POTENZE, RADICALI, ESPONENZIALI E LOGARITMI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI - PARTHENOPE

TABELLA DEI SIMBOLI FONDAMENTALI

IN QUESTA TABELLA ELENCHIAMO ALCUNI SIMBOLI CHE SARANNO LARGAMENTE UTILIZZATI NEL SEGUITO:

SIMBOLO	**SI LEGGE**
$\forall$	"PER OGNI"
$\exists$	"ESISTE (ESISTONO)"
$\nexists$	"NON ESISTE (NON ESISTONO)"
$\exists!$	"ESISTE UNO ED UNO SOLO "
$\in$	"APPARTIENE"
$\notin$	"NON APPARTIENE"
$\Rightarrow$	"IMPLICA"
$\Leftrightarrow$	"SE E SOLTANTO SE"
$\|, \quad :$	"TALE CHE"

POTENZE AD ESPONENTE REALE

SAPPIAMO DEFINIRE DIRETTAMENTE LE POTENZE AD ESPONENTE NATURALE

$$a^r = a \cdot \ \dots \ \cdot a \qquad (\text{PRODOTTO DI } r \text{ VOLTE } a),$$

PER $a \in \mathbb{R}$ E $r \in \mathbb{N}$. ESTENDIAMO QUESTA DEFINIZIONE AI CASI DOVE $r > 0$ E $a > 0$. LE PROPRIETÀ PRINCIPALI DELLE POTENZE SONO LE SEGUENTI

$$a^0 = 1, \qquad \left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}, \qquad a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \qquad a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r.$$

POTENZE AD ESPONENTE REALE

ORA POSSIAMO ESTENDERE ANCORA LA DEFINIZIONE DELLE POTENZE AD ESPONENTE REALE QUANDO $r < 0$ GRAZIE ALLE SEGUENTI PROPRIETÀ

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r},$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s},$$

$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r.$$

RADICALI

DEFINIAMO RADICE $r-$ESIMA CON INDICE $r \in \mathbb{R}$ E RADICANDO $a > 0$ QUELL'UNICO NUMERO

$$\sqrt[r]{a} > 0, \qquad \text{CHE CHIAMIAMO } \; b = \sqrt[r]{a},$$

TALE CHE $b^r = a$. DALLE PROPRIETÀ DELLE POTENZE POSSIAMO DEDURRE CHE

$$\sqrt[r]{a} = b = b^{\frac{r}{r}} = \left(b^r\right)^{\frac{1}{r}} = a^{\frac{1}{r}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}.$$

TALE DEFINIZIONE PUÒ ESSERE ESTESA AI CASI IN CUI $a < 0$ E r È UN NUMERO DISPARI.

RADICALI

ORA, LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE IMPLICANO LE SEGUENTI RELAZIONI

$$\sqrt[r]{a^s} = a^{\frac{s}{r}} = \frac{1}{a^{-\frac{s}{r}}} = \frac{1}{\sqrt[r]{a^{-s}}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[r]{a^s} = \frac{1}{\sqrt[r]{a^{-s}}},$$

$$\sqrt[r]{a^{r\cdot s}} = a^{\frac{r\cdot s}{r}} = a^s,$$

$$\sqrt[r]{a^{r\cdot s_1 + s_2}} = a^{s_1}\sqrt[r]{a^{s_2}}.$$

RADICALI

ALTRE IDENTITÀ OTTENUTE A PARTIRE DALLE PROPRIETÀ DELLE POTENZE SONO LE SEGUENTI

$$\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{b} = \sqrt[r]{a \cdot b} \qquad \left(\sqrt[r]{a}\right)^s = \sqrt[r]{a^s},$$

$$\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[r]{a^{\frac{1}{s}}} = a^{\frac{1}{r \cdot s}} = \sqrt[r \cdot s]{a},$$

$$a \cdot \sqrt[r]{b} = \sqrt[r]{a^r \cdot b}, \qquad a^s \cdot \sqrt[r]{b} = \sqrt[r]{a^{r \cdot s} \cdot b}.$$

