

Pre-corso di Fisica

Angelo Riccio

Settembre 2022

*Do what you think is interesting, do something
that you think is fun and worthwhile, because
otherwise you won't do it well anyway.*

—Brian W. Kernighan

Indice

1	GRANDEZZE FISICHE ED UNITA' DI MISURA	5
1.1	Introduzione	5
1.2	Grandezze fisiche	5
1.3	Unità di misura	6
1.3.1	Multipli e sottomultipli	8
1.3.2	Potenze di dieci	9
1.4	Calcolo dimensionale	10
1.5	Cambio di unità di misura	12
1.6	Pensare per ordini di grandezza	13
1.7	Esponenti frazionari	14
2	MISURE ED INCERTEZZE	15
2.1	Introduzione	15
2.2	Strumenti di misura	15
2.3	Cifre significative	17
2.4	Notazione scientifica	18
2.5	Proprietà degli strumenti	20
2.6	Errori casuali ed errori sistematici	22
2.7	Migliore stima di una grandezza	24
2.8	Stima dell'errore di misura	25
2.9	Arrotondamenti	26
2.10	Propagazione dell'incertezza	27
2.11	Errore di una somma	28
2.12	Errore di un prodotto	29
2.12.1	Errore del prodotto di una variabile con una costante	29
2.12.2	Errore del prodotto di due variabili	29
3	GEOMETRIA ANALITICA	31
3.1	Coordinate cartesiane	31
3.2	Sistema di coordinate cartesiane	31
3.3	La distanza fra due punti	34
3.4	Il radiante	36
3.5	Seno e coseno	37

Indice

3.6	Sistema di coordinate polari	38
3.7	Sistema di coordinate cilindriche	39
3.8	Sistema di coordinate sferiche	40
4	INTRODUZIONE ALLA MECCANICA	42
4.1	Elementi di cinematica ed analisi vettoriale	42
4.1.1	Introduzione	42
4.1.2	Posizione e moto	42
4.1.3	Vettore di posizione	43
4.2	Algebra vettoriale	45
4.2.1	Prodotto di un vettore per uno scalare	45
4.2.2	Somma di vettori	46
4.2.3	Differenza tra vettori	48
4.2.4	Decomposizione in componenti	48
4.2.5	Moltiplicazione tra vettori: il prodotto scalare	51
4.2.6	Moltiplicazione tra vettori: il prodotto vettoriale	54

1 GRANDEZZE FISICHE ED UNITA' DI MISURA

1.1 Introduzione

In questo Capitolo ci occuperemo di descrivere i concetti alla base della possibilità di studiare sperimentalmente un fenomeno fisico. Inizieremo dal descrivere cosa si intenda per grandezza fisica, per poi descrivere le principali unità di misura, introducendo infine il concetto di dimensione fisica e di calcolo dimensionale.

1.2 Grandezze fisiche

In linea del tutto generale possiamo definire grandezza fisica una qualsiasi proprietà di un sistema che possa essere determinata quantitativamente. La determinazione quantitativa passa attraverso un'operazione di misura, in cui sostanzialmente si confronta quantitativamente la grandezza con una di riferimento, presa come unità di misura, al fine di determinare quanto la grandezza di interesse sia più grande o più piccola di quella unitaria.

Tale confronto può avvenire direttamente (ad esempio quando si misura la lunghezza di un oggetto con un metro) oppure indirettamente, misurando una grandezza legata a quella di interesse (ad esempio quando si misura la temperatura utilizzando un termometro, che traduce in temperatura l'espansione di un fluido termometrico all'interno di un capillare graduato).

La generalità della definizione data di grandezza fisica rende semplice da comprendere come il numero di possibili grandezze fisiche sia estremamente elevato (limitandoci all'ambito dello studio del moto dei corpi sono grandezze fisiche la lunghezza, il tempo, la massa, la velocità, l'accelerazione, la forza, l'energia, ...).

Durante l'evoluzione delle conoscenze fisiche si è compreso però che è possibile individuare un numero abbastanza limitato di grandezze fondamentali alle quali ogni altra grandezza può essere ricondotta. La scelta delle grandezze fondamentali è per forza di cose convenzionale, e giustificata in molti casi dal percorso storico seguito nello studio di vari fenomeni fisici.

Questo percorso di individuazione delle grandezze fondamentali, con le relative unità di misura, è iniziato solo nella seconda metà del '800 e ha portato progressivamente a considerare come *grandezze fondamentali*:

1 GRANDEZZE FISICHE ED UNITA' DI MISURA

1. la lunghezza, la massa e il tempo,
2. la resistenza elettrica, successivamente rimpiazzata dalla corrente elettrica,
3. la temperatura e l'intensità luminosa,
4. ed infine la quantità di materia.

Tutte le altre grandezze, riconducibili a quelle fondamentali, sono dette *grandezze derivate*.

1.3 Unità di misura

La grande numerosità di grandezze fisiche comporta necessariamente un numero elevato di corrispondenti unità di misura.

In linea di principio l'individuazione delle relazioni tra ogni grandezza e le grandezze fondamentali consentirebbe la quantificazione di ogni grandezza ricorrendo unicamente alle unità di misura delle grandezze fondamentali.

Tuttavia nella pratica questo non sempre avviene a causa della grande importanza di alcune grandezze derivate. Ad esempio in meccanica le forze, pur esprimibili in funzione di massa, lunghezza e tempo, hanno un'unità di misura propria (Newton), così come l'energia (Joule) e la potenza (Watt).

Oltre a questo aspetto la numerosità delle unità di misura esistenti è anche legata alla possibilità di quantificare ogni grandezza confrontandola con diversi sistemi a cui si attribuisce un valore unitario della grandezza, che fungono da unità di misura. Una lunghezza può essere misurata in metri, in multipli del metro (come il chilometro, pari a 1000 metri), o in suoi sottomultipli (ad esempio il centimetro, pari a un centesimo di metro), oppure ricorrendo ad unità indipendenti dal metro, come quelle usate nel mondo anglosassone, dove sono diffuse unità come pollici, piedi, yard e miglia (queste ultime peraltro con diverso valore per le miglia marine e quelle terrestri).

L'individuazione di unità di misura chiaramente definite ed universalmente accettate ha comportato un lavoro di standardizzazione compiuto in parallelo a quello appena visto per le grandezze fondamentali. Con l'avanzamento della conoscenza scientifica, accompagnata dalla necessità intrinseca di confrontare quantitativamente risultati ottenuti in contesti diversi, è diventato invece necessario definire univocamente delle unità di misura di validità generale. Una volta individuate le unità di misura di ogni grandezza fondamentale è stato necessario definire il sistema in cui la grandezza in oggetto abbia valore unitario, da utilizzare come campione di riferimento nella realizzazione degli strumenti. Tali sistemi sono in continua evoluzione a causa del continuo progresso scientifico che richiede un crescente grado di accuratezza delle misurazioni. La realizzazione di un campione per il quale la proprietà in

1 GRANDEZZE FISICHE ED UNITA' DI MISURA

questione sia unitaria comporta delle indeterminazioni sul valore dell'unità di misura, che limita di conseguenza l'accuratezza con cui può essere fatta ogni misura.

Il sistema di unità di misura internazionalmente accettato è chiamato Sistema Internazionale (SI). Qui di seguito descriveremo le unità di misura del SI per le tre grandezze fondamentali che si incontrano in Meccanica, cioè lunghezza, tempo e massa.

Lunghezza: l'unità di misura della lunghezza è il *metro*.

La prima definizione di metro è stata data nel 1791 dall'Accademia Francese delle Scienze: *Il metro è pari alla decimilionesima parte della distanza tra polo Nord ed Equatore misurata lungo il meridiano terrestre passante per Parigi.*

Sulla base di questa definizione venne realizzata nel 1799 una barra di platino-iridio con due tacche a distanza di un metro. Successivamente ci si rese conto che legare la definizione di metro alla misura di lunghezza del meridiano terrestre, estremamente complessa da svolgere con buona accuratezza, non rappresentava una scelta particolarmente brillante e si decise, nel 1872, di prendere come riferimento la barra di platino iridio del 1799. L'introduzione di nuove tecniche di lavorazione meccanica consentì di migliorare la tecnica di realizzazione del metro campione, portando nel 1889 a ridefinire il metro come *la distanza tra le linee incise al microscopio sulla barra di platino iridio conservata dal 22 settembre 1889 presso il BIPM (Bureau International des Poids et Mesures di Sèvres, in Francia).*

Tale definizione è rimasta in vigore fino al 1960, quando l'evoluzione delle tecniche di misurazione spettroscopiche ha consentito misurazioni della lunghezza d'onda della luce con accuratezze in grado di migliorare quella di realizzazione del metro campione. In particolare il metro venne ridefinito in relazione alla lunghezza d'onda che un particolare atomo emette quando perde energia in seguito ad un processo di eccitazione esterno. Il metro venne quindi ridefinito come *la lunghezza pari a 1 650 763,73 volte la lunghezza d'onda nel vuoto della radiazione elettromagnetica emessa da atomi di Krypton 86 nella transizione tra i livelli $2p^{10}$ e $5d^5$.* Questa definizione consente un'accuratezza di sei parti su dieci milioni.

Più di recente, nel 1983, il metro è stato nuovamente ridefinito sfruttando la capacità di misurare la velocità della luce con accuratezza fino a quattro parti per miliardo, come *la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un tempo pari a $1/299\,792\,458$ secondi*, e questa definizione è stata confermata nel 2018 dalla 26° Conferenza Generale dei Pesi e Misure (CGPM).

Massa: l'unità di misura della massa è il *chilogrammo*.

Il chilogrammo è l'unica unità di misura che ha conservato la definizione originaria del 1889: *il chilogrammo è la massa di un cilindro di altezza e diametro pari a 0,039 m di una lega di platino-iridio depositato presso il BIPM.*

1 GRANDEZZE FISICHE ED UNITA' DI MISURA

Nel 2011, alla 24° Conferenza Generale dei Pesi e Misure, si è deciso di valutare possibili sostituzioni dell'unità di massa perché *“per quanto il prototipo internazionale abbia ben servito la scienza e la tecnologia fino da quando è stato introdotto dalla prima riunione del CGPM nel 1889, ha diverse importanti limitazioni, di cui una delle più significative è che la sua massa non è esplicitamente legata a nessuna proprietà invariante della natura e come conseguenza la sua stabilità a lungo termine non è garantita”*. La soluzione è liberarsi dal prototipo internazionale sviluppando una realizzazione pratica del chilogrammo riproducibile in diversi laboratori seguendo una procedura specifica ben definita, in termini di costanti fisiche fondamentali. Attualmente nessuna alternativa ha ancora raggiunto l'incertezza necessaria per fare meglio del chilogramma standard conservato presso il BIPM.

Tempo: l'unità di misura del tempo è il *secondo*.

Nella prima versione il secondo era definito come *un tempo pari a 1/86400 della durata di un giorno solare medio*. Tale definizione, apparentemente ragionevole, venne successivamente messa in discussione dall'osservazione che la durata del giorno solare medio non è stabile, e che la rotazione terrestre rallenta lentamente a causa delle maree.

Nel 1956 venne deciso di legare la definizione del secondo alla frequenza della radiazione emessa dagli atomi in seguito a transizioni tra stati elettronici diversi (la frequenza è il reciproco del periodo, cioè del tempo impiegato da un'onda a raggiungere due massimi consecutivi). La definizione attuale è stata adottata nel 1967, fissando il secondo come *la durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di Cesio 133*.

1.3.1 Multipli e sottomultipli

Nel momento in cui si debba esprimere il valore di una grandezza che risulta molto più grande o molto più piccola dell'unità di misura ci si trova davanti al problema di dover esprimere il valore della grandezza ricorrendo a numeri con molte cifre. Ad esempio la lunghezza dell'Equatore Terrestre è di circa 40 milioni di metri, quindi 40,000,000 m, mentre gli atomi hanno delle dimensioni dell'ordine del decimiliardesimo di metro, quindi 0.000 000 000 1 m.

Il primo metodo per ridurre il numero di cifre da utilizzare è quello di introdurre delle unità di misura più grandi (dette multipli) o più piccole (dette sottomultipli) di quelle previste dal SI, in modo da inglobare nel simbolo dell'unità di misura quanti più zeri possibili. Un elenco dei nomi dei principali multipli e sottomultipli più frequentemente usati, con l'indicazione del valore rispetto all'unità di misura principale, è riportato in Tabella 1.1.

1 GRANDEZZE FISICHE ED UNITA' DI MISURA

multipli			sotto-multipli		
prefisso	simbolo	val. relativo	prefisso	simbolo	val. relativo
chilo	k	1 000	milli	m	0.001
mega	M	1 000 000	micro	μ	0.000 000 1
giga	G	1 000 000 000	nano	n	0.000 000 000 1
tera	T	1 000 000 000 000	pico	p	0.000 000 000 000 1
peta	P	1 000 000 000 000 000	femto	f	0.000 000 000 000 000 1

Tabella 1.1: Prefissi di alcuni multipli e sotto-multipli

Con riferimento alla Tabella 1.1 la lunghezza dell'Equatore è circa pari a 40 Mm, mentre gli atomi hanno dimensioni dell'ordine di 0.1 nm.

1.3.2 Potenze di dieci

Il metodo indicato in Tabella 1.1 di specificare il valore relativo dei multipli e sotto-multipli è goffo e ingombrante. Per superare questa difficoltà nell'esprimere numeri grandi o piccoli, usiamo una notazione compatta che fa uso delle «potenze di dieci».

Moltiplicando 10 per se stesso diverse volte, troviamo

$$10 \times 10 = 100 = 10^2$$

$$10 \times 10 \times 10 = 1000 = 10^3$$

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000 = 10^5$$

Il numero di volte per cui 10 viene moltiplicato per se stesso (cioè, il numero di zeri che appaiono nella risposta) viene usato come apice di 10. Questo apice viene detto esponente di 10 o potenza alla quale 10 è elevato. Inoltre,

$$10^1 = 10$$

$$10^0 = 1$$

Se esprimiamo due numeri come potenze di dieci e li moltiplichiamo fra loro, otteniamo

$$10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$$

$$\frac{10^2}{10^3} = 10^{2-3} = 10^{-1}$$

La regola generale per questo tipo di operazione è

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m+n} \quad (1.1)$$

1 GRANDEZZE FISICHE ED UNITA' DI MISURA

multipli			sotto-multipli		
prefisso	simbolo	val. relativo	prefisso	simbolo	val. relativo
chilo	k	10^3	milli	m	10^{-3}
mega	M	10^6	micro	μ	10^{-6}
giga	G	10^9	nano	n	10^{-9}
tera	T	10^{12}	pico	p	10^{-12}
peta	P	10^{15}	femto	f	10^{-15}

Tabella 1.2: Prefissi di alcuni multipli e sotto-multipli espressi come potenze di 10

Le stesse regole per l'uso di esponenti negativi valgono anche per i numeri con base diversa da 10. Per esempio.

$$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$$

Usando le potenze di 10, i valori indicati nella Tabella 1.1 possono essere indicati in maniera compatta come descritto nella Tabella 1.2.

1.4 Calcolo dimensionale

La capacità di quantificare le grandezze fisiche porta inevitabilmente alla possibilità di confrontarne i valori numerici, ad esempio per determinare se il valore di una data proprietà del sistema è maggiore o minore di quello di un'altra.

