Cenni di teoria degli insiemi

Università degli studi di Napoli - Parthenope

TABELLA DEI SIMBOLI FONDAMENTALI

IN QUESTA TABELLA ELENCHIAMO ALCUNI SIMBOLI CHE SARANNO LARGAMENTE UTILIZZATI NEL SEGUITO:

SIMBOLO	**SI LEGGE**
$\forall$	"PER OGNI"
$\exists$	"ESISTE (ESISTONO)"
$\nexists$	"NON ESISTE (NON ESISTONO)"
$\exists!$	"ESISTE UNO ED UNO SOLO "
$\in$	"APPARTIENE"
$\notin$	"NON APPARTIENE"
$\Rightarrow$	"IMPLICA"
$\Leftrightarrow$	"SE E SOLTANTO SE"
$\|, \quad :$	"TALE CHE"

Insiemi

Assumiamo come primitivo il concetto di insieme, ovvero una collezione (classe, famiglia..) di oggetti determinati e distinti detti elementi dell'insieme.

Richiamiamo la "definizione" data da G. Cantor (1845-1918):

"Un insieme è una collezione di oggetti, determinati e distinti, della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tratto unico; tali oggetti si dicono elementi dell'insieme".

INSIEMI

IN GENERE GLI INSIEMI VENGONO INDICATI CON LETTERE MAIUSCOLE E GLI ELEMENTI CON LETTERE MINUSCOLE. SE S UN INSIEME, SCRIVEREMO

$$x \in S$$

PER INDICARE CHE L'ELEMENTO x APPARTIENE ALL'INSIEME S, OPPURE

$$x \notin S$$

PER INDICARE CHE x NON APPARTIENE AD S.

INSIEMI

SI DENOTA CON IL SIMBOLO $\emptyset$ L'INSIEME VUOTO, CIOÈ L'INSIEME PRIVO DI ELEMENTI.

PER DESCRIVERE UN INSIEME SI ELENCANO GLI ELEMENTI CHE LO COMPONGONO O SI EVIDENZIA LA PROPRIETÀ CHE LI ACCOMUNA. AD ESEMPIO, SCRIVEREMO INDIFFERENTEMENTE

$$S = \{1, 2, 3\}$$

OPPURE

$$S = \{n \in \mathbb{N} : n \leqslant 3\}$$

DOVE $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ È L'INSIEME DEI NUMERI NATURALI.

Sottoinsiemi

Definizione

Si dice che un insieme S è un sottoinsieme di un insieme T (o anche che S è incluso in T), e scriveremo $S \subseteq T$, se ogni elemento di S è anche elemento di T; cioè

$$S \subseteq T \Leftrightarrow \forall x \in S, \ x \in T.$$

Se S è incluso in T ed esiste almeno un elemento di T che non appartiene ad S, si dice che S è un sottoinsieme proprio (o incluso strettamente) in T, e si scriverà $S \subset T$.

Per convenzione, assumiamo che l'insieme vuoto $\emptyset$ è sottoinsieme di ogni insieme. Se S e T sono insiemi tali che $S \subseteq T$ e $T \subseteq S$, allora $S = T$.

Intersezione ed unione

Definizione

Si dice intersezione $S \cap T$ di due insiemi S e T l'insieme

$$S \cap T = \{x : \ x \in S \, e \, x \in T\}.$$

Si dice unione $S \cup T$ di due insiemi S e T l'insieme

$$S \cup T = \{x : \ x \in S \, o \, x \in T\}.$$

Gli insiemi S e T, si dicono disgiunti se $S \cap T = \emptyset$.

DIFFERENZA

Definizione

DIREMO DIFFERENZA $T \setminus S$ DI DUE INSIEMI T E S L'INSIEME

$$T \setminus S = \{x \,:\, x \in T \text{ e } x \notin S\}.$$

SE $S \subseteq T$, L'INSIEME DIFFERENZA $T \setminus S$ SI DICE **COMPLEMENTARE** DI S IN T E SI DENOTA TALVOLTA CON $\mathcal{C}_T S$.

ESEMPI

CONSIDERIAMO L'INSIEME $\mathbb{N}$ DEI NUMERI NATURALI, CIOÈ

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

E SI CONSIDERINO I SEGUENTI SUOI SOTTOINSIEMI

$$X = \{\text{NUMERI PARI}\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\},$$

$$Y = \{\text{NUMERI DISPARI}\} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\},$$

$$Z = \{\text{NUMERI PRIMI}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\},$$

$$T = \{\text{NUMERI PRIMI DISPARI}\} = \{3, 5, 7, 11, \ldots\}.$$

ESEMPI

E' EVIDENTE CHE

- $21 \in Y$ MA $21 \notin X$, $21 \notin Z$, $21 \notin T$.

