RICHIAMI SULLE DISEQUAZIONI ALGEBRICHE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI - PARTHENOPE

TABELLA DEI SIMBOLI FONDAMENTALI

IN QUESTA TABELLA ELENCHIAMO ALCUNI SIMBOLI CHE SARANNO LARGAMENTE UTILIZZATI NEL SEGUITO:

SIMBOLO	**SI LEGGE**
$\forall$	"PER OGNI"
$\exists$	"ESISTE (ESISTONO)"
$\nexists$	"NON ESISTE (NON ESISTONO)"
$\exists!$	"ESISTE UNO ED UNO SOLO "
$\in$	"APPARTIENE"
$\notin$	"NON APPARTIENE"
$\Rightarrow$	"IMPLICA"
$\Leftrightarrow$	"SE E SOLTANTO SE"
$\|,\quad :$	"TALE CHE"

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

RICHIAMIAMO BREVEMENTE I RISULTATI RIGUARDANTI LO STUDIO DEL TRINOMIO DI SECONDO GRADO, E QUINDI, LA RISOLUZIONE DELLE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO. ANZITUTTO NOTIAMO CHE LE DUE DISEQUAZIONI

$$\begin{gathered} ax^2 + bx + c > 0 \quad (< 0), \\ -ax^2 - bx - c < 0 \quad (> 0), \end{gathered}$$

SONO EQUIVALENTI; PERTANTO CI SI PUÒ SEMPRE RICONDURRE AL CASO $a > 0$. QUINDI, DA ORA IN POI SUPPORREMO SEMPRE CHE $a > 0$.

SIA $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ È IL **DISCRIMINANTE** ASSOCIATO A $ax^2 + bx + c = 0$). IN BASE AL SEGNO DEL Δ È POSSIBILE DISTINGUERE TRE CASI .

CASO $\Delta > 0$

SIA $\underline{\Delta > 0}$. ALLORA IL TRINOMIO HA DUE RADICI REALI:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} < x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

IN ALTRI TERMINI

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \quad \text{o} \quad x = x_2.$$

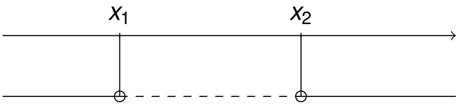
IN TAL CASO RISULTA

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

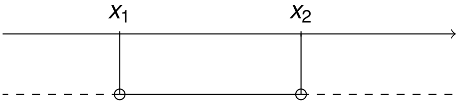
CASO $\Delta > 0$

DUNQUE

$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x < x_1 \quad \text{o} \quad x > x_2,$$



$$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2.$$



CASO $\Delta = 0$

SIA $\Delta = 0$. ALLORA IL TRINOMIO HA UNA RADICE REALE DI MOLTEPLICITÀ 2:

$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

IN ALTRI TERMINI

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = x_0.$$

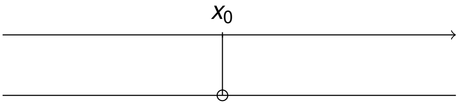
IN TAL CASO RISULTA

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

CASO $\Delta = 0$

DUNQUE

$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \text{OGNI } x \neq x_0 \text{ È SOLUZIONE.}$$



INVECE

$$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \text{ NESSUN } x \in \mathbb{R} \text{ È SOLUZIONE.}$$

CASO $\Delta < 0$

SIA $\Delta < 0$. ALLORA IL TRINOMIO NON HA RADICI REALI, IN ALTRI TERMINI

$$ax^2 + bx + c = 0 \;\Leftrightarrow\; \text{NESSUN } x \in \mathbb{R} \text{ È SOLUZIONE.}$$

INOLTRE VALE L'UGUAGLIANZA

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

COSICCHÈ RISULTA

$$ax^2 + bx + c > 0 \;\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},$$
$$ax^2 + bx + c < 0 \;\Leftrightarrow\; \text{NESSUN } x \in \mathbb{R} \text{ È SOLUZIONE.}$$

ESEMPI

1) $x^2 - 5x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ o } x > 4.$

INFATTI $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$ E IL PRIMO COEFFICIENTE È POSITIVO, QUINDI LA DISEQUAZIONE È VERIFICATA PER VALORI ESTERNI ALL'INTERVALLO DELLE DUE RADICI, CHE SONO