Mentre nel confronto tra numeri ha sempre senso chiedersi quale tra due numeri sia il più grande, o se due numeri siano uguali, il confronto dei valori assunti da diverse proprietà di un sistema ha senso solo se le tali proprietà sono omogenee, cioè se entrambe sono grandezze dello stesso tipo. Questo concetto viene sviluppato in Fisica introducendo il concetto di dimensione fisica, che esprime la relazione della grandezza considerata con quelle fondamentali. Per esprimere le dimensioni di una generica grandezza G si usa il seguente formalismo:

$$[G] = [L]^\alpha [M]^\beta [T]^\gamma$$

dove L , M , e T rappresentano lunghezza, massa e tempo, rispettivamente, e α , β e γ sono degli opportuni coefficienti. Se la grandezza non dipende da una o più grandezze fondamentali il rispettivo coefficiente è pari a 0. Ad esempio se la grandezza in questione è una lunghezza si avrà $[G] = [L]^1 [M]^0 [T]^0$ o più semplicemente $[G] = [L]$. Se G fosse l'area di una superficie, che si misura in metri quadri, si avrebbe $[G] = [L]^2$ e così via.

La capacità di esprimere nel formalismo appena visto una grandezza in funzione di quelle fondamentali consente anche immediatamente di individuarne le corrette

unità di misura, che sono quelle delle rispettive grandezze, elevate ad un coefficiente uguale a quello presente nell'espressione dimensionale. Se G è una lunghezza si misura in $m^1 kg^0 s^0$, o più semplicemente in m , e quindi in metri. Se G è un'area, dimensionalmente è il quadrato di una lunghezza, e pertanto si misura nell'unità delle lunghezze, il metro, elevato al quadrato, m^2 .

Se supponiamo che G sia una velocità, grandezza che dipende dal rapporto tra lo spostamento che compie un corpo e il tempo che impiega, considerato che gli spostamenti sono dimensionalmente delle lunghezze si ha $[G] = [L]^1 [M]^0 [T]^{-1} = [L]^1 [T]^{-1}$. Pertanto le velocità, essendo rapporti tra lunghezze e tempo, andranno misurate in ms^{-1} , cioè in metri al secondo (l'unità di misura convenzionale per le auto, i chilometri all'ora, non è quindi un'unità compatibile con il SI).

Un secondo motivo di interesse del calcolo dimensionale è legato al fatto che consente di verificare rapidamente se le relazioni in cui si uguagliano, o confrontano quantitativamente, due o più grandezze sono con certezza sbagliate. Infatti, dato che è possibile confrontare tra loro solo grandezze omogenee, quindi con le stesse dimensioni fisiche, il calcolo dimensionale dei due membri di un'uguaglianza (o di una disuguaglianza), consente di concludere che la relazione è con certezza sbagliata se le due grandezze hanno dimensioni diverse.

Negli esercizi questo è uno strumento di verifica molto utile, perché spesso una grandezza di interesse si calcola, in funzione di altre, dopo molti passaggi matematici, in cui le possibilità di commettere errori sono tante. Se alla fine dei calcoli si verifica che la grandezza calcolata non ha le dimensioni attese, si può essere certi che si è sbagliato qualcosa.

Ad esempio, supponiamo di dover calcolare lo spostamento di una particella Δx , conoscendone la massa M , la velocità v e la durata di un certo intervallo di tempo Δt e di trovare alla fine dei calcoli $\Delta x = Mv\Delta t$. Un semplice controllo dimensionale porta subito a notare che la formula è sicuramente sbagliata, perché il primo membro è una lunghezza ($[\Delta x] = [L]$), mentre il secondo no ($[Mv\Delta t] = [M][L][T]^{-1}[T] = [M][L]$). Poiché una lunghezza non può essere confrontata con il prodotto di una massa per una lunghezza, di sicuro nei calcoli è stato sbagliato qualcosa.

È importante sottolineare, però, che mentre è sempre vero che se i due membri di un'uguaglianza sono dimensionalmente non omogenei l'uguaglianza è con certezza sbagliata, il contrario in genere non vale. Questo deriva dal fatto che i possibili errori sono tanti e diversi tra loro, e quindi si può arrivare a relazioni sbagliate indipendentemente dalle dimensioni.

Resta il fatto che la verifica dimensionale porta via pochissimo tempo, e che vale la pena di effettuarla sempre, perché poter individuare con certezza alcuni errori è pur sempre meglio di non poterne individuare nessuno.

Come ulteriore suggerimento nello svolgimento dei calcoli, anche legato alla possibilità di eseguire alla fine una verifica dimensionale, è molto importante portare a

termine tutti i calcoli lasciando ogni grandezza indicata con un opportuno simbolo, senza sostituire valori numerici se non nel passaggio finale. Innanzitutto questo rende evidente alla fine le grandezze da cui dipende quella che si sta calcolando, consentendo verifiche di consistenza dimensionale. In secondo luogo avere un risultato espresso in forma simbolica dà una validità generale ai calcoli svolti, che possono essere sfruttati per ricalcolare la grandezza di interesse per diversi valori numerici delle grandezze da cui dipende. Infine, ma non meno importante, l'indicazione simbolica delle grandezze consente di controllare lo svolgimento dei calcoli per individuare eventuali errori, verifica che diventa invece impossibile se dal primo passaggio si sostituiscono i valori numerici.

1.5 Cambio di unità di misura

Nel momento in cui si esprimano i valori di una grandezza ricorrendo ad unità diverse da quelle del SI è sempre buona norma convertire, come prima cosa, tali valori in quelli delle unità del SI per almeno due motivi.

Innanzitutto nel momento in cui si deriva il valore di una grandezza in funzione di alcuni valori assegnati la presenza di unità di misura anomale complica inutilmente i calcoli, costringendo a tenere in considerazione non solo i valori delle grandezze assegnate, ma anche l'unità utilizzata. Considerando un semplice esempio supponiamo di voler determinare il rapporto tra la lunghezza dei due lati di un comune foglio formato A4 (quello normalmente usato dalle stampanti), sapendo che i lati sono lunghi $L_1 = 0.297$ m e $L_2 = 0.21$ m. Il rapporto L vale $L_1/L_2 = 0.297 \text{ m}/0.21 \text{ m} \approx 1.41$. Se le due lunghezze sono espresse nella stessa unità di misura, nel calcolo del rapporto l'unità di misura si semplifica, consentendo di calcolare il rapporto semplicemente come rapporto dei valori forniti. Se invece una delle due lunghezze, ad esempio L_1 , fosse espressa in centimetri, calcolando il rapporto tra i valori numerici avremmo $L_1/L_2 = 0.297 \text{ m}/21 \text{ cm}$, e dovremmo tener conto delle dimensioni disomogenee nel prosieguo dei calcoli. Per evitare complicazioni di questo tipo è consigliabile innanzitutto convertire i due dati che hanno unità diverse in un'unità comune, e successivamente effettuare il calcolo utilizzando i soli valori numerici dimensionalmente omogenei, senza più doverci preoccupare delle unità di misura.

Il secondo motivo per cui è sempre utile l'utilizzo delle sole unità di misura del SI è che alcune grandezze derivate hanno delle unità di misura proprie. Ad esempio le forze, che si potrebbero misurare in kgms^{-2} , nella pratica si misurano in *Newton* (si denota con N) in onore di uno dei padri della Meccanica, dove si definisce $1N = 1\text{kgms}^{-2}$. Nel momento in cui si calcoli una qualsiasi grandezza derivata, che è dotata di un'unità di misura propria, se si parte da grandezze espresse nelle unità

del SI si ottiene il corretto valore nella corrispondente unità di misura limitandosi a considerare i soli valori numerici.

La conversione da una generica unità di misura alla corrispondente unità del SI è in genere molto semplice.

1.6 Pensare per ordini di grandezza

Qualche volta ci si riferisce a una potenza di 10 come a un ordine di grandezza. Così, «le diecimila lire sono un ordine di grandezza maggiore delle mille lire e due ordini di grandezza (un fattore 100) maggiore di una moneta da cento lire».

Più frequentemente, la locuzione *ordine di grandezza* viene applicata in senso approssimato. Così, «la Terra ha una massa che è due ordini di grandezza in più di quella della Luna» (in realtà, la massa della Terra è 81 volte la massa della Luna). Oppure, poiché il metro è 100 centimetri e la iarda (yard) è 91.44 centimetri, diciamo «il metro e la iarda sono dello stesso ordine di grandezza».

Poiché trattiamo frequentemente grandezze fisiche molto grandi o molto piccole, è estremamente utile coltivare l'abitudine mentale di riferirci a tali grandezze per mezzo degli ordini di grandezza. Ogni qual volta non conosciamo il valore preciso di una certa grandezza sarà utile conoscerne l'ordine di grandezza. Per esempio, il diametro di un atomo è dell'ordine di 10^{-8} cm. Se facendo un calcolo ottenessimo un risultato per le dimensioni di un atomo, diciamo, di 10^{-5} cm, allora sapremmo immediatamente che c'è un errore di calcolo!

Useremo il simbolo $\sim$ per indicare «è dell'ordine di grandezza di». Spesso includiamo un numero in aggiunta alla potenza di 10, sicché ne risulterà un valore più preciso (ma ancora approssimato). Alcuni tipici ordini di grandezza sono i seguenti:

- a) Vi sono $\sim 3 \times 10^7$ secondi in un anno
- b) La luce attraversa ~ 1 piede in 10^{-9} secondi
- c) Il diametro di un nucleo è $\sim 10^{-4}$ volte il diametro di un atomo
- d) La massa del Sole è $\sim 3 \times 10^5$ volte la massa della Terra
- d) La massa di un atomo di idrogeno è $\sim 2 \times 10^3$ volte la massa di un elettrone

Nessuno dei precedenti valori è *preciso*, ma una stima del valore *approssimato* della grandezza permette una rapida valutazione della situazione e può spesso essere usata per determinare l'affidabilità di un particolare calcolo.

1.7 Esponenti frazionari

Un esponente intero rappresenta la potenza alla quale il numero è elevato; per esempio, $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$ oppure $3^2 = 3 \times 3 = 9$. Anche gli esponenti frazionari hanno un significato e questi esponenti si maneggiano secondo le stesse regole degli esponenti interi. Per esempio,

$$4^{1/2} \times 4^{1/2} = 4^{1/2+1/2} = 4^1 = 4$$

Negli esempi precedenti, si può notare che se un numero $N^{1/m}$ viene elevato alla potenza m , il risultato è lo stesso N . Chiamiamo $N^{1/m}$ radice m -esima di N , e usiamo pure la notazione equivalente,

$$\sqrt[m]{N} = N^{1/m} \quad (1.2)$$

Se $m = 2$, questo fattore viene usualmente soppresso dal segno di radice, $\sqrt{}$. Per esempio,

$$4 \times 4 = 4^2 = 16, \text{ per cui } \sqrt{16} = 16^{1/2} = 4$$

Esponenti frazionari più complicati si maneggiano nel modo seguente:

$$4^{3/2} = 4^{(1/2 \times 3)} = (4^{1/2})^3 = (2)^3 = 8$$

ossia,

$$4^{3/2} = 4^{(3 \times 1/2)} = (4^3)^{1/2} = (64)^{1/2} = 8$$

Si noti che il *numeratore* dell'esponente frazionario rappresenta sempre una potenza alla quale il numero è elevato e il *denominatore* rappresenta sempre la radice del numero.

$$\sqrt[3]{8000} = (8000)^{1/3} = (2^3 \times 10^3)^{1/3} = 2 \times 10 = 20$$

L'equazione $\sqrt{4} = 2$ significa che $2^2 = 2 \times 2 = 4$. Ma è pure vero che $(-2) \times (-2) = 4$, per cui potremmo ugualmente scrivere $\sqrt{4} = -2$. La radice quadrata di un qualunque numero reale positivo presenta sempre due soluzioni!

2 MISURE ED INCERTEZZE

2.1 Introduzione

In questo Capitolo descriveremo come si determina in pratica il valore di una grandezza, e quali problematiche siano legate a questa operazione. Descriveremo pertanto come avviene una misura, quali siano le caratteristiche essenziali di uno strumento di misura, entro che limiti una misura consenta di conoscere realmente il valore di una grandezza, e come la capacità di quantificare una grandezza si ripercuota sui valori delle grandezze da essa derivate.

2.2 Strumenti di misura

Per quantificare il valore di una qualsiasi grandezza è necessario confrontare il sistema oggetto del proprio studio con il sistema di riferimento, cioè quello in cui la grandezza di interesse assume valore 1 unità di misura.

All'atto pratico il sistema che compie questa operazione è lo *strumento di misura*. Lo strumento di misura è in generale definito come una scatola nera, che converte le informazioni che ricava dall'interazione con un sistema in un numero che ne quantifica una data proprietà. In linea generale, quindi, durante la misura lo strumento e il sistema devono venire in contatto (più correttamente interagire) affinché lo strumento abbia modo di determinare quanto valga una data caratteristica del sistema.

Per capire come effettuare la scelta dello strumento, e come la scelta influenzi la nostra capacità di conoscere quantitativamente il valore di una data grandezza può essere utile considerare un semplice esempio.

Consideriamo nuovamente un foglio formato A4 e supponiamo di volerne determinare la lunghezza del lato più corto. Anche senza aver seguito un corso introduttivo di fisica, per eseguire questa misura si sceglierà ragionevolmente un righello, o in genere un metro. Per effettuare la misura è necessario allineare il primo estremo del metro a un'estremità di uno dei lati corti del foglio, determinando poi a quale tacca del metro è più vicina la seconda estremità. Se non si commettono errori nell'allineamento del metro si troverà come valore 21.0 cm, fornendo apparentemente la risposta cercata.

La realtà però è un po' più complessa, perché ora ci dobbiamo porre una domanda: *quante cifre ha senso specificare nel quantificare una grandezza?* Da un punto nume-

rico 21.0 cm è uguale a 21 cm, o anche a 21.000 cm, ma da un punto di vista fisico sono equivalenti? La risposta è negativa, perché scrivendo solo 21 cm non diamo alcuna informazione sul valore delle eventuali cifre decimali, mentre scrivendo 21.000 cm intendiamo che le tre prime cifre dopo la virgola sono nulle.

Qual è la scelta corretta, tenendo conto di come abbiamo effettuato la misura?
In altri termini, *entro che limiti un'operazione di misura ci consente di conoscere il valore di una data grandezza?*

In generale nessuno strumento e nessuna operazione di misura possono fornire il valore esatto di una grandezza, e ogni volta che si compie la misura si riesce a conoscere il valore di una grandezza solo fino ad un certo limite. Tale limite dipende da vari fattori sostanzialmente legati al tipo di strumento che si usa, e in certi termini anche al modo in cui lo si usa. Nell'esempio dell'uso del metro la misura si basa sull'identificazione della tacca del metro a cui è più vicina un'estremità del foglio. Dato che le tacche sul metro sono distanziate tra loro di 1 mm è assolutamente irragionevole sperare che la misura consenta di apprezzare il valore della lunghezza fino ai centesimi di millimetro (come risulterebbe dalla scrittura $L = 21.000$ cm). Al contrario se scrivessimo semplicemente $L = 21$ cm, non daremmo nessuna informazione sulla lunghezza del foglio alla scala dei millimetri, nonostante il metro consenta di misurarli.

Queste considerazioni consentono di introdurre i concetti particolarmente importanti di *errore (o incertezza) di misura* e di *cifre significative*. La denominazione errore di misura è molto diffusa, ma va precisato che, mentre in italiano errore e sbaglio sono sinonimi, affermare che una misura è affetta da errore non vuol dire che si è sbagliato qualcosa, ma semplicemente che l'operazione di misura comporta intrinsecamente un'incertezza sul valore ottenuto. Il valore dell'errore deve consentire di determinare in quale intervallo si è certi che cada il valore reale della grandezza (in tal caso si parla di errore massimo).

