I NUMERI REALI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI - PARTHENOPE

TABELLA DEI SIMBOLI FONDAMENTALI

IN QUESTA TABELLA ELENCHIAMO ALCUNI SIMBOLI CHE SARANNO LARGAMENTE UTILIZZATI NEL SEGUITO:

SIMBOLO	**SI LEGGE**
$\forall$	"PER OGNI"
$\exists$	"ESISTE (ESISTONO)"
$\nexists$	"NON ESISTE (NON ESISTONO)"
$\exists!$	"ESISTE UNO ED UNO SOLO "
$\in$	"APPARTIENE"
$\notin$	"NON APPARTIENE"
$\Rightarrow$	"IMPLICA"
$\Leftrightarrow$	"SE E SOLTANTO SE"
$\|,\quad :$	"TALE CHE"

ESISTENZA ASSIOMATICA DEL CAMPO DEI NUMERI REALI

ASSUMEREMO, COME **POSTULATO**, L'ESISTENZA DI UN INSIEME DI NUMERI, CHIAMATO INSIEME DEI NUMERI REALI, NEL QUALE SIA POSSIBILE ESEGUIRE LE QUATTRO OPERAZIONI ELEMENTARI $(+, -, \cdot, /)$, E NEL QUALE SIA SEMPRE POSSIBILE STABILIRE QUAL É IL MAGGIORE TRA DUE NUMERI ASSEGNATI.

ELENCHIAMO ADESSO LE PROPRIETÀ RELATIVE ALLE OPERAZIONI TRA NUMERI REALI, QUELLE RELATIVE ALL'ORDINAMENTO, (OSSIA ALLA RELAZIONE $\leqslant$), CHE ASSUMEREMO ESSERE VALIDE IN $\mathbb{R}$, ED INFINE L'ASSIOMA DI COMPLETEZZA.

SIA $\mathbb{R}$ UN INSIEME, CHE CHIAMEREMO INSIEME DEI NUMERI REALI. CON a, b, c INDICHEREMO NUMERI REALI QUALUNQUE.

ASSIOMI RELATIVI ALLE OPERAZIONI

ASSIOMI RELATIVI ALLE OPERAZIONI. SONO DEFINITE IN $\mathbb{R}$ DUE OPERAZIONI: DI SOMMA O ADDIZIONE $(+)$ E DI PRODOTTO O MOLTIPLICAZIONE $(\cdot)$ AVENTI LE SEGUENTI PROPRIETÀ

- PROPRIETÀ COMMUTATIVA: $a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$;
- PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $(a+b)+c=a+(b+c)$; $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;
- PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$;

ASSIOMI RELATIVI ALLE OPERAZIONI

- ESISTENZA DEGLI ELEMENTI NEUTRI: ESISTONO IN $\mathbb{R}$ DUE NUMERI DISTINTI 0 E 1, TALI CHE
$$a + 0 = a, \qquad a \cdot 1 = a;$$

- ESISTENZA DEGLI OPPOSTI E DEGLI INVERSI: $\forall a \in \mathbb{R}$, ESISTE UN NUMERO REALE, INDICATO CON $-a$, DETTO OPPOSTO DI a, TALE CHE
$$a + (-a) = 0.$$
$\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, ESISTE UN NUMERO REALE, INDICATO CON a^{-1}, DETTO INVERSO DI a, TALE CHE
$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

ASSIOMI RELATIVI ALL'ORDINAMENTO

ASSIOMI DI ORDINAMENTO: E' DEFINITA IN $\mathbb{R}$ UNA RELAZIONE $\leqslant$ (MINORE O UGUALE) TRA COPPIE DI NUMERI REALI, VERIFICANTE LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- DICOTOMIA: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, SI HA $a \leqslant b$ O $b \leqslant a$;
- PROPRIETÀ ANTISIMMETRICA: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, SE $a \leqslant b$ E $b \leqslant a$, ALLORA $a = b$;
- PROPRIETÀ TRANSITIVA: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, SE $a \leqslant b$ E $b \leqslant c$, ALLORA $a \leqslant c$;
- COMPATIBILITÀ CON LA SOMMA: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, SE $a \leqslant b$, ALLORA $a + c \leqslant b + c$, $\forall c \in \mathbb{R}$;
- COMPATIBILITÀ CON IL PRODOTTO: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, SE $a \leqslant b$, ALLORA $a \cdot c \leqslant b \cdot c$, $\forall c > 0$.