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 4;$$

DUNQUE LA DISEQUAZIONE È SODDISFATTA PER

$$x < 1 \text{ o } x > 4.$$

ESEMPI

2) $4 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2.$

OSSERVIAMO: $4 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leqslant 0$. POICHÈ $\Delta = 16 > 0$, LE RADICI SONO

$$x = \pm 2,$$

LA DISEQUAZIONE È VERIFICATA NELL'INTERVALLO DELLE RADICI $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

3) $x^2 + 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow x \neq -3.$

NOTIAMO CHE $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ (INFATTI $\Delta = 0$) E LA RADICE DOPPIA È $x = -3$, DUNQUE LA DISEQUAZIONE È VERIFICATA PER OGNI $x \neq -3$.

ESEMPI

4) $x^2 - 2x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x = 1$.

INFATTI $\Delta = 0$, E LA SOLUZIONE (DI MOLTEPLICITÀ 2) DELL'EQUAZIONE $x^2 - 2x + 1 = 0$ È $x = 1$, MENTRE NON ESISTONO $x \in \mathbb{R}$ PER I QUALI

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 < 0.$$

5) $x^2 + x + 1 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.

POICHÈ $\Delta < 0$, LA DISEQUAZIONE È VERIFICATA PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

6) $5x^2 + x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow$ NESSUN $x \in \mathbb{R}$ È SOLUZIONE.

ESSENDO $\Delta < 0$, LA DISEQUAZIONE NON È VERIFICATA PER ALCUN x IN $\mathbb{R}$.

SISTEMI DI DISEQUAZIONI

UN INSIEME DI DUE O PIÙ DISEQUAZIONI NELLA STESSA INCOGNITA VALIDE SIMULTANEAMENTE È DETTO SISTEMA DI DISEQUAZIONI:

$$\begin{cases} \text{DISEQUAZIONE}_1, \\ \text{DISEQUAZIONE}_2, \\ \text{DISEQUAZIONE}_3, \\ \dots \\ \dots \\ \text{DISEQUAZIONE}_n. \end{cases}$$

SISTEMI DI DISEQUAZIONI

OGNI SOLUZIONE COMUNE A TUTTE LE DISEQUAZIONI È DETTO SOLUZIONE DEL SISTEMA. LA RISOLUZIONE DI UN SISTEMA PUÒ ESSERE AFFRONTATA COME SEGUE. ANZITUTTO DEFINIAMO GLI INSIEMI DELLE SOLUZIONI

$$S_1, \quad S_2, \quad ..., \quad S_n$$

DI OGNI DISEQUAZIONE. L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA È L'INTERSEZIONE DEI PRECEDENTI:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap ... \cap S_n.$$

QUANDO $S = \emptyset$ (VUOTO), ALLORA IL SISTEMA NON AMMETTE SOLUZIONI.

SISTEMI DI DISEQUAZIONI

NEL CONCRETO, PUÒ ESSERE UTILE PROCEDERE CON UN METODO GRAFICO.

- TRACCIAMO LA RETTA REALE SULLA QUALE EVIDENZIAMO TUTTE LE RADICI DELLE DISEQUAZIONI CONTENUTE NEL SISTEMA. SOTTO QUESTA RAPPRESENTEREMO I DIVERSI INSIEMI S_1, S_2, ..., S_n COME SEGUE.

- SPOTANDOSI LEGGERMENTE IN BASSO TRACCIAMO UNA SECONDA RETTA (PARALLELA ALLA PRIMA) DOVE S_1 È RAPPRESENTATO DA UNA LINEA CONTINUA E $\mathbb{R} \setminus S_1$ DA UNA LINEA TRATTEGGIATA. PER PRECISARE SE LE RADICI OTTENUTE DALLA PRIMA DISEQUAZIONE NON SONO CONTENUTE IN S_1 POSSIAMO EVIDENZIARLE CON UN PICCOLO CERCHIO VUOTO.

Sistemi di disequazioni

- Ripetiamo il passaggio precedente, tracciando una terza retta ancora parallela alla seconda. In questo caso, rappresentiamo S_2 con una linea continua e $\mathbb{R} \setminus S_2$ con una linea tratteggiata. Ripetiamo questo procedimento per ogni S_1, S_2, ..., S_n.