Per convenzione l'errore è positivo, e si indica con lo stesso simbolo che indica la grandezza, preceduto da una lettera greca, la delta maiuscola, Δ . Nel caso dell'esempio precedente, quando si misura con un metro, o in generale con uno strumento dotato di una scala graduata, come valore della misura si dà quello corrispondente al valore della tacca più vicina al riferimento (nel nostro caso il bordo del foglio). Dicendo che la lunghezza è 21.0 cm stiamo sostenendo che la tacca a 21 cm e 0 mm nel metro è la più vicina al bordo del foglio, e quindi siamo certi che la lunghezza sia più grande di 20.9 cm e più piccola di 21.1 cm. L'errore che specifica l'intervallo in cui siamo certi ricada il valore della lunghezza è quindi di 0.5 mm, infatti se la lunghezza potesse essere anche di poco maggiore di 21.05 cm, la tacca più vicina al bordo diventerebbe quella a 21.1 cm (stiamo assumendo che l'errore di allineamento del bordo sinistro del foglio con la tacca dello zero sia trascurabile rispetto a quello di lettura). Quindi la notazione corretta del risultato della misura è $L = (21.00 \pm 0.05)$

cm, che indica che il valore della grandezza è compreso con certezza tra $(21.00 - 0.05)$ cm e $(21.00 + 0.05)$ cm.

Al fine di determinare il grado di informazioni su una grandezza che una misura consente di ottenere è necessario poter quantificare la relazione quantitativa tra l'errore assoluto e il valore della grandezza. Supponiamo ad esempio di aver effettuato due misure di lunghezza di oggetti diversi con un metro millimetrato, trovando per il primo oggetto $L_1 = (0.0010 \pm 0.0005)$ m e per il secondo $L_2 = (1.0000 \pm 0.0005)$ m. Per quanto l'errore massimo sia uguale, dipendendo dallo strumento utilizzato, la nostra capacità di determinare il valore della grandezza è molto diverso nei due casi dato che L_1 è determinato con un errore pari alla metà del valore della grandezza, mentre per L_2 l'errore è solo di 5 parti su diecimila. Ogni volta che sia utile confrontare il valore di un errore con quello della grandezza si ricorre all'errore relativo, definito come:

$$\Delta x^{rel} = \frac{\Delta x}{|x|} \quad (2.1)$$

dove $|x|$ è il valore assoluto del risultato della misura, che è pari a x se $x > 0$ e a $-x$ se $x < 0$ (in sostanza è uguale al valore numerico di x indicato sempre con il segno positivo) e viene introdotto per avere un errore relativo sempre positivo. Spesso l'errore relativo si esprime come percentuale, ed è dato da:

$$\Delta x_{\%}^{rel} = \frac{\Delta x}{|x|} \times 100 \quad (2.2)$$

Nell'esempio precedente gli errori relativi sono:

$$\Delta L_1^{rel} = \frac{\Delta L_1}{|L_1|} = \frac{0.0005}{0.0010} = 0.5 \quad (2.3)$$

e

$$\Delta L_2^{rel} = \frac{\Delta L_2}{|L_2|} = \frac{0.0005}{1.0000} = 0.0005 \quad (2.4)$$

e consentono immediatamente di concludere che la grandezza L_2 è determinata con un livello di informazione mille volte superiore a L_1 .

2.3 Cifre significative

Essere in grado di determinare l'entità dell'errore associato alla misura consente anche di comprendere fino a che livello possiamo ottenere informazioni sul valore della grandezza, che è appunto determinato dall'errore. Nel nostro esempio la misura di lunghezza non ci consente di apprezzare lunghezze inferiori al mezzo millimetro. Ogni cifra che venisse aggiunta nella quantificazione del valore della grandezza oltre

il livello dell'errore non avrebbe senso fisico. Pertanto nel quantificare una grandezza ha senso riportare solo le cifre fino a quelle non più piccole.

Le cifre che hanno senso nella quantificazione della grandezza si chiamano *significative*. Nell'esempio precedente la lunghezza è determinata con 4 cifre significative (quella delle decine, quella delle unità, quella dei decimi e quella dei centesimi), poiché l'errore è dell'ordine dei centesimi di centimetro.

Se avessimo scritto $L = (21.000 \pm 0.05)$ cm avremmo specificato la nostra grandezza fornendo 5 cifre. Di queste però l'ultimo zero non ha alcun senso, perché è in una posizione decimale dei millesimi di centimetro, in una condizione in cui già i centesimi di centimetro sono affetti da errore.

Se avessimo espresso L in metri avremmo trovato $L = (0.2100 \pm 0.0005)$ m. Ogni volta che si cambia unità di misura ricorrendo a multipli o sottomultipli si aggiungono o tolgono cifre, perché si moltiplica o divide per potenze di 10. Questa operazione avviene sia sulla grandezza che sull'errore, ma non modifica il numero di cifre significative, che serve a determinare quanto si riesce a conoscere della grandezza.

Le regole da ricordare per determinare correttamente il numero di cifre significative sono le seguenti:

1. La più piccola posizione che ha senso specificare è quella su cui si trova l'errore;
2. Le cifre significative si contano da sinistra a destra, a partire dalla prima cifra diversa da zero (quindi tutti gli zeri iniziali non sono mai significativi);
3. Eventuali 0 a destra del numero possono essere o meno significativi, a seconda che siano o no relativi a cifre maggiori dell'errore.

La regola 1) porta a determinare che l'ultima cifra che ha senso specificare di L è quella dei centesimi di centimetro. La regola 2) consente di concludere che lo 0 che compare in più usando i metri invece dei centimetri non è significativo, perché è all'inizio del numero. La regola 3) invece consente di concludere che i primi 2 zeri dopo 21 sono significativi, mentre eventuali altri 0 non lo sono.

2.4 Notazione scientifica

Come già osservato nella Sezione 1.3.1 ogni grandezza può assumere in principio qualsiasi valore, da quelli molto piccoli a quelli molto grandi. La legittima aspirazione al poter esprimere il valore di ogni grandezza utilizzando il minor numero di cifre possibile ha come possibile conseguenza l'utilizzo di multipli e sottomultipli.

In Fisica ci si può imbattere in lunghezze molto piccole, come quelle relative alle dimensioni atomiche (dell'ordine di decimi di miliardesimo di metro) o in lunghezze incredibilmente grandi come le distanze tra corpi celesti (le dimensioni dell'universo sono dell'ordine di cento milioni di miliardi di miliardi di metri). Se

decidissimo di esprimere in metri la lunghezza del raggio dell'atomo di idrogeno (per la precisione il raggio di Bohr dell'atomo di idrogeno), dovremmo scrivere che $R = (0.000000000052917721092 \pm 0.00000000000000000017) \text{ m}$, mentre da distanza della stella a noi più vicina (escluso il sole), Proxima Centauri, è $d = (39700000000000000 \pm 900000000000000) \text{ m}$.

Nel caso di valori molto grandi si pone anche il problema di capire quante siano le cifre realmente significative, soprattutto se non viene esplicitamente indicato l'errore, poiché gli zeri a fine numero possono essere o no significativi a seconda dell'errore.

La sintesi di tutte queste esigenze è fornita dalla cosiddetta *notazione scientifica*, che prevede di indicare ogni grandezza scrivendo come prima cifra quella corrispondente alle unità, indicando tutte le cifre decimali significative, e moltiplicando per la potenza di 10 che consente di arrivare al valore finale corretto. Inoltre quando l'errore non è indicato esplicitamente si assume che sia pari a 1 sulla cifra più piccola. In Tabella 1.2 sono riportate varie potenze di 10, con le rispettive denominazioni di multipli e sottomultipli equivalenti.

Per determinare la corretta potenza di 10 da usare si può procedere empiricamente in questo modo:

1. Se il numero iniziale è più grande delle unità (quindi almeno di una decina), ci si mette a destra della prima cifra, contando di quante cifre spostarsi verso destra per arrivare alle unità. Il numero trovato è l'esponente del 10 per cui moltiplicare il numero espresso con prima cifra delle unità.
Ad esempio se il valore è 123000.2 ci mettiamo a destra della prima cifra, l'1, contando quante cifre ci sono per arrivare alle unità. Pertanto $123000.2 = 1.230002 \times 10^5$.
2. Se il numero è minore delle unità (quindi dai decimi in giù) si contano gli zeri dopo il separatore decimale, a sinistra della prima cifra diversa da zero, fino ad arrivare al separatore decimale. Il numero trovato, aumentato di 1 e cambiato di segno, è l'esponente di 10 corretto.
Ad esempio se abbiamo 0.00123 la prima cifra non nulla è 1, che a sinistra ha due zeri. Pertanto $0.00123 = 1.23 \times 10^{-3}$.

Quando due grandezze omogenee hanno valori espressi in notazione scientifica con la medesima potenza di 10 si dice che le grandezze sono dello stesso *ordine di grandezza*.

Esempio. Si esprimano i valori del raggio di Bohr dell'atomo di idrogeno e della distanza dalla Terra di Proxima Centauri utilizzando la notazione scientifica.

Partiamo dal raggio di Bohr. Il primo passo è scrivere il numero in modo che la prima cifra non nulla sia quella delle unità, trovando 5.2917721092. Tale numero è più grande di quello corretto di cento miliardi di volte, pertanto per ottenere il raggio di Bohr partendo da 5.2917721092 dobbiamo moltiplicare per 10^{-11} , quindi il raggio

di Bohr scritto in notazione scientifica è $(5.2917721092 \pm 0.0000000017) \times 10^{-11}$ m. Analogamente la distanza di Proxima Centauri dalla Terra, scritta in modo che la prima cifra non nulla sia quella delle unità, diventa $d = (3.97 \pm 0.09) \times 10^{16}$ m.

2.5 Proprietà degli strumenti

Nel momento in cui si deve misurare una qualunque grandezza, il primo passo da compiere è la scelta dello strumento. La scelta deve consentire innanzitutto di riuscire ad ottenere un risultato, che deve essere il più vicino possibile al valore reale che la grandezza assume, e che consenta di ottenere il grado di conoscenza richiesto (il numero di cifre significative richiesto). Le principali proprietà degli strumenti sono:

- **Intervallo di funzionamento:** è l'intervallo di valori che lo strumento consente di misurare. Il valore minimo misurabile è detto soglia, mentre il valore massimo è detto portata.
- **Prontezza:** misura il tempo che impiega lo strumento a fornire un risultato di misura stabile. Ad esempio se si misura la propria massa con una pesa-persone meccanica la prontezza è il tempo che impiega l'indice della bilancia a fermarsi su una tacca della scala graduata.
- **Sensibilità:** determina la minima variazione della grandezza che lo strumento è in grado di apprezzare. Negli strumenti che visualizzano il risultato della misura utilizzando una scala graduata tipicamente la scala viene scelta in modo che la minima variazione osservabile coincida con la spaziatura tra le tacche (quindi un metro graduato è in grado di osservare variazioni minime di lunghezza di 1 mm).

Tale corrispondenza tra minima cifra osservabile e minima variazione misurabile non sempre vale invece per gli strumenti che utilizzino un display. Se lo strumento è ben costruito, il display indica solo cifre significative, cioè che restano costanti se resta costante la grandezza. In alcuni casi però può capitare di imbattersi in strumenti che visualizzano più cifre di quelle realmente significative, tipicamente evidente dalla variazione nel tempo delle cifre più piccole anche se la grandezza misurata ha un valore costante nel tempo.

- **Precisione:** misura la riproducibilità dei risultati della misura. Uno strumento è tanto più preciso quanto minore è la differenza tra i risultati di misure consecutive.
- **Accuratezza:** nonostante in italiano accurato e preciso siano sinonimi, in linguaggio tecnico si riferiscono a proprietà differenti. L'accuratezza quantifica

2 MISURE ED INCERTEZZE

la capacità di uno strumento di fornire un risultato vicino al reale valore che la grandezza assume.

Le prime due proprietà sono importanti per determinare se lo strumento scelto è o meno in grado di consentirci di misurare la grandezza che ci interessa, poiché per riuscire ad effettuare la misura è necessario che il valore da misurare sia all'interno dell'intervallo di funzionamento e che il tempo caratteristico di sue eventuali variazioni sia maggiore del tempo di risposta. La sensibilità dello strumento va tenuta in conto per poter misurare la grandezza con il voluto numero di cifre significative, dato che il numero di cifre significative dipende dal più piccolo valore che si riesce a misurare.

La sensibilità è inoltre importante quando si debbano misurare grandezze variabili nel tempo, perché lo strumento deve avere una sensibilità abbastanza alta da consentire di osservare bene le variazioni della grandezza, oltre ad un tempo di risposta sufficientemente basso.

Per quanto riguarda invece la differenza tra precisione e accuratezza consideriamo un semplice esempio, supponendo di misurare la lunghezza di un oggetto con un metro da sarta (i metri a nastro arrotolabili) che a causa dell'uso si sia allungato del 10%. Ripetendo molte volte la misura quasi certamente si troveranno risultati identici, fino al millimetro. Pertanto lo strumento è preciso, perché fornisce sempre lo stesso risultato quando si ripetono le misure. Tuttavia lo strumento non è accurato, perché i risultati della misura sono sistematicamente minori di quelli reali a causa della deformazione del metro.

La differenza tra precisione ed accuratezza è evidenziata in Figura 2.1 che riporta gli istogrammi costruiti con i risultati di 100 misure diverse di una grandezza del valore di 0.5 metri effettuate con quattro strumenti diversi. Nel primo caso (quadro a), i risultati delle misure sono centrati intorno al valore corretto della grandezza di 0.5 metri, pertanto lo strumento è accurato. Inoltre l'istogramma è concentrato in un piccolo intervallo di valori, quindi lo strumento è anche preciso. Nel quadro b) l'istogramma è ancora centrato vicino al valore corretto della grandezza, pertanto lo strumento è accurato, ma l'intervallo di valori ottenuto è visibilmente più largo, pertanto lo strumento non è preciso. Nel quadro c) si osserva un istogramma in un intervallo di valori stretto, indicando che lo strumento è preciso, ma il massimo è intorno a 0.4 m, quindi lo strumento non è accurato. Infine nel quadro d) si osserva un largo intervallo di valori centrato intorno al valore sbagliato, pertanto lo strumento non è né preciso né accurato.

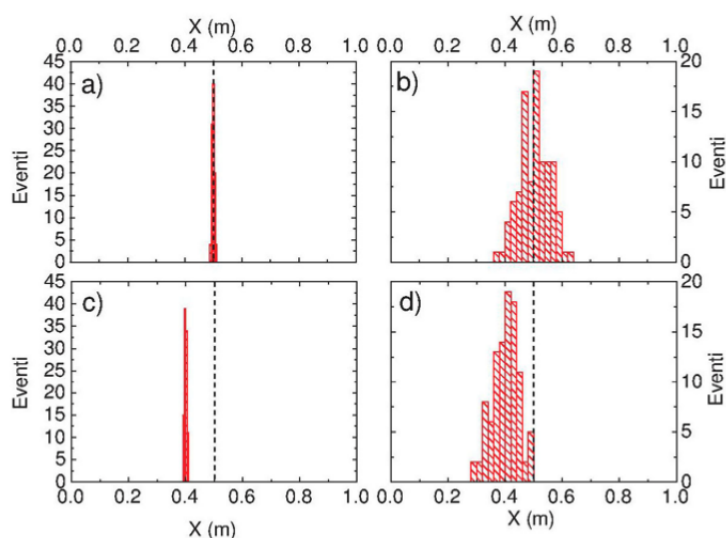


Figura 2.1: Istogramma di 100 misure di una lunghezza X dal valore reale di 0.5 m (indicato dalla linea verticale tratteggiata), ottenuto con uno strumento: a) preciso e accurato, b) accurato ma non preciso, c) preciso ma non accurato, d) non accurato e non preciso.