ASSIOMA DI COMPLETEZZA

SIANO A, B DUE SOTTOINSIEMI NON VUOTI DI $\mathbb{R}$ TALI CHE $a \leqslant b$ PER OGNI $a \in A$ E $b \in B$. ALLORA ESISTE ALMENO UN NUMERO REALE $c \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$a \leqslant c \leqslant b, \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B. \tag{1.1}$$

Definizione

L'INSIEME $\mathbb{R}$ VERIFICANTE GLI ASSIOMI RELATIVI ALLE OPERAZIONI, GLI ASSIOMI RELATIVI ALL'ORDINAMENTO E L'ASSIOMA DI COMPLETEZZA, DICESI CAMPO TOTALMENTE ORDINATO E COMPLETO. TALE CAMPO È DETTO CAMPO DEI NUMERI REALI.

OSSERVAZIONI

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE ESISTE SOSTANZIALMENTE UN UNICO CAMPO TOTALMENTE ORDINATO E COMPLETO.

DAGLI ASSIOMI RELATIVI ALLE OPERAZIONI DI SOMMA E PRODOTTO, SEGUE LA POSSIBILITÀ DI DEFINIRE LE OPERAZIONI DI SOTTRAZIONE E DIVISIONE (O QUOZIENTE) NEL SEGUENTE MODO:

$$a - b = a + (-b),$$

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}, \ b \neq 0.$$

DAGLI ASSIOMI RELATIVI ALLE OPERAZIONI E ALL'ORDINAMENTO SI POSSONO DEDURRE TUTTE LE USUALI REGOLE DI CALCOLO.

I NUMERI NATURALI

DAGLI ASSIOMI DEI NUMERI REALI SAPPIAMO CHE $0,\ 1 \in \mathbb{R}$: DUNQUE, TALI SARANNO ANCHE I NUMERI CHE SI OTTENGONO, A PARTIRE DA ESSI, MEDIANTE LE OPERAZIONI INTRODOTTE IN $\mathbb{R}$. IN PARTICOLARE, SONO NUMERI REALI $1 + 1 = 2$, $(1 + 1) + 1 = 3$, E COSÌ VIA. QUESTO SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$ SI DENOTA CON $\mathbb{N}$, E SI CHIAMA INSIEME DEI NUMERI NATURALI:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}\,.$$

PORREMO $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$.

I NUMERI INTERI RELATIVI E I NUMERI RAZIONALI

INDICHIAMO CON $\mathbb{Z}$ IL SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$ COSTITUITO DAGLI ELEMENTI DI $\mathbb{N}$, DAI LORO OPPOSTI E DALLO ZERO. TALE INSIEME VIENE DETTO INSIEME DEI NUMERI INTERI RELATIVI, COSICCHÈ

$$\mathbb{Z} = \{\pm n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

TUTTI I NUMERI DELLA FORMA $\frac{m}{n} = m \cdot n^{-1}$, CON $m \in \mathbb{Z}$ ED $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ VENGONO DETTI NUMERI RAZIONALI. L'INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI VIENE INDICATO CON $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

OSSERVAZIONI

OVVIAMENTE RISULTA

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

SU TALI SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$ SONO DEFINITE LE OPERAZIONI DI ADDIZIONE E DI MOLTIPLICAZIONE, E L'ORDINAMENTO, INTRODOTTI IN $\mathbb{R}$.

CIÒ NONOSTANTE, NESSUNO DI TALI INSIEMI VERIFICA TUTTI GLI ASSIOMI INTRODOTTI IN PRECEDENZA. AD ESEMPIO, $\mathbb{N}$ NON CONTIENE L'OPPOSTO DI ALCUN SUO ELEMENTO. L'INSIEME DEGLI INTERI $\mathbb{Z}$ CONTIENE L'OPPOSTO DI OGNI SUO ELEMENTO, MA I SOLI ELEMENTI DOTATI DI INVERSO IN TALE STRUTTURA SONO 1 E -1.

OSSERVAZIONI

L'INSIEME PIÙ RICCO É $\mathbb{Q}$: IN ESSO DIFATTI, SONO VERIFICATI GLI ASSIOMI RELATIVI ALLE OPERAZIONE E ALL'ORDINAMENTO, CIOÈ $\mathbb{Q}$ É UN CAMPO TOTALMENTE ORDINATO, MA NON RISULTA VERIFICATO L'ASSIOMA DI COMPLETEZZA. DIFATTI, DATI I DUE SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{Q}$

$$A = \left\{a \in \mathbb{Q} : a^2 \leqslant 2\right\}, \qquad B = \left\{b \in \mathbb{Q} : b^2 \geqslant 2, b > 0\right\}.$$

E' CHIARO CHE A, B SONO SEPARATI. PER L'ASSIOMA DI COMPLETEZZA, ESISTE UN NUMERO REALE c TALE CHE $a \leqslant c \leqslant b$ PER OGNI $a \in A$ E $b \in B$. SI DIMOSTRA CHE TALE NUMERO È UNICO E $c^2 = 2$; DENOTIAMO TALE NUMERO CON $\sqrt{2}$.