- Nell'ultimo passaggio, tracciamo un ulteriore retta tratteggiata parallela alle precedenti. Su questa rappresentiamo con la linea continua le porzioni di $\mathbb{R}$ dove tutte le rette precedenti presentano la linea continua. Queste parti non sono altro che l'insieme delle soluzioni del sistema, cioè

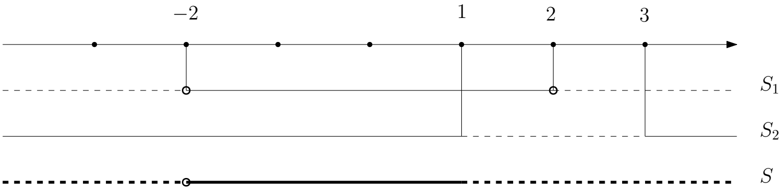
$$S = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n.$$

Vediamo ora come procedere in concreto con degli esempi.

ESEMPIO DI SISTEMA DI DISEQUAZIONI

RISOLVIAMO IL SEGUENTE SISTEMA DI DISEQUAZIONI TROVANDO S_1 E S_2.

$$\begin{cases} x^2 < 4, \\ (x-3)(x-1) \geqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} S_1 =]-2, 2[, \\ S_2 =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[. \end{cases}$$

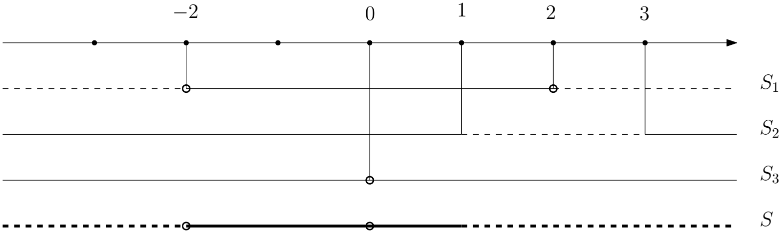


OSSERVANDO IL GRAFICO POSSIAMO DEDURRE CHE $S =]-2, 1]$.

ESEMPIO DI SISTEMA DI DISEQUAZIONI

RISOLVIAMO IL SEGUENTE SISTEMA DI DISEQUAZIONI TROVANDO S_1, S_2 E S_3. CONFRONTIAMO POI IL RISULTATO OTTENUTO CON LA DIAPOSITIVA PRECEDENTE.

$$\begin{cases} x^2 < 4, \\ (x-3)(x-1) \geqslant 0, \\ |x| > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} S_1 =]-2, 2[, \\ S_2 =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[, \\ S_3 =]-\infty, 0[\cup]0+\infty[= \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$



OSSERVANDO IL GRAFICO POSSIAMO DEDURRE CHE $S =]-2, 0[\cup]0, 1]$.

DISEQUAZIONI PRODOTTO E QUOZIENTE

SIANO $P(x)$ E $Q(x)$ POLINOMI DELLA VARIABILE x (UGUALMENTE SI PUÒ PROCEDERE QUANDO $P(x)$ E $Q(x)$ SONO DUE FUNZIONI NELLA VARIABILE x).

CONSIDERIAMO LE DISEQUAZIONI FRATTE, CIOÈ DEL TIPO

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \text{o} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0,$$

O LE DISEQUAZIONI PRODOTTO, CIOÈ DEL TIPO

$$P(x) \cdot Q(x) > 0 \quad \text{o} \quad P(x) \cdot Q(x) < 0.$$

LO SCHEMA RISOLUTIVO CHE SEGUE DERIVA DALLA REGOLA DEI SEGNI.