2.6 Errori casuali ed errori sistematici

Da quanto visto nelle sezioni precedenti ogni operazione di misura comporta la determinazione di una grandezza entro certi limiti, specificati dal valore dell'errore. In alcuni casi, se lo strumento che si utilizza è sufficientemente sensibile, si può osservare che la ripetizione della misura porta a risultati tra di loro diversi (vedi Figura 2.2). Tale fluttuazione della grandezza misurata può essere dovuta ad una serie di contributi di origine casuale tra cui:

- La presenza di giochi meccanici e di attriti tra le parti mobili all'interno dello strumento.
- Fluttuazioni delle condizioni circostanti, ad esempio di temperatura e pressione.
- Casualità del modo di agire dello sperimentatore. Ad esempio, se si misura un intervallo di tempo tra due eventi con un cronometro azionato manualmente, alla misura contribuisce il tempo, detto di reazione, che passa tra l'osservazione dell'inizio (o della fine) dell'evento e l'istante in cui si aziona (o ferma) il cronometro. Tale tempo, tipicamente dell'ordine del decimo di secondo, cambia da misura a misura, influenzando il risultato del cronometraggio.

2 MISURE ED INCERTEZZE

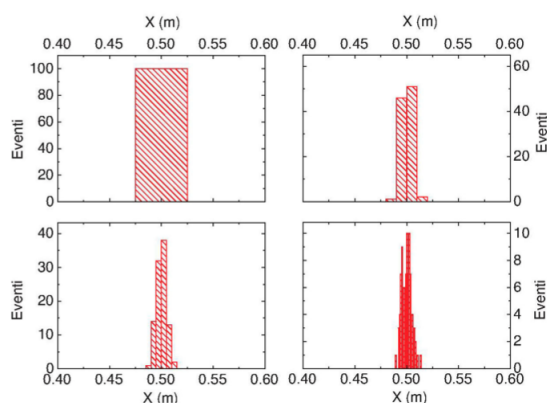


Figura 2.2: Istogramma di 100 misure di una lunghezza X dal valore reale di 0.5 m ottenuto con uno strumento con sensibilità: a) 5 centimetri, b) 1 centimetro, c) 5 millimetri, d) 1 millimetro.

- Approssimazioni sul sistema studiato. Ad esempio se si misura il diametro di un corpo cilindrico realizzato al tornio ci possono essere effetti dovuti alla non perfetta regolarità della forma del corpo, portando a valori diversi per misure effettuate in varie posizioni.

La natura casuale di tali errori implica che eseguendo numerose misure l'errore porterà con la stessa probabilità a sovrastimare o a sottostimare la grandezza, consentendo di avere una buona stima del valore della grandezza analizzando statisticamente i risultati di numerose misure. Vedremo tra poco come si può analizzare semplicemente l'insieme dei risultati di numerose misure per stimare sia la grandezza che l'errore associato alla misura. Un caso più insidioso è quello in cui l'errore avviene sempre nella stessa direzione, cioè porta sempre a sovrastimare la grandezza, oppure sempre a sottostimarla. In tal caso eseguire molte misure non aiuta a conoscere meglio il corretto valore, perché le misure di partenza sono tutte regolarmente più grandi o tutte regolarmente più piccole del valore reale. Tali errori si dicono sistematici e possono essere dovuti a varie cause tra cui:

- Difetti costruttivi dello strumento, di fabbricazione o dovuti al degrado. Ad esempio supponiamo di misurare la massa di un corpo con una bilancia a bracci uguali e che, per un difetto costruttivo, la bilancia abbia un braccio più corto dell'altro. Normalmente la bilancia è in equilibrio quando si appoggiano sui due piatti due masse uguali. Se però i bracci non sono uguali la bilancia raggiunge l'equilibrio quando la massa posta sul piatto attaccato al braccio più corto è maggiore di quella sull'altro piatto. In tal caso, se i campioni sono posti dal lato del braccio corto, le misure di massa sono sistematicamente sottostimate.

- Errori dello sperimentatore. Ad esempio se si misura su una scala graduata senza avere l'accortezza di posizionarsi sulla verticale che passa dal bordo del corpo (cioè se si guarda la scala graduata di lato invece che da sopra, si sbaglia sistematicamente l'individuazione della tacca a cui è più vicino il bordo del corpo). Tale errore si chiama errore di parallasse.
- Utilizzo dello strumento in condizioni errate. Ad esempio la lunghezza dei corpi aumenta al crescere della temperatura (dilatazione termica), quindi un metro utilizzato a temperatura molto diversa da quella di calibrazione porta sistematicamente a sbagliare i valori misurati
- Variazioni causate sul sistema nell'operazione di misura. Ad esempio se si misura una qualche dimensione di un corpo mettendolo a contatto con lo strumento è possibile che il corpo venga deformato durante la misura, e quindi se ne sbaglia la misura della lunghezza di interesse.

L'individuazione di errori sistematici è particolarmente difficile, e tipicamente è resa possibile solo dalla possibilità di misurare la stessa grandezza utilizzando tecniche e strumenti differenti o, in alcuni casi, può essere ispirata dall'osservazione di non consistenza tra valori della grandezza e valori attesi, sulla base di qualche teoria o di altre evidenze sperimentali.

2.7 Migliore stima di una grandezza

Supponiamo di utilizzare uno strumento sufficientemente sensibile da consentire di ottenere risultati diversi se si ripete più volte la misura. L'immediata conseguenza di ciò è che, non avendo un risultato univoco, ci si trova in difficoltà nel fornire un solo valore della grandezza, che ne rappresenti la miglior stima ottenuta sperimentalmente.

Per capire come uscire da questa situazione è sufficiente cercare di sfruttare la casualità delle cause che portano a valori diversi delle misure. Supponiamo che ogni misura della grandezza x dia un risultato di questo tipo $x = x_{vero} + \delta x$, dove x_{vero} rappresenta il reale valore della grandezza e δx la differenza tra valore reale e valore misurato, dovuto agli errori casuali. Supponiamo di ripetere la misura di x un numero sufficientemente grande di volte, N , e di calcolare il valore medio di tutti i valori ottenuti:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\delta x_1 + x_{vero} + \delta x_2 + x_{vero} + \dots + \delta x_N + x_{vero}}{N} \quad (2.5)$$

Arrangiando i termini presenti nell'ultimo membro possiamo sommare nel numeratore prima tutti i termini x_{vero} (ce ne sono N , uno per ogni misura, e sono tutti uguali), e poi tutti i termini del tipo δx (di nuovo N in tutto, ma in genere diversi tra loro, perché gli errori sono casualmente distribuiti). Pertanto:

$$\bar{x} = \frac{Nx_{vero} + (\delta x_1 + \delta x_2 + \dots + \delta x_N)}{N} \quad (2.6)$$

Poiché gli errori sono casuali c'è la stessa probabilità che siano positivi o negativi e, quando le misure diventano sufficientemente numerose, la somma degli errori sarà pari a zero. Rimane quindi $\bar{x} = x_{vero}$. Pertanto, quando la sensibilità della misura è sufficiente ad osservare fluttuazioni casuali, la miglior stima della grandezza si ottiene calcolando il valore medio di tutti i risultati di misura.

Nel caso opposto in cui la sensibilità sia tanto bassa da avere sempre lo stesso risultato in ogni ripetizione della misura, il problema di determinare la miglior stima del valore di fatto non si pone, perché tutti i risultati sono uguali e rappresentano la miglior stima della grandezza (che coincide ancora con il valore medio di tutti i risultati).

2.8 Stima dell'errore di misura

La natura casuale degli errori di misura porta ad un analogo problema di stima della barra d'errore da associare alla misura. Nel caso più semplice in cui tutte le ripetizioni della misura portino allo stesso risultato (bassa sensibilità) si ha l'evidenza che lo strumento non è abbastanza sensibile da risentire delle fluttuazioni casuali. In tal caso il grado di conoscenza della grandezza è limitato dalla sensibilità dello strumento, e l'errore si può stimare come metà della divisione più piccola della scala graduata, o come 1 sulla cifra più piccola visualizzata sul display. Se invece la ripetizione delle misure porta a risultati diversi tra loro la capacità di conoscere la grandezza è limitata dalle fluttuazioni casuali, e bisogna stimarla partendo dalla distribuzione dei risultati.

Provando a ripetere il ragionamento appena visto per determinare la miglior stima della grandezza potremmo provare, abbastanza ragionevolmente, a usare il valore medio dell'errore come miglior stima dell'errore. Potremmo quindi calcolare per ogni misura $\delta x = x - \bar{x}$, per poi calcolare l'errore come valore medio di δx . Tale approccio però è ingenuo perché:

$$\begin{aligned} \overline{\delta x} &= \frac{\delta x_1 + \delta x_2 + \dots + \delta x_N}{N} = \frac{x_1 - \bar{x} + x_2 - \bar{x} + \dots + x_N - \bar{x}}{N} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} - \frac{\bar{x} + \bar{x} + \dots + \bar{x}}{N} = \bar{x} - \bar{x} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

La definizione di valore medio ha come ovvia conseguenza che la media delle fluttuazioni è zero. Inoltre la scelta di stimare l'errore calcolando l'errore totale (proporzionale a quello medio) è anche concettualmente sbagliata. Supponiamo infatti di aver misurato due volte una lunghezza trovando la prima volta $L_1 = 0.99$ m e la seconda volta $L_2 = 1.01$ m. È immediato verificare che $\bar{L} = 1.00$ m, quindi la prima misura sottostima la lunghezza di 0.01 m e la seconda la sovrastima della stessa quantità. Questi due errori sono della stessa entità e, provocando lo stesso scostamento tra valore misurato e valore medio, sono della stessa importanza. Calcolando l'errore totale si trova però zero, perché i due errori sono opposti in segno, dando l'erronea conclusione di assenza di errore sulla misura, pur in presenza di due errori della stessa rilevanza.

Prendendo come riferimento la sola entità della fluttuazione, senza dare importanza al segno, potremmo fare una stima migliore delle fluttuazioni calcolando il valore medio del valore assoluto di ogni errore (pari al valore dell'errore se positivo e al suo opposto se negativo). In tal caso tutti i valori di cui si calcola la media sono positivi, ed il valore medio è necessariamente diverso da zero.

Tale scelta avrebbe la sua ragionevolezza a livello qualitativo. All'atto pratico però, sulla base di argomenti statistici che non illustreremo, si effettua un calcolo diverso, rimuovendo il segno dei singoli scarti dalla media calcolandone il quadrato invece del valore assoluto, e stimando l'errore calcolando il valore medio del quadrato degli errori (quindi degli scarti delle misure dalla media), chiamato scarto quadratico medio, e indicato dalla lettera greca sigma minuscola, σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} \quad (2.8)$$

Questa espressione, basata su motivazioni statistiche, ha senso solo nel caso in cui il numero di misure sia sufficientemente elevato. In caso contrario la stima più ragionevole dell'errore è dato dalla semi-dispersione massima definita come:

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} \quad (2.9)$$

Infine σ è detta *errore statistico* ed è legata all'errore massimo, per motivi qui omessi per semplicità, dalla relazione $\Delta x \approx 3\sigma$.

2.9 Arrotondamenti

Per indicare una variabile con il corretto numero di cifre significative dobbiamo ridurre il numero di cifre decimali utilizzate. Ovviamente questa operazione causa uno scostamento tra il valore calcolato e quello finale, e il criterio da seguire è che nel

togliere cifre decimali si scelga la strada che comporta il minor scostamento tra il valore finale e quello iniziale. Tale operazione va sotto il nome di *arrotondamento* e si esegue in questo modo:

1. Se la prima cifra che bisogna togliere è minore di 5 (compresa fra 0 e 4), l'arrotondamento si effettua semplicemente rimuovendo le cifre decimali in più. In tal caso il numero finale è più piccolo di quello iniziale e si parla di *arrotondamento per difetto*.
2. Se la prima cifra che bisogna togliere è maggiore o uguale di 5 (compresa fra 5 e 9), l'arrotondamento si effettua rimuovendo le cifre in più ed aumentando di 1 l'ultima cifra decimale. In tal caso il numero finale è maggiore di quello iniziale e si parla di *arrotondamento per eccesso*.

2.10 Propagazione dell'incertezza

L'impossibilità di determinare esattamente il valore di una generica grandezza ha immediate conseguenze anche sulla possibilità di determinare il valore di grandezze derivate da una o più grandezze misurate. Lo scopo di questa sezione è di chiarire che legame esista tra l'errore di una grandezza derivata e l'errore delle grandezze da cui dipende o, in altri termini, come è possibile calcolare l'errore sulla grandezza derivata, noti gli errori sulle grandezze da cui essa dipende.

I casi in cui la grandezza di interesse viene determinata non direttamente, ma eseguendo operazioni matematiche sui valori misurati di altre grandezze da cui dipende, sono molto frequenti. Ritornando alle misure sul foglio A4 che ci ha consentito di introdurre il concetto di errore di misura possiamo ipotizzare ad esempio di essere interessati a determinare non la lunghezza di un solo lato, ma l'intero perimetro del foglio. In tal caso è necessario misurare la lunghezza del lato più corto e di quello più lungo per poi determinare il perimetro come il doppio della somma dei due valori ottenuti. Dato però che ognuna delle misure di lunghezza è affetta da un dato errore, il perimetro sarà determinato all'interno di un intervallo di valori, dipendente dall'errore sulla lunghezza di ogni lato.

Analogamente, se volessimo misurare l'area del foglio sarebbe ragionevole misurare la lunghezza della base e quella dell'altezza, calcolando l'area come il prodotto dei risultati. Anche in questo caso come si ripercuote l'errore su base ed altezza sul valore dell'area?

2.11 Errore di una somma

Partiamo dal considerare una grandezza derivata, che chiameremo y , esprimibile come somma di due grandezze, x_1 e x_2 , misurate con un errore massimo Δx_1 e Δx_2 , rispettivamente. Avremo pertanto $y = x_1 + x_2$ con $x_1 = x \pm \Delta x_1$ e $x_2 = x \pm \Delta x_2$.

Per determinare la miglior stima di y e il suo errore è sufficiente ricordare che per definizione l'errore massimo è il numero che sommato alla miglior stima della grandezza ne determina il massimo valore possibile e sottratto alla miglior stima ne determina il valore minimo possibile. Il calcolo del valore massimo di y è immediato, perché sarà pari alla somma del valore massimo di x_1 e del valore massimo di x_2 . Analogamente il calcolo del valore minimo di y è immediato, perché sarà pari alla somma del valore minimo di x_1 e del valore minimo di x_2 .

Dalle considerazioni precedenti si può notare che il valore massimo si ottiene aggiungendo la somma degli errori alla somma delle migliori stime di x_1 e di x_2 mentre il valore minimo si ottiene sottraendola. Tale risultato si può facilmente generalizzare al caso in cui gli addendi siano più di due, consentendo di concludere che: *la miglior stima della somma di due o più grandezze è data dalla somma delle migliori stime di ogni addendo, mentre l'errore massimo è pari alla somma dei singoli errori massimi.*

Questo risultato consente di fare delle osservazioni di validità generale. Innanzitutto, nel momento in cui si determina una grandezza in funzione di altre, ogni grandezza contribuisce ad aumentare l'errore finale. Questo rende spesso importante minimizzare il numero di misure intermedie per arrivare alla grandezza di interesse.

La seconda osservazione è che, se le grandezze sono misurate con errori di diverso ordine di grandezza, l'errore finale è principalmente determinato dalla grandezza con l'errore più grande, come si può facilmente verificare.

Come regola empirica di validità pressoché generale si può affermare che *quando si sommano termini con un numero diverso di cifre decimali il totale ha un numero di cifre decimali pari al numero minimo di cifre decimali degli addendi.*

La regola appena ottenuta per la somma è facilmente estendibile anche alla differenza. Supponiamo ora che sia $y = x_1 - x_2$. In tal caso il valore massimo di y si ottiene quando x_1 è massimo e x_2 è minimo, mentre il valore minimo si ottiene quando x_1 è minimo e x_2 è massimo, pertanto:

$$y_{max} = x_{1max} - x_{2min} = x_1 + \Delta x_1 - (x_2 - \Delta x_2) = x_1 - x_2 + (\Delta x_1 + \Delta x_2) \quad (2.10)$$

Da cui si osserva che la miglior stima della differenza di due grandezze è pari alla differenza delle migliori stime, mentre gli errori massimi continuano a sommarsi.