ATTENZIONE: QUANDO $n \in \mathbb{N}$ È PARI SI HA $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

ESPONENZIALE

DEFINIAMO ESPONENZIALE L'ESPRESSIONE CON $a > 0$ FISSATO:

$$a^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

COME CONSEQUENZA DELLE PROPRIETÀ DELLE POTENZE SPIEGATE IN PRECEDENZA, L'ESPONENZIALE VERIFICA LE SEGUENTI IDENTITÀ

- $a^0 = 1$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ E $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$;
- $a^x a^y = a^{x+y}$ E $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
- $a^x b^x = (ab)^x$ E $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$.

IL LOGARITMO

IL LOGARITMO È L'OPERAZIONE INVERSA DELLA POTENZA: SE

$$b = a^r$$

CON $a, b > 0$ E $r \in \mathbb{R}$,

$$r = \log_a(b).$$

IN ALTRE PAROLE, IL LOGARITMO

$$\log_a(b)$$

PUÒ ESSERE DEFINITO COME L'ESPONENTE DA DARE ALLA BASE $a >$ PER OTTENERE L'ARGOMENTO $b > 0$.

IL LOGARITMO

QUANDO IN

$$\log_a(b)$$

PONIAMO $a = e$ (NUMERO DI NEPERO), IL LOGARITMO PUÒ ESSERE DENOMINATO LOGARITMO NATURALE O NEPERIANO E SI PUÒ TROVARE SCRITTO COME

$$\log_e(b) = \ln(b).$$

QUANDO INVECE PONIAMO $a = 10$, IL LOGARITMO PUÒ ESSERE DENOMINATO LOGARITMO DECIMALE E PUÒ ESSERE SCRITTO COME

$$\log_{10}(b) = \log(b).$$

IL LOGARITMO

DALLE PROPRIETÀ DELLE POTENZE POSSIAMO DEDURRE ALCUNE IDENTITÀ

$$\log_a(1) = 0, \qquad \log_a(a^b) = b, \qquad a^{\log_a(b)} = b,$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c), \qquad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c),$$

$$\log_a(b^s) = s \log_a(b),$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}, \qquad \log_a(b) = \frac{\log_b(b)}{\log_b(a)} = \frac{1}{\log_b(a)}$$

(PROPRIETÀ DI CAMBIO DI BASE).

IL LOGARITMO

EQUIVALENTEMENTE A QUANTO FATTO PER LA DEFINIZIONE DELL'ESPONENZIALE, POSSIAMO CONSIDERARE IL LOGARITMO CON BASE FISSATA $a > 0$, $a \neq 1$, E ARGOMENTO $x > 0$

$$\log_a x.$$

TALE ESPESSIONE VERIFICA TUTTE LE PROPRIETÀ PRESENTATE PRECEDENTEMENTE-

IL LOGARITMO

IN PARTICOLARE, LE SEGUENTI PROPRIETÀ SONO VERIFICATE.

- $\log_a(x) = c$ EQUIVALE A $a^c = x$;
- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$;
- $\log_a(x^k) = k\log_a(x)$, $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

LE ESPRESSIONI a^x E $\log_a(x)$ APPAIONO RISPETTIVAMENTE NELLE EQUAZIONI ESPONENZIALI E EQUAZIONI LOGARITMICHE.

EQUAZIONI ESPONENZIALI

- ESEMPIO: CERCHIAMO x TALE CHE $\frac{4^x}{4^2} = 1$. PRIMA DI TUTTO APPLICHIAMO LE PROPRIETÀ DELL'ESPONENZIALE E OTTENIAMO L'EQUAZIONE

$$4^{x-2} = 1, \quad \Longrightarrow \quad 4^{x-2} = 4^0.$$

QUESTO IMPLICA $x - 2 = 0$ E QUINDI LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE È $x = 2$.