DISEQUAZIONI PRODOTTO E QUOZIENTE

L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DELLA DISEQUAZIONE

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad (\text{O} \quad P(x) \cdot Q(x) > 0),$$

SI OTTIENE FACENDO L'UNIONE DEGLI INSIEMI DELLE SOLUZIONI DEI DUE SISTEMI

$$\begin{cases} P(x) > 0, \\ Q(x) > 0, \end{cases} \cup \begin{cases} P(x) < 0, \\ Q(x) < 0. \end{cases}$$

DISEQUAZIONI PRODOTTO E QUOZIENTE

EQUIVALENTEMENTE, L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DELLA DISEQUAZIONE

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad (\text{O} \quad P(x) \cdot Q(x) < 0),$$

SI OTTIENE FACENDO L'UNIONE DEGLI INSIEMI DELLE SOLUZIONI DEI DUE SISTEMI

$$\begin{cases} P(x) > 0, \\ Q(x) < 0, \end{cases} \cup \begin{cases} P(x) < 0, \\ Q(x) > 0. \end{cases}$$

DISEQUAZIONI PRODOTTO E QUOZIENTE

PUÒ ESSERE UTILE VISUALIZZARE IL PROCEDIMENTO RISOLUTIVO COME SEGUE.
SI STUDIA IL SEGNO DEL POLINOMIO

$$P(x)$$

E SI INDICANO LE "ZONE" IN CUI $P(x)$ È POSITIVO CON UNA LINEA CONTINUA E QUELLE IN CUI È NEGATIVO CON UNA LINEA TRATTEGGIATA. ANALOGAMENTE SI FA PER L'ALTRO POLINOMIO

$$Q(x).$$

DISEQUAZIONI PRODOTTO E QUOZIENTE

LE SOLUZIONI DELLA DISEQUAZIONE

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$$

SI TROVERANNO (GRAZIE ALLA REGOLA DEI SEGNI) "SELEZIONANDO" LE ZONE DOVE LE LINEE SONO TUTTE E DUE CONTINUE E LE ZONE DOVE SONO TUTTE E DUE TRATTEGGIATE. NEL CASO IN CUI SI VOGLIA RISOLVERE LA DISEQUAZIONE

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0,$$

BASTERÀ INVECE "INTERSECARE" LE ZONE DOVE CI SONO LE LINEE CONTINUE E LE LINEE TRATTEGGIATE.

ESEMPIO

RISOLVIAMO LA SEQUENTE DISEQUAZIONE FRATTA UTILIZZANDO LA RISOLUZIONE GRAFICA PRIMA DESCRITTA:

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 4x} \geqslant 0.$$

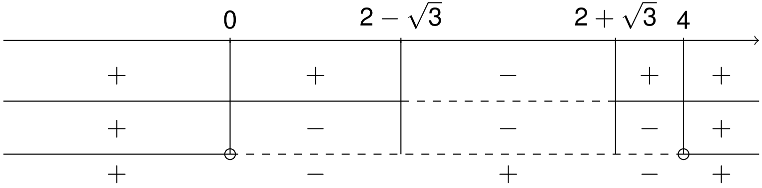
STUDIAMO IL SEGNO DEL NUMERATORE E DEL DENOMINATORE E RIPORTIAMO LE INFORMAZIONI TROVATE SUL GRAFICO. A TAL FINE VEDIAMO QUANDO IL NUMERATORE È NON NEGATIVO ED IL DENOMINATORE POSITIVO:

$$x^2 - 4x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 2 - \sqrt{3} \quad \text{o} \quad x \geqslant 2 + \sqrt{3},$$

$$x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{o} \quad x > 4.$$

ESEMPIO

QUINDI :



LA DISEQUAZIONE FRATTA É ALLORA VERIFICATA PER

$$x < 0 \quad \text{o} \quad 2-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 2+\sqrt{3} \quad \text{o} \quad x > 4.$$

ESEMPIO

RISOLVIAMO ORA LA DISEQUAZIONE FRATTA :

$$\frac{x^2-4x+1}{x^2-4x} < 0.$$

DALLO STUDIO DEL SEGNO FATTO PRECEDENTEMENTE:

	0		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		4	
$+$		$+$		$-$		$+$		$+$
$+$		$-$		$-$		$-$		$+$
$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

LA DISEQUAZIONE FRATTA É ALLORA VERIFICATA PER

$$0 < x < 2-\sqrt{3} \quad \text{o} \quad 2+\sqrt{3} < x < 4.$$

DISEQUAZIONI ELEMENTARI CON IL VALORE ASSOLUTO

SIA $a \geqslant 0$, ALLORA

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a.$$

INFATTI ESSA EQUIVALE A

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \leqslant a, \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < 0, \\ -x \leqslant a, \end{cases}$$

OSSIA

$$x \in [-a, 0[\cup [0, a] = [-a, a].$$

SIA $a < 0$, ALLORA

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow \text{NESSUN} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{È SOLUZIONE.}$$

INFATTI IL VALORE ASSOLUTO È UNA QUANTITÀ SEMPRE NON NEGATIVA.