2.12 Errore di un prodotto

2.12.1 Errore del prodotto di una variabile con una costante

Passiamo ora ad analizzare il caso in cui la grandezza da calcolare sia ottenibile come prodotto tra un numero, m , noto con esattezza, ed un valore misurato del tipo $y = mx$. Anche in questo caso il miglior valore di y ed il suo errore si possono ottenere per calcolo diretto, partendo dai valori massimi e minimi di y .

Supponendo che m sia positivo, il valore massimo di y è pari a $y_{max} = mx_{max} = m(x + \Delta x)$, mentre il valore minimo è $y_{min} = mx_{min} = m(x - \Delta x)$.

Da queste relazioni si conclude che *la miglior stima del prodotto di una grandezza x per un numero m è pari al prodotto tra m e la miglior stima di x . Analogamente l'errore si ottiene moltiplicando per $|m|$ l'errore su x .*

2.12.2 Errore del prodotto di due variabili

Passiamo adesso ad analizzare il caso in cui y sia data dal prodotto di due grandezze, x_1 e x_2 , pertanto $y = x_1x_2$. Per determinare Δy in funzione di Δx_1 e Δx_2 ricorriamo nuovamente al calcolo diretto, determinando y_{max} e y_{min} . Se entrambe le grandezze sono positive il valore massimo di y si ottiene moltiplicando il valore massimo di x_1 per il valore massimo di x_2 , mentre il valore minimo di y è dato dal prodotto dei valori minimi:

$$y_{max} = x_{1max}x_{2max} = (x_1 + \Delta x_1)(x_2 + \Delta x_2) = x_1x_2 + x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1 + (\Delta x_1\Delta x_2) \quad (2.11)$$

$$y_{min} = x_{1min}x_{2min} = (x_1 - \Delta x_1)(x_2 - \Delta x_2) = x_1x_2 - x_1\Delta x_2 - x_2\Delta x_1 + (\Delta x_1\Delta x_2) \quad (2.12)$$

In entrambi i casi non si arriva ad una regola semplice come quelle viste per somme algebriche e prodotto per costanti.

L'espressione dell'errore si può però semplificare, guardando l'espressione ottenuta con un approccio fisico, e facendo una ragionevole approssimazione. Prendendo come riferimento l'espressione di y_{max} osserviamo come al suo valore contribuiscano quattro termini, il primo è il prodotto tra i valori delle migliori stime di x_1 e di x_2 , il secondo e il terzo sono ottenuti moltiplicando la miglior stima di una grandezza per l'errore sull'altra, mentre il quarto termine si ottiene moltiplicando tra loro i due errori.

Indipendentemente dal valore delle grandezze, possiamo dare per ragionevole che gli errori siano più piccoli dei valori delle relative grandezze. Questa semplice osser-

vazione consente di concludere che il primo termine è probabilmente il maggiore di tutti, e che il quarto è probabilmente il più piccolo.

Per supportare questa conclusione con un calcolo esemplificativo supponiamo che sia $x_1 = x_2 = 1$ e $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 10^{-2}$. In tal caso il primo termine vale 1, il secondo ed il terzo sono uguali e valgono 10^{-2} , mentre il quarto vale 10^{-4} .

Questa conclusione è di validità generale, e consente di semplificare la formula eliminando i termini più piccoli di un certo limite. Il modo specifico in cui operare la scelta dei termini da tenere e quelli da trascurare è abbastanza facile, perché:

1. Il primo termine deve essere tenuto per forza perché è il più grande, e se lo eliminassimo dovremmo eliminare anche tutti i successivi.
2. Se tenessimo solo il primo termine arriveremmo alla conclusione assurda che il prodotto di due grandezze affette da errore è invece privo di errore.
3. Il secondo e terzo termine sono matematicamente dello stesso tipo (entrambi sono il prodotto del valore di una grandezza e l'errore sull'altra). Sono quindi equivalenti, e generalmente di entità confrontabile. Pertanto nel momento in cui dobbiamo includerne almeno uno, siamo in realtà costretti a includerli entrambi.
4. L'ultima opzione residua è di eliminare soltanto il quarto termine, che è probabilmente il più piccolo di tutti.

Pertanto scriveremo:

$$y_{max} = x_1x_2 + x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1 \quad (2.13)$$

$$y_{min} = x_1x_2 - x_1\Delta x_2 - x_2\Delta x_1 \quad (2.14)$$

Possiamo quindi concludere che $\Delta y = x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1$. Questa espressione si può rendere più chiara determinando l'errore relativo su y che è dato da:

$$\Delta y^{rel} = \frac{\Delta y}{y} = \frac{x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1}{x_1x_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} \quad (2.15)$$

Possiamo pertanto concludere che:

La miglior stima del prodotto di due o più grandezze è pari al prodotto delle migliori stime di ogni fattore mentre l'errore relativo sul prodotto è pari alla somma degli errori relativi dei singoli fattori.

Con un ragionamento analogo è possibile dimostrare che un risultato identico vale nel caso di rapporto tra grandezze, cioè *la miglior stima del rapporto tra due grandezze è pari al rapporto delle migliori stime mentre l'errore relativo sul rapporto è pari alla somma degli errori relativi delle singole grandezze.*

3 GEOMETRIA ANALITICA

3.1 Coordinate cartesiane

Le informazioni in Fisica sono usualmente presentate in una forma grafica simile a quella usata in Figura 3.1. Gli ingredienti essenziali sono una coppia di assi coordinati e una scala. È consuetudine usare x per l'asse orizzontale (o ascissa) e y per l'asse verticale (o ordinata), e di permettere ambedue i valori positivi e negativi per ciascuna coordinata. La Figura 3.1 illustra l'usuale disposizione. I sistemi $x - y$ di questo tipo sono generalmente chiamati *coordinate cartesiane ortogonali* (dal matematico francese Descartes) sebbene si usi pure la locuzione *coordinate ortogonali*.

La posizione dei punti in un sistema di coordinate $x - y$ è specificato assegnando due numeri, il valore della coordinata x e il valore della coordinata y ; per esempio ($x = 2$ unità, $y = 3$ unità). Generalmente, questo procedimento si semplifica e si scrive soltanto il valore di x e il valore di y , essendo sottinteso che l'ordine delle coordinate è prima x e poi y . Il punto di cui prima si scrive allora come $(2, 3)$. L'origine è indicata da $(0, 0)$. La Figura 3.1 posiziona diversi punti con questa notazione.

Si noti che non abbiamo specificato la grandezza di una unità di misura lungo gli assi x e y . Ciascuna unità potrebbe rappresentare 2 cm, oppure 2 miglia. Le unità x possono anche essere diverse dalle unità y , ad esempio quando mostriamo la posizione in funzione del tempo; in questo caso le unità x sono quelle del tempo, e le unità y quelle dello spazio.

Il sistema di coordinate $x - y$ è utile per rappresentare vari tipi di situazioni fisiche, non soltanto la posizione di punti in relazione alla distanza da un'origine. Ad esempio lo stiramento di una fettuccina di un qualche materiale in funzione di una forza applicata, via via sempre maggiore, come in Figura 3.2.

3.2 Sistema di coordinate cartesiane

I sistemi di coordinate discussi nel precedente paragrafo sono in grado di rappresentare le posizioni di punti in un piano (cioè, in due dimensioni, x e y). Se volessimo localizzare un punto nello spazio, un tale sistema di coordinate non sarebbe adeguato poiché interviene una terza dimensione. Se x e y indicano distanze orizzontali, abbiamo bisogno anche dell'altezza per poter localizzare una posizione nello spazio. A questo scopo dobbiamo aggiungere un terzo asse, z , al nostro sistema di coor-

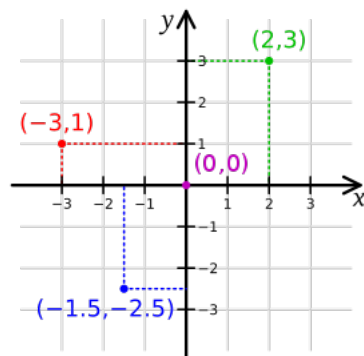


Figura 3.1: Sistema di riferimento $x - y$ cartesiano ortogonale

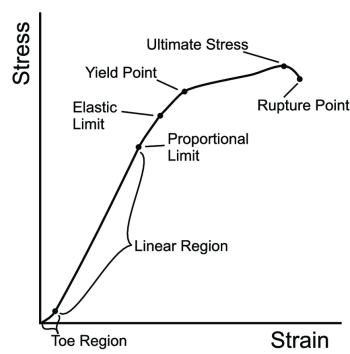


Figura 3.2: Un esempio di diagramma cartesiano $x - y$ per la rappresentazione di un fenomeno fisico

3 GEOMETRIA ANALITICA

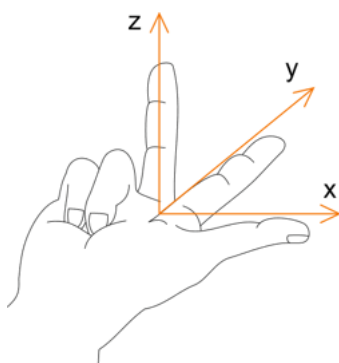


Figura 3.3: Sistema di riferimento tridimensionale $x - y - z$ cartesiano ortogonale destrorso

dinate, che ora diventa un sistema cartesiano tridimensionale, come mostrato nella Figura 3.3.

Si noti che gli assi x , y e z in Figura 3.3 sono orientati in un modo particolare. Se si immagina di usare la mano *destra* e di orientare il pollice lungo il verso del primo asse x , l'indice lungo il verso del secondo asse y , allora il medio viene naturalmente ad orientarsi con il terzo asse z . Se invece avessimo usato la mano *sinistra*, il dito medio si sarebbe orientato nella direzione opposta. Un sistema di coordinate orientato come in Figura 3.3 si chiama *destrorso* ed è il tipo che si usa per la maggior parte delle applicazioni fisiche.

La posizione di un punto o di un oggetto fisico nello spazio richiede la specificazione di tre numeri — le coordinate x , y e z . Se vogliamo definire un evento fisico, tuttavia, abbiamo bisogno di maggiore informazione. Un evento è qualcosa che avviene non soltanto in una particolare posizione ma anche in un particolare istante di tempo. Quindi, la specificazione di un evento richiede tre coordinate spaziali e una coordinata temporale.

La localizzazione di un evento (nello spazio e nel tempo) è data da quattro numeri e le coordinate sono (x, y, z, t) . Cioè, il nostro spazio è realmente uno spazio quadridimensionale con tre dimensioni spaziali ordinarie e una dimensione temporale. Generalmente non pensiamo che il nostro spazio consista di quattro dimensioni poiché non vi è apparente accoppiamento tra lo spazio ordinario e il tempo, ma nella teoria della relatività diviene chiaro che esiste un tale accoppiamento e che quando degli oggetti sono in moto l'uno rispetto all'altro con velocità relative elevate, l'accoppiamento dello spazio e del tempo diventa cruciale.

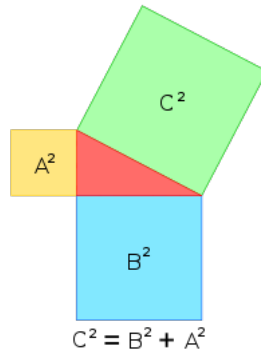


Figura 3.4: Triangolo rettangolo e teorema di Pitagora

3.3 La distanza fra due punti

Uno dei risultati più importanti della geometria piana è il teorema di Pitagora, il quale afferma che l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti (si faccia riferimento alla Figura 3.4).

$$C^2 = A^2 + B^2 \quad (3.1)$$

Poiché gli assi di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali formano angoli retti, si usa il teorema di Pitagora per calcolare le distanze fra coppie di punti in un tale sistema. Consideriamo il punto P_1 di coordinate $(x_1, y_1) = (1, 2)$ e il punto P_2 di coordinate $(x_2, y_2) = (3, 4)$ mostrati in Figura 3.5. Quanto distano questi due punti? Questi due punti, insieme al punto C , evidentemente di coordinate $(x_2, y_1) = (3, 2)$, formano un triangolo rettangolo, per cui la loro distanza può essere calcolata applicata il teorema di Pitagora:

$$distanza = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

Si noti che questo procedimento funziona bene anche se le coordinate di P_1 o P_2 sono date da valori negativi poiché nel calcolo entra il quadrato delle coordinate.

Per trovare la distanza fra due punti nello spazio tridimensionale, è necessario far uso del teorema di Pitagora due volte. Ad esempio, per trovare la distanza fra i punti F e C (si faccia riferimento alla Figura 3.6), questa può essere vista come la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo ACF , i cui cateti sono AF e AC ; a sua volta il cateto AC può essere visto come l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC ; pertanto la distanza fra i punti F e C è:

$$distanza = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AF}^2}$$

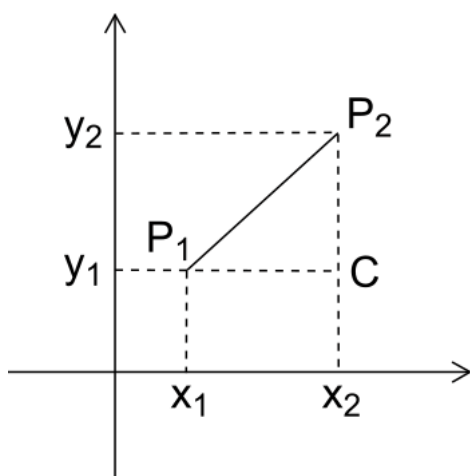


Figura 3.5: Distanza fra due punti dall'applicazione del teorema di Pitagora

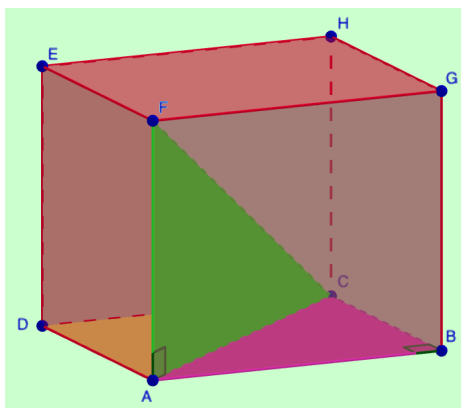
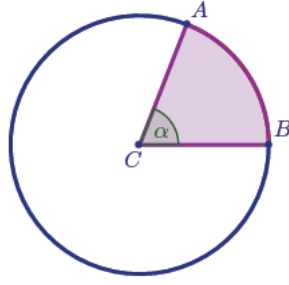


Figura 3.6: Il teorema di Pitagora in 3D

Figura 3.7: Arco di una circonferenza sotteso da un angolo α

Esercizio 3.3.1. Se si indicano con (x_1, y_1, z_1) le coordinate del punto F e con (x_2, y_2, z_2) le coordinate del punto C , dimostrare che:

$$\overline{FC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

3.4 Il radiante

L'unità per la misura degli angoli più comunemente usata è il *grado*, che è l'angolo al centro sotteso da un arco di lunghezza pari a $1/360$ dell'intera circonferenza. In parecchi problemi di fisica e di ingegneria si trova più conveniente usare un'altra unità chiamata *radiante* (rad).

