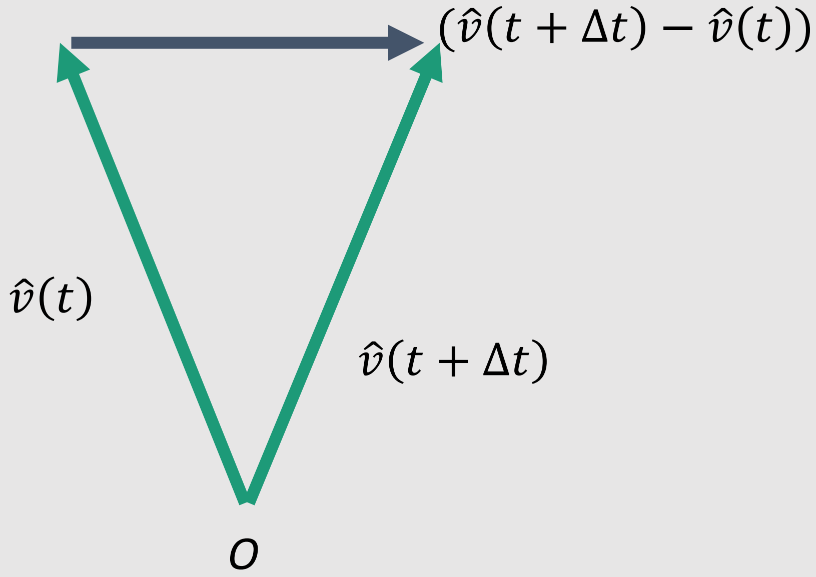
Calcoliamo la derivata del versore $\hat{v}(t)$: il versore cambia la direzione



$$\frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

La Derivata di un Versore

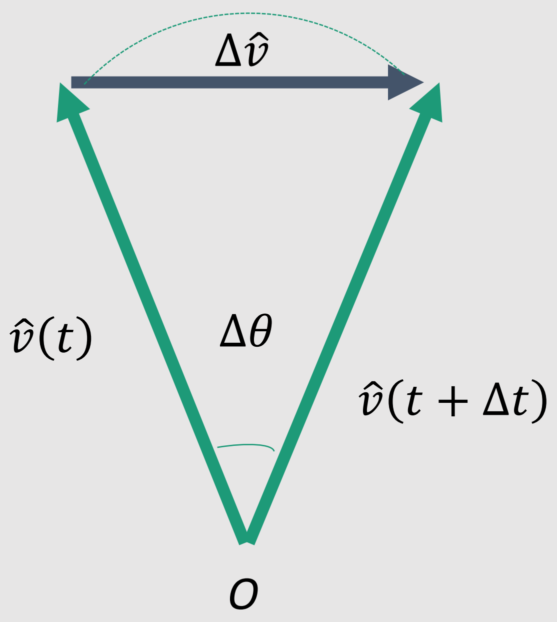
Calcoliamo la derivata del versore $\hat{v}(t)$: il versore cambia la direzione



$$\frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

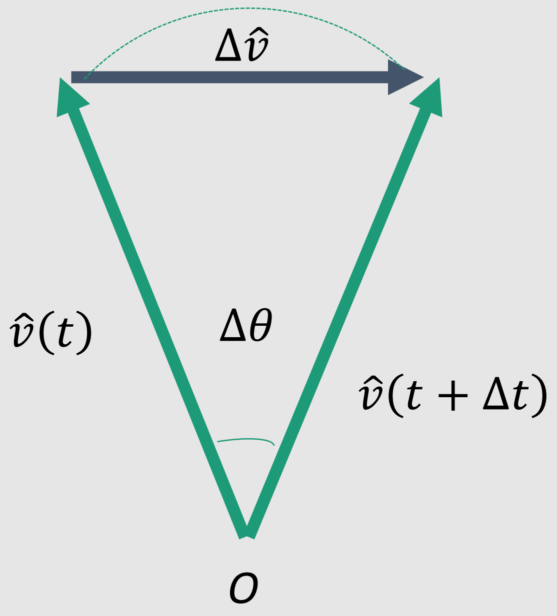
La derivata del versore è un vettore e la sua direzione è definita dalla differenza $\Delta\hat{v}=(\hat{v}(t+\Delta t)-\hat{v}(t))$

Derivata di un Versore



La derivata è $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{v}}{\Delta t}$

Derivata di un Versore



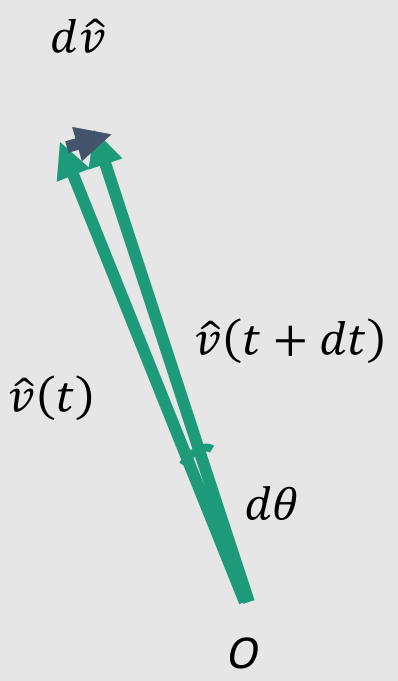
La derivata è $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{v}}{\Delta t}$

- $\Delta\hat{v} = \hat{v}(t+\Delta t) - \hat{v}(t) \quad \Rightarrow |\Delta\hat{v}| = |v(t)|\Delta\theta$