ESEMPI

1) $|x| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$.

2) $|x| \leqslant -3$ NON AMMETTE SOLUZIONI.

3) $|x+1| < 3 \Leftrightarrow -4 < x < 2$. INFATTI:

$$|x+1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x+1 < 3 \Leftrightarrow -4 < x < 2.$$

4) $\dfrac{1}{|x-2|} \geqslant 4 \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{7}{4}, \dfrac{9}{4}\right] \setminus \{2\}$. INFATTI:

$$\frac{1}{|x-2|} \geqslant 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| \neq 0, \\ |x-2| \leqslant \frac{1}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ \frac{7}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9}{4}. \end{cases}$$

DISEQUAZIONI ELEMENTARI CON IL VALORE ASSOLUTO

SIA $a > 0$, ALLORA

$$|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \leqslant -a \quad \text{o} \quad x \geqslant a.$$

INFATTI ESSA EQUIVALE A

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant a, \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < 0, \\ -x \geqslant a, \end{cases}$$

OSSIA

$$x \in \,]-\infty, -a] \, \cup \, [a, +\infty[.$$

SIA $a < 0$, ALLORA

$$|x| \geqslant a \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}.$$

INFATTI IL VALORE ASSOLUTO È UNA QUANTITÀ SEMPRE NON NEGATIVA.

ESEMPI

1) $|x| \geqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant -1$ O $x \geqslant 1$.

2) $|x| > -3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3) $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

4) $|x-1| \geqslant 2 \Leftrightarrow x \leqslant -1$ O $x \geqslant 3$. INFATTI:

$$|x-1| \geqslant 2 \Leftrightarrow x-1 \leqslant -2 \text{ O } x-1 \geqslant 2 \Leftrightarrow x \leqslant -1 \text{ O } x \geqslant 3.$$

ESERCIZI

SI RISOLVANO LE DISEQUAZIONI:

- $(x-2)^2 - 2 < 8 - (x+1)^2$; $\left(\text{SOL. } \frac{-1-\sqrt{11}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right)$;
- $x(x-2) \leqslant (x-2)^2$; $\left(\text{SOL. } x \leqslant 2\right)$;
- $3x^2 + x \leqslant 0$; $\left(\text{SOL. } -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0\right)$;
- $(2x-1)(2x+1) \leqslant 5x^2 + 2x$; $\left(\text{SOL. } \forall x \in \mathbb{R}\right)$.

ESERCIZI

VERIFICARE CHE

- $|x^2 - 5x + 4| \geqslant 4 \Leftrightarrow x \leqslant 0,\ x \geqslant 5;$

- $|x - 1| < |x - 2| \Leftrightarrow x < \frac{3}{2};$

- $x^2 - 3|x| - 4 \leqslant 0 \Leftrightarrow -4 \leqslant x \leqslant 4;$

  $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1 \Leftrightarrow x > 0.$

Esercizi

- Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - |x| < 2, \\ \frac{x-3}{x-7} \geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 3x > 4, \\ \frac{x^2-9}{x^2-6x-7} \leqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^4 + 4x^2 - 21 > 0, \\ x^7 + 7x^4 - 8x > 0, \end{cases}$$

$$\big(\text{sol. }]-2, 2[, \qquad [3, 7[, \qquad]-2, -\sqrt{3}[\big).$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0, \\ x - 4 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} |x| - x \leqslant 0, \\ \frac{x-8}{x^2-2x-3} > 0, \\ x^2 - 5x - 6 \geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} |x| - 4 > 0, \\ \frac{x^2-4}{x-3} \leqslant 0, \\ x^3 - 8 < 0. \end{cases}$$

$$\big(\text{sol. }]0, 1] \cup [2, 4[, \qquad]8, +\infty[, \qquad]-\infty, -4[\big).$$