Se misuriamo la lunghezza di un arco lungo la circonferenza di un cerchio (vedi Figura 3.7), troviamo che la lunghezza dell'arco $s = \widehat{AB}$ è proporzionale all'angolo α tra i due raggi che definiscono l'arco; cioè, $s \propto \alpha$ (il simbolo ' $\propto$ ' si legge *proporzionale a ...*); inoltre se teniamo fisso α e aumentiamo r , la lunghezza dell'arco di circonferenza aumenta proporzionalmente, cioè

$$s \propto r \quad (3.2)$$

La proporzionalità fra gli archi di circonferenza e gli angoli sottesi ci permette di definire il *radiante*. Il radiante è proprio il fattore di proporzionalità da usare nella (3.2)

$$s = \theta r \quad (3.3)$$

ossia

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (3.4)$$

quando l'angolo θ è misurato in radianti.

Se θ viene esteso fino a comprendere l'intero angolo giro, 360° , allora s è pari alla lunghezza della circonferenza, $2\pi r$. Applicando la formula (3.3) all'intero angolo

3 GEOMETRIA ANALITICA

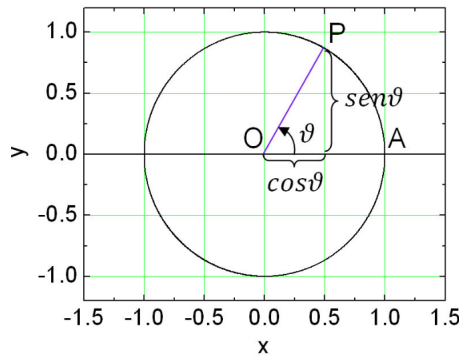


Figura 3.8: Circonferenza di raggio unitario, angolo formato da un generico raggio, seno e coseno dell'angolo.

giro, allora $2\pi r = \theta r$, sicché $\theta = 2\pi$ rad corrisponde all'angolo di 360° . Quindi

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57.3^\circ \quad (3.5)$$

Utilizzando lo stesso ragionamento si ottiene immediatamente che $90^\circ = \pi/2$ rad, $180^\circ = \pi$ rad, $270^\circ = 3/2\pi$ rad.

Si noti che, sebbene il radiante sia una misura angolare, esso non ha dimensioni fisiche perché, dalla (3.4), è il rapporto fra due lunghezze. In questo caso si dice che i radianti sono una misura *adimensionale* degli angoli.

3.5 Seno e coseno

Le funzioni trigonometriche principali si possono definire facendo riferimento alla circonferenza in Figura 3.8. Supponiamo per semplicità che sia $R = 1$. Dato un angolo ϑ qualsiasi, formato con l'asse x dal raggio OP , si definisce seno di ϑ , e si denota con $\sin \vartheta$, la coordinata y del punto P . Analogamente si definisce coseno di ϑ , e si denota con $\cos \vartheta$, la coordinata x del punto P .

I grafici della funzione seno e coseno sono riportati in Figura 3.9. Dalla definizione discendono rapidamente alcune proprietà del seno e del coseno:

1. Entrambe le funzioni sono limitate, e possono assumere solo valori compresi tra -1 e $+1$, estremi compresi. Infatti sia la x che la y di un generico punto della circonferenza possono assumere come valore minimo $-R$ e come valore massimo $+R$. Essendo $R = 1$ si ottiene immediatamente la proprietà.
2. Entrambe le funzioni sono periodiche, di periodo 2π , cioè assumono lo stesso valore quando la variabile cambia di un multiplo intero di 2π . Tale proprietà

3 GEOMETRIA ANALITICA

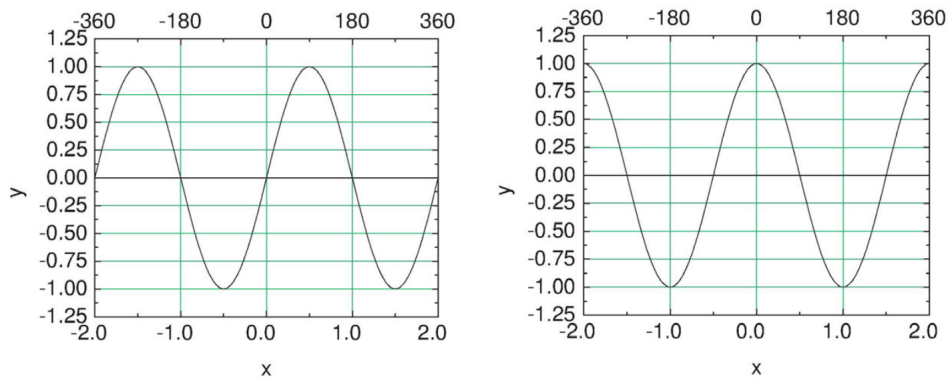


Figura 3.9: Grafico della funzione $f(x) = y = \sin x$ (sinistra) e grafico della funzione $f(x) = y = \cos x$ (destra). Gli angoli sono espressi in gradi sull'asse x superiore ed in radianti/ π su quello inferiore

deriva dal fatto che variazioni di angolo di 2π o suoi multipli interi equivalgono ad uno o più giri completi lungo la circonferenza, che riporta nel punto di partenza, e quindi alle stesse coordinate.

3. I valori di seno e coseno non sono completamente indipendenti. In particolare vale sempre la seguente uguaglianza: $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$, direttamente determinabile partendo dall'equazione di una circonferenza centrata nell'origine, che in generale è $x^2 + y^2 = R^2$, e ricordando che $R = 1$.
4. Le funzioni hanno una parità definita. In particolare la funzione seno cambia segno se si cambia segno all'angolo, cioè qualunque sia ϑ , si ha $\sin(-\vartheta) = -\sin \vartheta$. Una funzione con tale proprietà si dice *dispari*. Al contrario il coseno non cambia se si cambia segno alla variabile, cioè qualunque sia ϑ , si ha $\cos(-\vartheta) = \cos \vartheta$. Una funzione con tale proprietà si dice *pari*.

3.6 Sistema di coordinate polari

Nell'esempio della Figura 3.1 una qualunque posizione è indicata dalla coppie di coordinate ottenute dalla proiezione di ciascun punto sugli assi coordinati. Per alcuni tipi di problemi è più conveniente specificare un punto in funzione di coordinate radiali e angolari piuttosto che in funzione di x e y , ad esempio quelle *polari*, indicate in Figura 3.10. In un sistema di questo la posizione di coordinate (x, y) è specificata da altre due grandezze, vale a dire, la distanza ρ dall'origine O al punto considerato e l'angolo θ che la retta forma con l'asse positivo delle ascisse. Cioè, diamo la posizione del punto in funzione della coppia di numeri (ρ, θ) invece della coppia (x, y) . I numeri

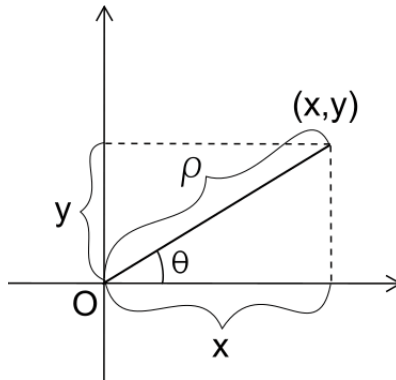


Figura 3.10: Coordinate polari (ρ, θ) del punto che ha coordinate (x, y) in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

ρ e θ si chiamano coordinate polari del punto. Usando le definizioni delle funzioni trigonometriche, possiamo esprimere le coordinate cartesiane ortogonali in funzione delle coordinate polari:

$$x = \rho \cos \theta \quad (3.6)$$

$$y = \rho \sin \theta \quad (3.7)$$

Viceversa

$$\tan \theta = y/x \quad (3.8)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.9)$$

3.7 Sistema di coordinate cilindriche

In un sistema di coordinate cilindriche, la posizione di un punto equivale a costruire un cilindro il cui asse è l'asse z e il cui raggio è tale che il punto si trovi sulla superficie del cilindro (Figura 3.11). Le prime due coordinate sono le stesse di un sistema polare, la terza coincide con l'altezza z rispetto al piano verticale, pertanto qualunque punto è caratterizzato dalla terna (ρ, φ, z) .

Le relazioni che legano (ρ, φ, z) a (x, y, z) sono:

$$x = \rho \cos \varphi \quad (3.10)$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad (3.11)$$

$$z = z \quad (3.12)$$

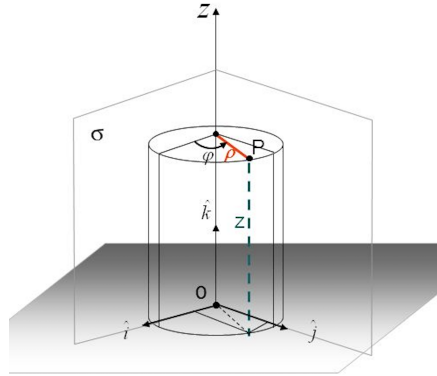


Figura 3.11: Coordinate cilindriche (ρ, φ, z) .

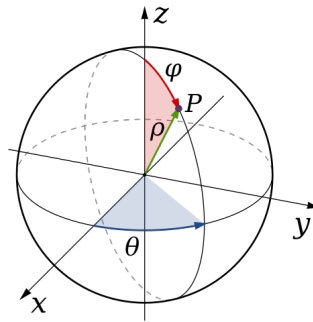


Figura 3.12: Coordinate sferiche (ρ, θ, φ) .

$$\tan \varphi = y/x \quad (3.13)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.14)$$

$$z = z \quad (3.15)$$

3.8 Sistema di coordinate sferiche

Nelle coordinate sferiche, la posizione del punto equivale a costruire una sfera il cui centro sia nell'origine e il cui raggio sia tale che il punto si trovi sulla superficie della sfera (Figura 3.12). Le tre coordinate sferiche sono il raggio della sfera, l'angolo φ misurato dall'asse z verso il piano $x - y$ (angolo *polare*), e l'angolo θ misurato dall'asse x verso l'asse y (angolo *azimutale*):

3 GEOMETRIA ANALITICA

Le relazioni che legano (ρ, θ, φ) a (x, y, z) sono:

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta \quad (3.16)$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta \quad (3.17)$$

$$z = \rho \cos \varphi \quad (3.18)$$

$$\cos \varphi = z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.19)$$

$$\tan \theta = y / x \quad (3.20)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.21)$$

4 INTRODUZIONE ALLA MECCANICA

4.1 Elementi di cinematica ed analisi vettoriale

4.1.1 Introduzione

In questo capitolo discuteremo l'impostazione dello studio quantitativo del moto dei corpi, oggetto della Meccanica. Tradizionalmente lo studio della Meccanica si divide in due parti. La prima, detta *cinematica*, riguarda la definizione di tutte le grandezze necessarie a descrivere quantitativamente il moto di un generico sistema e lo studio delle relazioni tra le varie grandezze cinematiche. La seconda parte, chiamata *dinamica*, si occupa invece di determinare le cause del moto e il legame tra le cause del moto e gli effetti che producono.

In sostanza la cinematica è utile per descrivere quantitativamente risultati di osservazioni sperimentali sul moto dei corpi, mentre la dinamica è fondamentale per comprendere gli elementi di un sistema meccanico in moto (alla base della progettazione meccanica sia di motori che di strutture statiche).

4.1.2 Posizione e moto

Il primo punto da affrontare per cercare di descrivere quantitativamente il moto di un corpo è definire cosa si intende per moto. Senza complicarci inutilmente la vita possiamo dire che un corpo si dice in moto quando la sua posizione cambia nel tempo. Un corpo la cui posizione non cambi nel tempo si dice invece in quiete. Questa definizione risolve un problema ma ne genera altri due: come si determina quantitativamente la posizione di un corpo? Inoltre la quantificazione della posizione dipende solo da dove si trova il corpo?

Determinare la posizione di un corpo di forma e dimensioni qualsiasi può essere complicato, soprattutto se la forma del corpo cambia nel tempo. Il caso più semplice di tutti è quello di un corpo talmente piccolo da poterne trascurare l'estensione spaziale. Un tale sistema si chiama *punto* o *particella*, o *punto materiale* nel caso si introduca anche la massa.

Nel momento in cui siamo capaci di quantificare la posizione di una singola particella puntiforme possiamo immaginare di dividere un generico corpo in un numero sufficiente di particelle puntiformi, specificando quindi la posizione del corpo tramite la posizione di tutte le particelle che lo compongono.

In generale questa descrizione può essere complicata, perché il moto delle varie particelle componenti può essere diverso da particella a particella, richiedendo un elevato numero di informazioni per descrivere il moto. In queste dispense ci occuperemo solamente di descrivere il moto di una singola particella puntiforme. L'utilità di questo sistema ideale (nessun corpo per quanto piccolo è realmente puntiforme) è estremamente elevata per almeno tre diversi motivi. Innanzitutto, nel momento in cui si debbano tracciare i tratti importanti di un concetto teorico nuovo, è sempre utile trattare per primo il sistema più semplice possibile, perfino se è un modello non perfettamente aderente alla realtà. La descrizione del moto di una singola particella consente di introdurre i concetti teorici necessari in cinematica, che successivamente si possono estendere ad un corpo qualsiasi applicandoli alle particelle componenti. Inoltre ci sono dei casi in cui un sistema si muove su scale molto maggiori di quelle delle sue dimensioni. Ad esempio la Terra, che ha un raggio medio di circa 6400 km, non ha forma costante a causa delle maree e delle irregolarità della superficie, si muove intorno al Sole percorrendo un'orbita di $\sim 1.5 \times 10^{15}$ km di raggio (quindi molto più grande del raggio terrestre) descrivibile con ottima approssimazione considerando sia la Terra che il Sole come particelle puntiformi. Infine, come già discusso, la conoscenza della cinematica della particella puntiforme consente di descrivere il moto di sistemi qualsiasi, pensandoli come un insieme sufficientemente numeroso di particelle puntiformi componenti.

Data una particella in moto l'espressione della dipendenza temporale della sua posizione definisce la *legge oraria del moto*. L'insieme dei punti dello spazio su cui la particella transita durante il moto definisce invece una curva, chiamata *traiettoria*.

4.1.3 Vettore di posizione

In base a quanto abbiamo detto, la descrizione quantitativa del moto di una particella, indicata genericamente con P , passa dalla determinazione della dipendenza dal tempo della sua posizione, e quindi delle sue coordinate. In genere avremo che ogni coordinata è una funzione del tempo, e il moto sarà noto quando siano note le posizioni della particella $(x_P(t), y_P(t), z_P(t))$, indicate con il nome *vettore delle coordinate del punto P* (vedi Figura 4.1(a)).

La notazione $(x_P(t), y_P(t), z_P(t))$, che indica la posizione del punto P rispetto alle tre coordinate spaziali, è data dalla conoscenza delle tre funzioni, $x_P(t)$, $y_P(t)$ e $z_P(t)$, scritte in modo compatto come (x_P, y_P, z_P) , circondate da parentesi tonde.

A parità di informazione esiste una scelta alternativa, che consente di esprimere la posizione di una particella puntiforme basata sul concetto di vettore. Consideriamo ancora una particella nel punto P e fissiamo un riferimento cartesiano. La posizione di P può essere assegnata anche specificando la freccia orientata che congiunge l'ori-

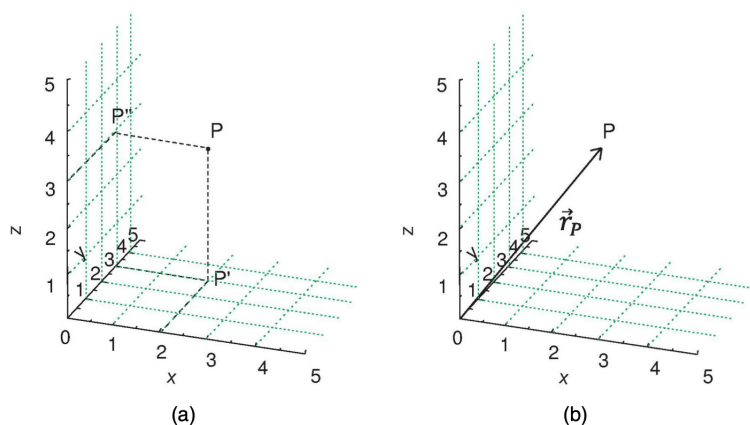


Figura 4.1: Coordinate cartesiane del punto P , tramite opportune proiezioni ortogonali (a). Vettore di posizione del punto P (b).

gine del sistema di riferimento al punto P (vedi Figura 4.1(b)), indicato con il nome *vettore di posizione*.