- $T \subset Y$, $T \subset Z$.

- $X \cup Y = \mathbb{N}$, $Y \cup Z = \{2\} \cup Y$.

- $X \cap Y = \emptyset$, $X \cap Z = \{2\}$, $Y \cap Z = T$.

- $X \setminus Y = X$, $Z \setminus T = \{2\}$, $\mathcal{C}_{\mathbb{N}} X = Y$, $\mathcal{C}_{\mathbb{N}} Y = X$.

PRODOTTO CARTESIANO

SIANO S E T DUE INSIEMI. SI DEFINISCE COPPIA ORDINATA

$$(x, y),$$

L'INSIEME COSTITUITO DALL'ELEMENTO $x \in S$, E DALL'ELEMENTO $y \in T$, PRESI IN TALE ORDINE. SI OSSERVI CHE LA COPPIA ORDINATA

$$(x, y)$$

NON VA CONFUSA CON L'INSIEME

$$\{x, y\} = \{y, x\}.$$

PRODOTTO CARTESIANO

Definizione

DIREMO PRODOTTO CARTESIANO DI T PER S, E SI INDICHERÀ CON $S \times T$, L'INSIEME DELLE COPPIE ORDINATE (x, y) CON $x \in S$ E $y \in T$:

$$S \times T = \{(x, y) \,:\, x \in S, y \in T\}.$$

SI OSSERVI CHE, SE $S \neq T$, ALLORA $S \times T \neq T \times S$, CIOÈ NON VALE LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA. SE $S = T$, SI PONE $S \times S = S^2$.

PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI

DIAMO ADESSO ALCUNE PROPRIETÀ PRINCIPALI DELLE OPERAZIONI TRA GLI INSIEMI.

1. PROPRIETÀ COMMUTATIVA DELL'INTERSEZIONE E DELL'UNIONE:

$$S \cap T = T \cap S; \qquad S \cup T = T \cup S.$$

2. PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DELL'INTERSEZIONE E DELL'UNIONE:

$$(S \cap T) \cap V = S \cap (T \cap V);$$
$$(S \cup T) \cup V = S \cup (T \cup V).$$

Proprietà delle operazioni

3. Proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione e dell'intersezione rispetto all'unione:

$$(S \cap T) \cup V = (S \cup V) \cap (T \cup V);$$
$$(S \cup T) \cap V = (S \cap V) \cup (T \cap V).$$

4. Proprietà distributiva della differenza dell'intersezione e dell'unione:

$$(S \cap T) \setminus V = (S \setminus V) \cap (T \setminus V);$$
$$(S \cup T) \setminus V = (S \setminus V) \cup (T \setminus V).$$

5. Leggi di De Morgan

$$S \setminus (T \cap V) = (S \setminus T) \cup (S \setminus V);$$
$$S \setminus (T \cup V) = (S \setminus T) \cap (S \setminus V).$$

Esercizi

- Specificare $C = A \cap B$, $D = A \cup B$, $E = A \setminus B$ e $F = B \setminus A$ per:

$$A = \mathbb{N}, \quad B = \mathbb{Z},$$

$$\big(\text{sol. } C = A,\ D = B,\ E = \emptyset,\ F = \{-n : n \in \mathbb{N}_0\}\big);$$

$$A = \mathbb{Q}, \quad B = \mathbb{R},$$

$$\big(\text{sol. } C = A,\ D = B,\ E = \emptyset,\ F = \{n : \ n \text{ É irrazionale}\}\big);$$

ESERCIZI

- SPECIFICARE $C = A \cap B$, $D = A \cup B$, $E = A \setminus B$ E $F = B \setminus A$ PER:

$$A = \{\text{NUMERI PARI}\}, \quad B = \{\text{MULTIPLI DI } 3\}, \qquad \big(\text{SOL. } C = \{\text{MULTIPLI DI } 6\},$$

$$D = \{\text{MULT. DI } 2 \text{ O } 3\},\ E = \{\text{PARI NON MULT. DI } 3\},\ F = \{\text{MULT. DI } 3 \text{ DISPARI}\}\big);$$

$$A = \,]-3, \sqrt{3}\,[, \quad B = [1, 5\,[, \qquad \big(\text{SOL. } C = [1, \sqrt{3}\,[,$$

$$D = \,]-3, 5\,[,\ E = \,]-3, 1\,[,\ F = [\sqrt{3}, 5\,[\big);$$

$$A = \,]-\infty, \sqrt{3}\,[, \quad B = [1, +\infty\,[, \qquad \big(\text{SOL. } C = [1, \sqrt{3}\,[,$$

$$D = \mathbb{R},\ E = \,]-\infty, 1\,[,\ F = [\sqrt{3}, +\infty\,[\big).$$