PROPRIETÀ DI DENSITÀ

UN'ALTRA IMPORTANTE PROPRIETÀ DI CUI GODE $\mathbb{R}$ É QUELLA RELATIVA ALLA DENSITÀ DI $\mathbb{Q}$ IN $\mathbb{R}$.

Proposizione

SIANO a, b DUE NUMERI REALI TALI CHE $a < b$, ALLORA ESISTE UN NUMERO RAZIONALE $q : a < q < b$.

OSSERVIAMO ESPLICITAMENTE CHE DI FATTO ESISTONO INFINITI RAZIONALI COMPRESI TRA A E B.

RAPPRESENTAZIONE DECIMALE DEI NUMERI RAZIONALI

E' BEN NOTO CHE I NUMERI RAZIONALI SI POSSONO RAPPRESENTARE FACENDO USO DELLA NOTAZIONE DECIMALE. AD OGNI NUMERO RAZIONALE SI PUÒ ASSOCIARE UN ALLINEAMENTO DECIMALE LIMITATO O PERIODICO. AD ESEMPIO

$$\frac{1}{2} = 0.5\,, \;\; \frac{1}{3} = 0.33333333... = 0.\overline{3}$$

VICEVERSA, SI PUÒ FAR VEDERE CHE AD OGNI ALLINEAMENTO DECIMALE LIMITATO O PERIODICO SI PUÒ ASSOCIARE UN NUMERO RAZIONALE, OVVERO, SI PUÒ DETERMINARE UNA FRAZIONE CHE LO GENERA (FRAZIONE GENERATRICE).

RAPPRESENTAZIONE DECIMALE DEI NUMERI REALI

È POSSIBILE FAR VEDERE CHE I NUMERI REALI SI POSSONO RAPPRESENTARE MEDIANTE ALLINEAMENTI DECIMALI IN CUI LA PARTE DECIMALE È ARBITRARIA (PERIODICA E NON). AD ESEMPIO $\sqrt{2}$ AMMETTE LA RAPPRESENTAZIONE DECIMALE

$$\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$$

GLI ALLINEAMENTI CHE NON SONO LIMITATI O PERIODICI SI DICONO NUMERI IRRAZIONALI.

$\sqrt{2}$ È IRRAZIONALE

E' BEN NOTO CHE IL NUMERO $\sqrt{2}$ È IRRAZIONALE; PER DIMOSTRARLO SI PUÓ PROCEDERE PER ASSURDO, NEL SEGUENTE MODO. SUPPONIAMO CHE NON SIA IRRAZIONE E QUINDI

$$\sqrt{2} = p/q,$$

DOVE P E Q SONO INTERI E DOVE SI PUÒ ESIGERE CHE P E Q SIANO PRIMI FRA LORO. MOLTIPLICANDO MEMBRO A MEMBRO PER Q ED ELEVANDO AL QUADRATO, SI TROVA:

$$2q^2 = p^2.$$

$\sqrt{2}$ È IRRAZIONALE

DALL'ULTIMA RELAZIONE DEDUCIAMO CHE p^2 É PARI E, PERCIÓ, ANCHE P É PARI. INFATTI, SE P NON FOSSE MULTIPLO DI 2, NEMMENO p^2 POTREBBE ESSERLO. PONIAMO ALLORA: $p = 2r$; SOSTITUENDO SI HA

$$2q^2 = 4r^2, \qquad \Longrightarrow \qquad q^2 = 2r^2.$$

DA QUESTA RELAZIONE RICAVIAMO COME PRIMA CHE Q É PARI; DUNQUE P E Q SONO ENTRAMBI PARI: ASSURDO PERCHÉ LI ABBIAMO SUPPOSTI PRIMI FRA LORO.

VALORE ASSOLUTO

SIA $x \in \mathbb{R}$. IL VALORE ASSOLUTO O MODULO DI x È DEFINITO DA :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{SE } x \geqslant 0 \\ -x & \text{SE } x < 0 \end{cases}$$

PER ESEMPIO, $|-5| = 5$ E $|5| = 5$. DALLA DEFINIZIONE SEGUONO:

- $|x| \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; E $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|x| = |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- $|xy| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$;
- $\forall a \geqslant 0,\ |x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$;
- $\forall a \geqslant 0,\ |x| \geqslant a \Leftrightarrow x \leqslant -a$ O $x \geqslant a$.