Tale freccia sarà specificata tramite la sua lunghezza, che rappresenta la distanza di P dall'origine, la direzione della retta su cui la freccia giace, e il verso lungo cui muoversi per andare da O a P , specificato graficamente dalla posizione della punta della freccia.

Una freccia orientata nello spazio rappresenta un caso particolare di vettore, appunto il *vettore di posizione* della particella. Nell'esempio mostrato il vettore di posizione ha il primo estremo (chiamato origine o punto di applicazione del vettore) nell'origine O del sistema di riferimento ed il secondo estremo (detto estremo libero) nel punto in cui si trova la particella, e pertanto identifica univocamente la posizione della particella a quel tempo.

A differenza di molte grandezze, dette scalari, che sono quantificate assegnandone solo un valore numerico, i vettori sono specificati una volta che si conoscono tre dati:

1. Un valore numerico che quantifica il valore della grandezza, detto modulo (per il vettore di posizione coincide con la distanza tra O e P)
2. la direzione della retta su cui il vettore giace,
3. il verso.

Dal punto di vista della notazione, per consentire di distinguere rapidamente una grandezza vettoriale da una scalare, i vettori vengono indicati con una lettera associata alla grandezza che rappresentano, sormontata da una freccia. Il vettore di posizione si indica pertanto con $\vec{r}$ (indicato anche come *raggio vettore*). Il modulo

del vettore si indica con lo stesso simbolo del vettore scritto in valore assoluto o, più semplicemente con lo stesso simbolo del vettore privato della freccia, quindi $|r|$ o r .

La legge oraria del moto è data dalla funzione $\vec{r}(t)$. Si noti che l'utilizzo del vettore di posizione non diminuisce il numero di informazioni necessarie per determinare la legge oraria che è sempre pari a tre, solo che prima erano la dipendenza dal tempo di tre coordinate e ora sono la dipendenza dal tempo del modulo, della direzione e del verso del vettore di posizione.

Come primo esempio di utilità del vettore di posizione consideriamo una particella in moto che in un istante iniziale si trovi nel punto P e in un istante successivo si sia spostata in Q , e cerchiamo di capire cosa si debba specificare per individuare univocamente lo spostamento da P a Q .

Lo spostamento ci deve consentire di determinare univocamente il punto di arrivo Q , una volta che sia noto il punto di partenza P . Con un ragionamento analogo a quello visto per definire il vettore di posizione è facile convincersi che il vettore che ha origine in P ed estremo libero in Q contiene tutte le informazioni che servono per identificare Q , una volta noto P . Tale vettore $\overrightarrow{PQ}$ si chiama *vettore spostamento*.

4.2 Algebra vettoriale

Il caso della posizione e dello spostamento rappresentano solo due esempi di grandezze vettoriali che si incontrano in Fisica, che però dovrebbero essere sufficienti a comprendere come l'utilizzo dei vettori sia rilevante per affrontare problemi di meccanica.

Per poter utilizzare in maniera corretta i vettori è importante cercare di capire quali operazioni algebriche si possano effettuare con i vettori, e quali risultati si ottengano, che saranno oggetto delle prossime sezioni. Anche in questo caso il taglio della trattazione sarà molto pratico, rimandando le dovute generalizzazioni a corsi universitari di Matematica.

4.2.1 Prodotto di un vettore per uno scalare

Il primo problema che affrontiamo è se ha senso la moltiplicazione di una grandezza vettoriale con uno scalare (un numero) e, se sì, che risultato si ottiene.

A tale scopo consideriamo un semplice esempio di una particella che effettui in un dato intervallo di tempo un determinato spostamento $\overrightarrow{PQ}$ e cerchiamo di capire se ha senso fisico uno spostamento doppio, quindi $2\overrightarrow{PQ}$. Per semplicità supponiamo anche che la particella spostandosi da P a Q si muova lungo il segmento PQ , come nel caso dello spostarsi di un passo (sia ben chiaro però che questo non è detto succeda sempre, perché qualunque traiettoria segua la particella da P a Q corrisponde allo stesso spostamento).

Conoscere PQ ci consente di sapere che la particella ha raggiunto un punto a distanza da P pari al modulo del vettore $\overrightarrow{PQ}$, lungo la direzione della retta passante per P e Q , e nel verso che va da P a Q .

Se la particella percorresse lo spostamento doppio $2\overrightarrow{PQ}$ ragionevolmente percorrerebbe il doppio della strada (lunghezza di due passi), lungo la stessa direzione e nello stesso verso.

Questa conclusione effettivamente è corretta e può essere generalizzata nel seguente modo: Il prodotto di un vettore $\vec{v}$ per uno scalare m ha come risultato un vettore con:

- Modulo pari a $|m||v|$;
- Direzione uguale a quella di $\vec{v}$;
- Verso uguale a quello di $\vec{v}$ se $m > 0$, e opposto a quello di $\vec{v}$ se $m < 0$.

In particolare, l'operazione di prodotto per uno scalare consente di definire per ogni vettore $\vec{v}$ il vettore opposto, dato dal prodotto di $\vec{v}$ con -1 . Quindi $-\vec{v}$ ha lo stesso modulo e direzione di $\vec{v}$ ma verso opposto.

Tutti i vettori del tipo $m\vec{v}$ (quindi tutti i multipli di $\vec{v}$) sono paralleli tra loro (nel senso che hanno la stessa direzione) e sono concordi (stesso verso) o discordi (verso opposto) a $\vec{v}$ a seconda del segno di m . Questa proprietà può essere sfruttata per esprimere tutti i vettori con la stessa direzione come multipli l'uno dell'altro.

Ai fini pratici è particolarmente utile introdurre vettori che rappresentino delle direzioni orientate nello spazio, rispetto ai quali esprimere tutti i vettori con la stessa direzione ricorrendo alla moltiplicazione per uno scalare opportuno. Tali vettori di riferimento si chiamano *versori*, hanno modulo pari a uno e si rappresentano con un opportuno simbolo sormontato dal carattere $\hat{}$. Come caso particolare di direzioni orientate nello spazio abbiamo visto quello degli assi cartesiani, a cui è possibile associare i rispettivi versori $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$, che sono vettori di modulo unitario paralleli e concordi ai corrispondenti assi.

4.2.2 Somma di vettori

Come prossimo passo cerchiamo di comprendere se sia possibile sommare due o più vettori, e come si fa.

Rimanendo a vettori che rappresentino spostamenti, consideriamo una particella che effettua prima lo spostamento $\overrightarrow{PQ}$ e poi lo spostamento $\overrightarrow{QR}$. Innanzitutto, non c'è motivo per cui la particella non possa effettuare due spostamenti consecutivi, i cui effetti si sommano determinando la posizione finale. Se ci limitassimo ad osservare la particella nell'istante iniziale ed in quello finale, senza osservare il passaggio da Q ,

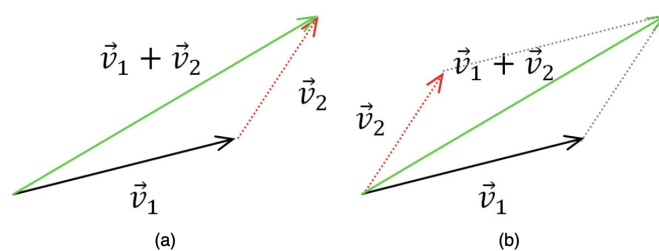


Figura 4.2: (a) Rappresentazione grafica della regola triangolare di somma di due vettori. (b) Rappresentazione grafica della regola del parallelogramma di somma di due vettori.

saremmo portati ad affermare che la particella ha effettuato lo spostamento da P ad R , quindi $\overrightarrow{PR}$.

Nei due casi la particella parte da P e arriva in R , quindi effettua lo stesso spostamento, consentendoci di scrivere: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. Generalizzando questa conclusione possiamo affermare che, se il primo vettore ha l'estremo libero nel punto in cui il secondo ha l'origine *la somma di due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ ha come risultato un vettore che ha come origine l'origine del primo vettore, e come estremo libero quello del secondo vettore.*

È utile osservare che, in base alla nostra definizione, un vettore è definito da modulo, direzione e verso. Una volta assegnati questi parametri non è specificato dove si trovi l'origine. Tutti i vettori con ugual modulo, direzione e verso, ma diversa origine (o punto di applicazione) si dicono equipollenti.

Spesso in Fisica il punto di applicazione è rilevante. Ad esempio, due spostamenti equipollenti applicati in punti diversi producono punti di arrivo della particella diversi. In generale però le operazioni tra vettori possono essere effettuate sostituendo ogni vettore con un suo vettore equipollente (quindi scegliendo dove applicare il vettore in base alla convenienza). Questo consente di costruire il vettore somma in due modi equivalenti (vedi Figura 4.2):

1. **Regola triangolare:** la somma di due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, disegnati in modo che l'estremo libero di $\vec{v}_1$ coincida con il punto di applicazione di $\vec{v}_2$ è il vettore che congiunge il punto di applicazione di $\vec{v}_1$ all'estremo libero di $\vec{v}_2$, e che pertanto consente di formare un triangolo tra $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (vedi Figura 4.2a).
2. **Regola del parallelogramma:** la somma di due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, disegnati con lo stesso punto di applicazione, è la diagonale principale del parallelogramma costruito sui due vettori (vedi Figura 4.2b).

Delle due regole quella triangolare è la più semplice da estendere a più di due vettori (pensate sempre all'esecuzione di spostamenti consecutivi): La somma di più

vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_N$, disegnati in modo che ogni vettore abbia per origine l'estremo libero del precedente ha come risultato il vettore che ha come origine l'origine del primo vettore, e come estremo libero quello dell'ultimo vettore.

Per quanto le regole grafiche di somma consentano abbastanza facilmente di disegnare il vettore somma di almeno due vettori, non è banale determinare il vettore somma in termini di modulo, direzione e verso, partendo dalle analoghe informazioni dei vettori addendi. Prima di vedere come si possa determinare quantitativamente il vettore somma è utile elencare le principali proprietà matematiche della somma, facili da verificare graficamente:

1. **Commutatività:** la somma tra vettori è commutativa, cioè non cambia se si cambia l'ordine degli addendi.
2. **Associatività:** la somma tra vettori è associativa, cioè: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_3) + \vec{v}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) + \vec{v}_1$.
3. **Distributività** rispetto al prodotto per uno scalare: la somma tra vettori è distributiva rispetto al prodotto per uno scalare, valgono cioè le uguaglianze: $(a + b)\vec{v}_1 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_1$ e $a(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = a\vec{v}_1 + a\vec{v}_2$.

4.2.3 Differenza tra vettori

La differenza tra due vettori $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ può essere definita semplicemente come la somma di $\vec{v}_1$ con l'opposto di $\vec{v}_2$. Per determinare graficamente il vettore differenza si può ricorrere indifferentemente alla regola triangolare (vedi Figura 4.3a) o a quella del parallelogramma (vedi Figura 4.3b).

In particolare, la regola del parallelogramma consente di concludere che *la differenza tra due vettori è la diagonale secondaria del parallelogramma formato dai vettori ed è il vettore che ha per origine l'estremo libero del secondo vettore e per estremo libero l'estremo libero del primo vettore* (più semplicemente è il vettore che congiunge la fine del primo vettore con quella del secondo).

4.2.4 Decomposizione in componenti

Al fine di cercare un modo semplice per calcolare la somma di due o più vettori immaginiamo di conoscere un vettore generico e cerchiamo di capire se tale vettore può essere ottenuto sommando tra loro due o più vettori.

Il vettore di posizione può essere anche considerato come il vettore spostamento che consente di spostarsi dall'origine O al punto P . Al fine di esprimere $\vec{OP}$ in vettori componenti immaginiamo ora di raggiungere P , partendo dall'origine, non andando direttamente da O a P , ma sommando spostamenti lungo gli assi cartesiani.

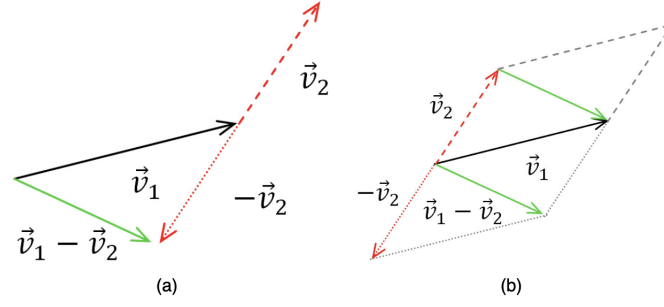


Figura 4.3: (a) Rappresentazione grafica della regola triangolare per la differenza di due vettori. (b) Rappresentazione grafica della regola del parallelogramma della differenza di due vettori, in tal caso il vettore differenza è anche rappresentato all'interno del parallelogramma costruito su $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ per evidenziare come ne rappresenti la diagonale secondaria

Quando ci si sposta lungo un asse si passa attraverso punti per cui cambia solo la coordinata relativa alla direzione di spostamento, lasciando invariate le altre due coordinate. Ad esempio, spostandoci lungo l'asse x raggiungiamo punti che hanno x diverse ma y e z uguali (pari a zero se ci si muove lungo l'asse x , e costanti se ci si muove lungo una retta parallela all'asse x ma non passante per l'origine O).

Considerato che per andare da O a P dobbiamo cambiare tutte e tre le coordinate, e che gli spostamenti lungo gli assi cambiano una coordinata per volta, è immediato concludere che lo spostamento lungo x deve portare la x da 0 a x_P , quello lungo y deve portare la y da 0 a y_P e quello lungo z deve portare la z da 0 a z_P .

Ogni spostamento componente sarà pertanto lungo la direzione del rispettivo asse, di modulo pari al valore assoluto della rispettiva coordinata, e concorde all'asse se la coordinata è positiva e discorde se negativa, pertanto:

$$\vec{r}_x = x_P \hat{x} \quad (4.1)$$

$$\vec{r}_y = y_P \hat{y} \quad (4.2)$$

$$\vec{r}_z = z_P \hat{z} \quad (4.3)$$

Pertanto $\vec{r} = x_P \hat{x} + y_P \hat{y} + z_P \hat{z}$ (vedi Figura 4.4). I vettori $\vec{r}_x$, $\vec{r}_y$ e $\vec{r}_z$ sono vettori componenti di $\vec{r}$, mentre gli scalari x_P , y_P e z_P sono le componenti cartesiane di $\vec{r}_P$ (le proiezioni di $\vec{r}_P$ lungo le direzioni degli assi cartesiani).

Considerato che il punto P è stato preso arbitrariamente, questa decomposizione in componenti può essere generalizzata ad un generico vettore di posizione. È possibile dimostrare che il numero minimo di vettori componenti che consentono di esprimere un generico vettore di un insieme dipende dalla dimensione dell'insieme. Nel caso

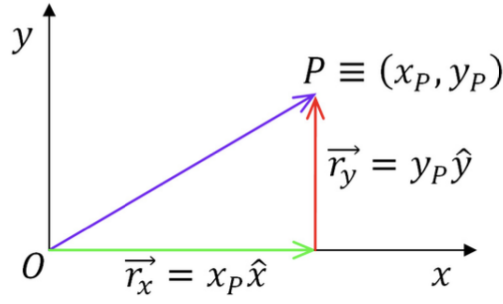


Figura 4.4: Esempio di decomposizione in componenti cartesiane per il vettore di posizione di un punto nel piano cartesiano $x - y$. È evidente la coincidenza delle componenti cartesiane del vettore di posizione con le omologhe coordinate del punto

dei vettori di posizione sono necessari 3 vettori se la particella si muove in tutto lo spazio, mentre ne sono sufficienti 2 se la particella si può muovere solo in un piano.