Quando $\Delta t \to 0$ il triangolo isoscele, che ha due lati dati dal modulo del versore, che ha modulo uno, diventa un triangolo degenere, perchè $\Delta\theta \to 0$. I due angoli alla base allora valgono $180°/2 = 90°$

Quindi: $\Delta\hat{v} = \hat{u}_N$ è perpendicolare a $\hat{v}$

Derivata di un Versore



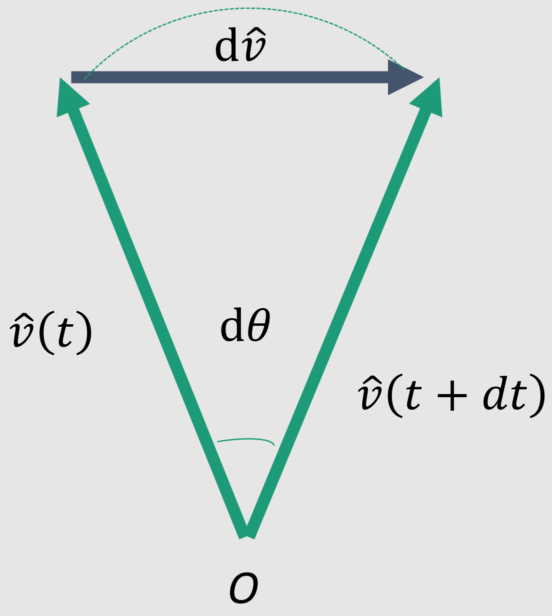
La derivata è $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{v}}{\Delta t}$

- $\Delta \hat{v} = \hat{v}(t + \Delta t) - \hat{v}(t) \quad \Rightarrow |\Delta \hat{v}| = |v(t)|\Delta\theta$

Quando $\Delta t \to 0$ il triangolo isoscele, che ha due lati dati dal modulo del versore, che ha modulo uno, diventa un triangolo degenere, perchè $\Delta\theta \to 0$. I due angoli alla base allora valgono $180°/2 = 90°$

Quindi: $\Delta \hat{v} = \hat{u}_N$ è perpendicolare a $\hat{v}$

Derivata di un Versore



La derivata è $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{v}}{\Delta t}$

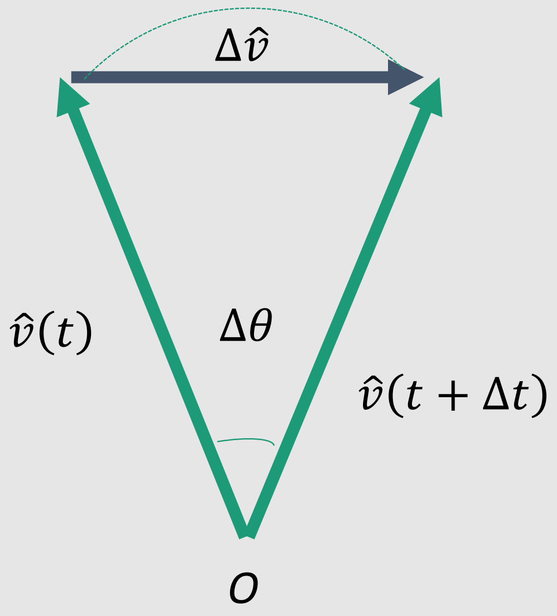
- $\Delta \hat{v} = \hat{v}(t+\Delta t) - \hat{v}(t) \quad \Rightarrow |\Delta \hat{v}| = |\hat{v}(t)|\Delta\theta$
- Il versore ha modulo unitario quindi

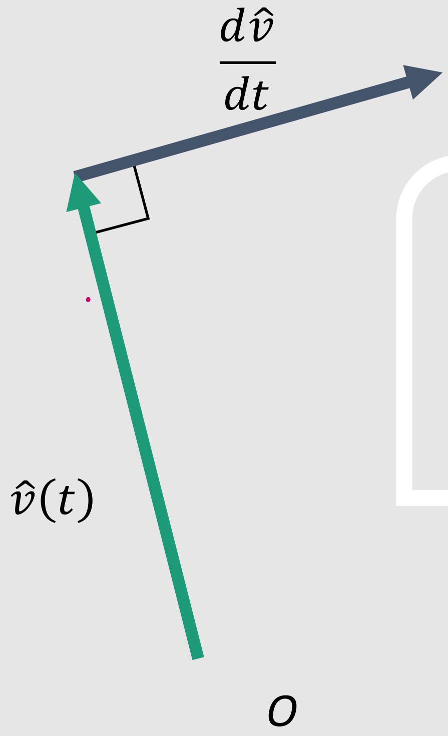
$$dv = d\theta \Leftrightarrow d\hat{v} = d\theta \hat{u}_N$$

con $\hat{u}_N$ perpendicolare a $\hat{v}$

Derivata di un Versore

- $du = |v(t)|d\theta \Longrightarrow d\hat{v} = d\theta\hat{u}_N$





$$\boxed{\frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_N}$$

Derivata del Vettore

Applichiamo le regole di derivazione, la derivata di un prodotto si calcola nel seguente modo:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \hat{v}(t) + v(t) \cdot \frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \hat{v}(t) + v(t) \cdot \frac{d\theta}{dt}\ \hat{u}_N$$

Derivata del Vettore

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \hat{v}(t) + v(t) \cdot \frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \boxed{\frac{dv(t)}{dt} \cdot \hat{v}(t)} + \boxed{v(t) \cdot \frac{d\theta}{dt}\, \hat{u}_N}$$

Parallelo al vettore $\vec{v}(t)$

Ortogonale al vettore $\vec{v}(t)$