- ESEMPIO: CERCHIAMO x TALE CHE $3^{x^2} = 2$. IL LOGARITMO È L'INVERSO DELL'ESPONENZIALE E POSSIAMO RISCRIVERE L'EQUAZIONE NELLA FORMA

$$x^2 = \log_3(2), \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\log_3(2)}.$$

EQUAZIONI ESPONENZIALI

- ESEMPIO: CERCHIAMO x TALE CHE $\frac{5^{x^2-7x}}{5^8} = 1$. USIAMO LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE E OTTENIAMO L'EQUAZIONE

$$5^{x^2-7x-8} = 5^0.$$

DA QUEST'ULTIMA POSSIAMO DEDURRE

$$x^2 - 7x - 8 = 0, \quad \Longrightarrow \quad x = 8, \quad x = -1.$$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

- ESEMPIO: CERCHIAMO x TALE CHE $\log_3(-x^2-6x)=2$. IL DOMINIO DI DEFINIZIONE D È COMPOSTO DA QUELLE x TALI CHE

$$-x^2-6x>0$$

E QUINDI $D=]-6,0[$. DALLE PROPRIETÀ DEL LOGARITMO:

$$\log_3(-x^2-6x)=\log_3(3^2).$$

ORA

$$-x^2-6x=3^2, \quad \Longrightarrow \quad x=-3\in D.$$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

- ESEMPIO: CERCHIAMO x TALE CHE

$$\log_4(x-5)+\log_4(x)=2\log_4(6).$$

IL DOMINIO DI DEFINIZIONE DELL'ESPRESSIONE È:

$$D=\{x>5\}\cap\{x>0\}=]5,+\infty[.$$

DALLE PROPRIETÀ DEL LOGARITMO: $\log_4\big(x(x-5)\big)=\log_4(36)$, VALIDA IN

$$\tilde{D}=D\cap\{x(x-5)>0\}=]5,+\infty[.$$

DALL'ULTIMA RELAZIONE DEDUCIAMO

$$x^2-5x=36, \qquad \Longrightarrow \qquad x=9, \quad x=-4.$$

LA SOLUZIONE $x=9\in\tilde{D}$ È ACCETTABILE, MENTRE $x=-4\notin\tilde{D}$ NON LO È.

Esercizi

- Riscrivere nella forma a^r con $a > 0$ e $r \in \mathbb{R}$ le seguenti quantità

$$\sqrt{\frac{a^{\frac{1}{6}}\sqrt{a^3}}{a^2}}, \qquad \sqrt{a^4\sqrt{a}}\, a^{-\frac{1}{6}}, \qquad \frac{a^{\frac{5}{7}}\sqrt{a}}{a^{\frac{1}{4}}}, \qquad \frac{a}{a^{\frac{1}{5}}\sqrt{a}}.$$

$$\left(\text{SOL. } a^{-\frac{1}{6}}, \qquad a^{\frac{25}{12}}, \qquad a^{\frac{27}{28}}, \qquad a^{\frac{3}{10}}\right).$$

ESERCIZI

- DIRE PER QUALI VALORI DI x LE SEGUENTI EQUAZIONI SONO VERIFICATE

$$3^x = 2, \qquad 5^{x^2}\, 5^{-x} = 5^2, \qquad 7^{x^2} = 9, \qquad \frac{8^x}{16^2} = 4^5,$$

$$\Big(\text{SOL. } x = \log_3(2), \qquad x = 2 \text{ E } -1, \qquad x = \pm\sqrt{\log_7(9)}, \qquad x = 6\Big).$$

$$\log_3(x) = 5, \quad \log_2(x^2) = \log_2(4x), \quad \log_5(x-1) + \log_5(x+1) = \log_5(3),$$

$$\Big(\text{SOL. } x = 3^5, \qquad x = 4 \ (x = 0 \text{ NON È ACC.}), \qquad x = 2 \ (x = -2 \text{ NON È ACC.})\Big).$$