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

DALLE PRECEDENTI DISUGUAGLIANZE SEGUE LA SEGUENTE:

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

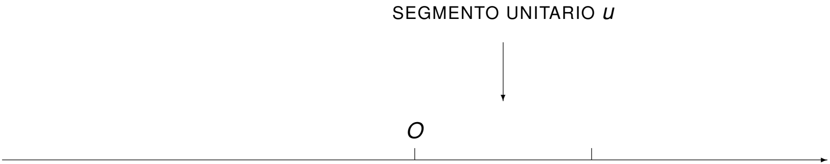
$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

OSSERVAZIONE

LA PROPRIETÀ TRIANGOLARE È NOTA CON QUESTO NOME POICHÈ TRADUCE IN TERMINI ANALITICI LA PROPRIETÀ GEOMETRICA CHE IN UN TRIANGOLO LA LUNGHEZZA DI UN LATO È MINORE DELLA SOMMA DELLE LUNGHEZZE DEGLI ALTRI DUE.

RETTA ORIENTATA

E' POSSIBILE IDENTIFICARE IL CAMPO $\mathbb{R}$ DEI NUMERI REALI CON L'INSIEME DEI PUNTI DI UNA RETTA, GRAZIE ALL' ASSIOMA DI COMPLETEZZA DEI NUMERI REALI E ALL'ASSIOMA DI CONTINUITÀ DELLA RETTA. CONSIDERIAMO A TAL FINE UNA RETTA ORIENTATA r, CIOÈ UNA RETTA SULLA QUALE È STATO FISSATO UN PUNTO O DETTO ORIGINE, UN VERSO POSITIVO ED UNA UNITÀ DI MISURA u.



(RETTA ORIENTATA)

RETTA REALE

DUNQUE AD OGNI PUNTO P SULLA RETTA CORRISPONDE UN UNICO $x \in \mathbb{R}$ CHE È LA SUA ASCISSA E, VICEVERSA, AD OGNI NUMERO $x \in \mathbb{R}$ SI PUÒ ASSOCIARE UN UNICO PUNTO P SULLA RETTA LA CUI ASCISSA È x.

QUANDO SU UNA RETTA ORIENTATA SI IDENTIFICANO I PUNTI CON I NUMERI REALI SI PARLA DI RETTA REALE.

RETTA REALE

LA SEMIRETTA DI ORIGINE O CONTENENTE I PUNTI DI ASCISSA POSITIVA (NEGATIVA) È DETTA SEMIRETTA POSITIVA (NEGATIVA).

SE x_1 È L'ASCISSA DI UN PUNTO P E x_2 È L'ASCISSA DI UN PUNTO Q, ALLORA $x_1 < x_2$ SE E SOLO SE P PRECEDE Q SULLA RETTA NEL VERSO POSITIVO PREFISSATO.

SIANO P E Q, RISPETTIVAMENTE DI ASCISSE x_1 E x_2, DUE PUNTI SULLA RETTA REALE r. LA DISTANZA DI P DA Q VALE:

$$|\overline{PQ}| = |x_1 - x_2|.$$

ESERCIZI

- RISCRIVERE IN ORDINE CRESCENTE I SEGUENTI NUMERI:

$$5/2,\ \ 2/3,\ \ 25,\ \ 2,\ \ 5,\ \ 0,\ \ -1,\ \ 0.91,\ \ -3,\ \ 0.19,\ \ 0.003,\ \ 1/3.$$

- TROVARE UNA FRAZIONE STRETTAMENTE COMPRESA TRA LE SEGUENTI COPPIE DI FRAZIONI:

$$3/7,\quad 4/5,\qquad (\text{SOL. } 1/2);$$

$$2/5,\quad 3/7,\qquad (\text{SUGG. SCRIVERLE COME } x/35 \text{ E } x/70;\ \text{SOL. } 29/70);$$

$$1/2,\quad 4/9,\qquad (\text{SOL. } 5/11).$$

ESERCIZI

- ORDINARE IN MODO CRESCENTE LE VARIE DISTANZE TRA I PUNTI P, Q E R DI ASCISSA

$$x_P = 5, \qquad x_Q = 3, \qquad x_R = -3, \qquad \big(\text{SOL. } |\overline{PQ}| = 2,\ |\overline{QR}| = 6,\ |\overline{PR}| = 8\big).$$

- DIMOSTRARE CHE IL NUMERO $\sqrt{3}$ È IRRAZIONALE COME FATTO IN PRECEDENZA PER $\sqrt{2}$.