A questo punto prendiamo due vettori qualsiasi $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ con la seguente decomposizione in componenti cartesiane:

$$\vec{v}_1 = x_1 \hat{x} + y_1 \hat{y} + z_1 \hat{z} \quad (4.4)$$

$$\vec{v}_2 = x_2 \hat{x} + y_2 \hat{y} + z_2 \hat{z} \quad (4.5)$$

Calcoliamo quindi per calcolo diretto la somma dei due vettori $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ esprimendo $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ in componenti:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = x_1 \hat{x} + y_1 \hat{y} + z_1 \hat{z} + x_2 \hat{x} + y_2 \hat{y} + z_2 \hat{z} \quad (4.6)$$

Sfruttando la proprietà commutativa e distributiva della somma tra vettori possiamo riarrangiare i termini nel seguente modo:

$$\vec{v} = (x_1 + x_2) \hat{x} + (y_1 + y_2) \hat{y} + (z_1 + z_2) \hat{z} \quad (4.7)$$

L'espressione finale della somma rappresenta la somma di vettori paralleli ai versori degli assi (si chiama combinazione lineare dei versori), e rappresenta pertanto la decomposizione in componenti cartesiane del vettore somma. Possiamo quindi concludere che la decomposizione cartesiana di un vettore consente di determinare semplicemente la somma di due o più vettori, infatti *il vettore somma di due o più vettori ha per componenti cartesiane la somma delle componenti omologhe dei vettori addendi*. Il termine *omologhe* significa relative allo stesso asse (quindi la componente x della somma è la somma di tutte le componenti x degli addendi, e così via).

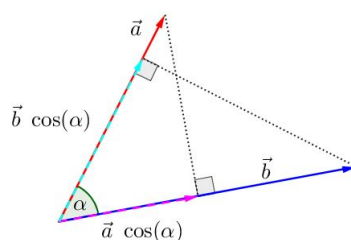


Figura 4.5: Interpretazione geometrica del prodotto scalare

4.2.5 Moltiplicazione tra vettori: il prodotto scalare

Per quanto riguarda le operazioni di moltiplicazione tra vettori esistono due operazioni distinte, il prodotto scalare, oggetto della presente sottosezione, e il prodotto vettoriale, descritto nella prossima sottosezione.

Nello studio della Meccanica, ad esempio, si scopre che in certi casi alcune grandezze vettoriali producono effetti diversi a seconda di come siano orientate rispetto a qualche direzione caratteristica del sistema. Ad esempio, le cause del moto sono le interazioni con altri sistemi, quantificate dalle forze, a cui è associabile un'intensità, una direzione, un verso ed un punto di applicazione, e che sono quindi dei vettori. La capacità di una forza di aumentare la velocità di una particella su cui agisce dipende da quanto la forza è parallela agli spostamenti della particella.

Il primo modo di moltiplicare tra di loro due vettori si chiama prodotto scalare. In riferimento alla Figura 4.5, siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due vettori non perpendicolari e α l'angolo fra essi compreso. *Il prodotto scalare tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ha come risultato uno scalare pari al prodotto dei moduli dei due vettori e del coseno dell'angolo formato dai due vettori* (cioè l'angolo di cui deve ruotare il primo vettore per sovrapporsi al secondo se i due vettori sono disegnati con origine comune)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \quad (4.8)$$

Si noti che, per identificare il prodotto scalare tra due vettori, si usa il simbolo ' $\cdot$ '. Si noti anche che il prodotto scalare rappresenta l'area (con segno) del rettangolo ottenuto proiettando uno dei due vettori ortogonalmente sull'altro (vedi Figura 4.6), per cui si può equivalentemente definire il prodotto scalare nel seguente modo: *il prodotto scalare tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è uno scalare pari al prodotto tra il modulo di uno dei due vettori e il modulo della proiezione dell'altro vettore lungo la direzione del primo e un segno che è dato dal segno del coseno dell'angolo compreso.*

Tra i risultati importanti da ricordare abbiamo:

1. Il prodotto scalare tra due vettori è nullo se e solo se i due vettori sono perpendicolari, o almeno uno dei vettori è il vettore nullo (vettore degenere di modulo

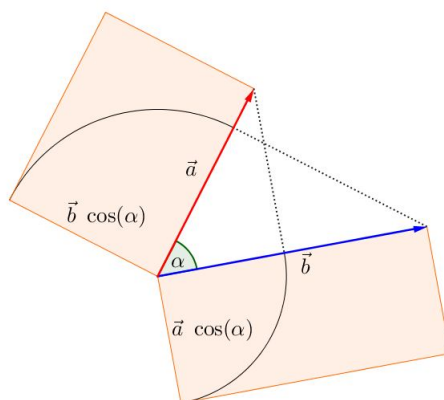


Figura 4.6: Interpretazione geometrica del prodotto scalare

- 0). Infatti se il prodotto scalare è nullo è necessariamente nullo almeno uno tra i moduli dei vettori o il coseno dell'angolo compreso. Il coseno è nullo se l'angolo è 90° o 270° o, equivalentemente, $\pi/2$ o $3\pi/2$ radianti.
2. Il prodotto scalare tra due vettori è massimo quando i due vettori sono paralleli e concordi. Infatti se i vettori sono paralleli e concordi $\alpha = 0$ e, poiché $\cos \alpha = 1$, il prodotto scalare è massimo e pari a $|a||b|$.
 3. Il prodotto scalare tra due vettori è minimo quando i due vettori sono antiparalleli, cioè paralleli e discordi. Infatti se i vettori sono antiparalleli $\alpha = 180^\circ$ (o π radianti) e, poiché $\cos \pi = -1$ il prodotto scalare è minimo e pari a $-|a||b|$.

Per quanto riguarda le proprietà algebriche del prodotto scalare valgono le seguenti proprietà:

1. **Commutatività:** il prodotto scalare è commutativo, cioè non cambia se si cambia l'ordine dei fattori. Quindi $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. La dimostrazione è immediata perché se si cambia l'ordine dei fattori l'angolo che formano cambia segno. Poiché la funzione coseno è una funzione pari vale l'uguaglianza $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$. Considerato inoltre che il prodotto tra scalari è commutativo, $ab = ba$, si ottiene la commutatività del prodotto scalare.
2. **Distributività** rispetto alla somma: anche il prodotto scalare è distributivo rispetto alla somma. Vale quindi l'uguaglianza: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$. Rovesciando l'uguaglianza questa proprietà consente di mettere a fattor comune eventuali vettori comuni in prodotti scalari sommati tra loro.

4 INTRODUZIONE ALLA MECCANICA

La nullità del prodotto scalare tra vettori perpendicolari ha come conseguenza che il prodotto scalare tra versori di assi ortogonali diversi è sempre nullo, cioè $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0$.

Nel momento in cui si cerca di calcolare il prodotto scalare tra due vettori usando la (4.8), si nota immediatamente che la definizione è scomoda, poiché richiede di calcolare l'angolo da essi formato.

È però abbastanza facile calcolare il prodotto scalare tra due vettori rispetto alle proprie componenti cartesiane. Supponiamo siano dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e calcoliamone il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sostituendo a $\vec{a}$ e $\vec{b}$ la loro decomposizione in funzione dei versori degli assi coordinati:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\hat{x} + a_2\hat{y} + a_3\hat{z}) \cdot (b_1\hat{x} + b_2\hat{y} + b_3\hat{z}) \quad (4.9)$$

Sfruttando la distributività del prodotto scalare rispetto alla somma si ha:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1\hat{x} \cdot \hat{x} + a_2b_2\hat{y} \cdot \hat{y} + a_3b_3\hat{z} \cdot \hat{z} + a_1b_2\hat{x} \cdot \hat{y} + \dots \quad (4.10)$$

Di questi termini solo i primi tre sono non nulli; infatti tutti i termini incrociati successivi sono nulli in quanto includono il prodotto scalare fra versori ortogonali. Pertanto: *Il prodotto scalare tra due vettori di cui siano note le componenti cartesiane è pari alla somma dei prodotti delle componenti omologhe.*

La capacità di calcolare il prodotto scalare direttamente dalle componenti è anche utile per esprimere in funzione delle componenti il modulo del vettore. Infatti considerando il vettore $\vec{a}$ abbiamo:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| = |\vec{a}|^2 \quad (4.11)$$

Pertanto il prodotto scalare di un vettore per se stesso è pari al modulo quadro del vettore. Ricorrendo all'espressione del prodotto scalare in funzione delle componenti abbiamo anche:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad (4.12)$$

che consente di concludere che

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (4.13)$$

È immediato verificare che nel caso in cui il vettore sia in uno dei piani cartesiani, ad esempio il piano $x - y$, l'uguaglianza trovata coincide con il teorema di Pitagora.

Infine il prodotto scalare è utile anche per determinare le componenti di un vettore di cui siano noti il modulo e la direzione. Valgono infatti le seguenti uguaglianze:

$$a_1 = \vec{a} \cdot \hat{x} \quad (4.14)$$

$$a_2 = \vec{a} \cdot \hat{y} \quad (4.15)$$

$$a_3 = \vec{a} \cdot \hat{z} \quad (4.16)$$

4.2.6 Moltiplicazione tra vettori: il prodotto vettoriale

L'ultima operazione che esamineremo è una moltiplicazione tra vettori che ha come risultato un vettore. Tale operazione va sotto il nome di *prodotto vettoriale*.

Il prodotto vettoriale è costruito in modo tale che il risultato sia un vettore mutuamente ortogonale ad altri due vettori (ossia perpendicolare al piano individuato dai due vettori) e che gode di alcune proprietà geometriche.

Al fine di costruire il prodotto vettoriale, si immagini di trovarsi in uno spazio 3D e di avere due vettori, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, e di voler trovare un terzo vettore che sia perpendicolare al piano in cui giacciono $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Affinché $\vec{v}$ e $\vec{w}$ definiscano un piano, non devono giacere lungo la stessa direzione; infatti, se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli o anti-paralleli, hanno la stessa direzione ed esistono infiniti piani che passano per entrambi, e quindi infiniti vettori perpendicolari a tutti questi piani.

Siano ora $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, le componenti di questi due vettori non paralleli/anti-paralleli. L'obiettivo è trovare un vettore $\vec{z} = (a, b, c)$ che sia perpendicolare ad entrambi. Sfruttando le proprietà del prodotto scalare, la condizione di ortogonalità fra $\vec{v}$ e $\vec{z}$, e fra $\vec{w}$ e $\vec{z}$, si ottiene dalle seguenti condizioni:

$$\vec{v} \cdot \vec{z} = av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \quad (4.17a)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{z} = aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0 \quad (4.17b)$$

In questo caso abbiamo tre incognite, le componenti a , b e c del vettore $\vec{z}$, e due equazioni. Infatti le soluzioni del sistema (4.17) definiscono gli infiniti vettori che sono perpendicolari sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$. Una possibile soluzione del sistema è la seguente:

$$\vec{z} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1) \quad (4.18)$$

come può essere verificato per sostituzione.

Fra tutte le possibili soluzioni che potevano essere scelte, la (4.18) gode di una interessante proprietà geometrica; infatti si può dimostrare che *il modulo del vettore $\vec{z}$ in (4.18) è dato dal prodotto dei moduli dei due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ per il seno dell'angolo convesso compreso*

$$|z| = |v||w| \sin \alpha \quad (4.19)$$

Questa proprietà si può dimostrare osservando che

$$|v|^2|w|^2 = |v|^2|w|^2 \cos^2 \alpha + |v|^2|w|^2 \sin^2 \alpha \quad (4.20)$$

ma $|v||w| \cos \alpha$ non è altro che il risultato del prodotto scalare, per cui la (4.20) si può riscrivere come

$$|v|^2|w|^2 - |\vec{v} \cdot \vec{w}|^2 = |v|^2|w|^2 \sin^2 \alpha \quad (4.21)$$

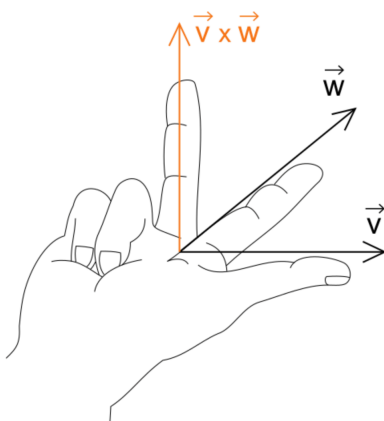


Figura 4.7: L'orientazione dei vettori di un prodotto vettoriale

Ora, svolgendo le operazioni al primo membro, si può dimostrare che il risultato è proprio uguale a $|\vec{v} \times \vec{w}|^2$ se usiamo la soluzione definita in (4.18), ossia

$$|\vec{v} \times \vec{w}|^2 = |v|^2 |w|^2 \sin^2 \alpha \quad (4.22)$$

prendendo le radici di ambo i membri otteniamo il modulo del prodotto vettoriale

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |v| |w| \sin \alpha \quad (4.23)$$

Infine si può dimostrare che i vettori $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$ in (4.18) sono orientati seguendo la regola della mano destra (si veda la Figura (4.7)).

In sintesi, il prodotto vettoriale tra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ha come risultato un vettore che gode delle seguenti proprietà:

- modulo pari a $|v||w| \sin \alpha|$, dove α è l'angolo convesso fra i due vettori. Equivalentemente il modulo è pari al prodotto del modulo del primo vettore per la proiezione del secondo lungo la direzione perpendicolare al primo.
- Direzione perpendicolare al piano formato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$ o, equivalentemente, perpendicolare sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$.
- Verso che segue la regola della mano destra, ossia orientando il pollice lungo il primo vettore, l'indice lungo il secondo vettore, il vettore risultante è orientato lungo il verso del dito medio. Il tutto usando la mano destra, come in Figura (4.7).

È usuale identificare il prodotto vettoriale con il simbolo ' $\times$ ', come nella notazione $\vec{z} = \vec{u} \times \vec{w}$, o anche con il simbolo ' $\wedge$ ', $\vec{z} = \vec{u} \wedge \vec{w}$.

Tra i risultati importanti da ricordare abbiamo:

1. Il prodotto vettoriale tra due vettori è il vettore nullo se e solo se i due vettori hanno la stessa direzione, o almeno uno dei vettori è il vettore nullo. Infatti se il prodotto vettoriale ha modulo zero è necessariamente nullo almeno uno tra i moduli dei vettori o il seno dell'angolo formato. Il seno è nullo se l'angolo è 0° o 180° o, equivalentemente 0 o π radianti. Pertanto se il prodotto vettoriale è nullo i vettori sono paralleli, antiparalleli, o almeno uno è il vettore nullo. L'implicazione opposta è immediata perché se almeno uno dei vettori è nullo è per forza nullo il suo prodotto vettoriale con qualsiasi altro vettore, così come se i due vettori sono paralleli o antiparalleli il prodotto vettoriale è necessariamente nullo.
2. Il modulo del prodotto vettoriale tra due vettori è massimo quando i due vettori sono perpendicolari. Infatti se i vettori sono perpendicolari, $\alpha = 90^\circ$ o $\alpha = 270^\circ$ e $|\sin \alpha| = 1$, il prodotto vettoriale ha modulo massimo e pari a $|v||w|$.

Come già evidente dalla definizione, il prodotto vettoriale è più macchinoso da calcolare rispetto al prodotto scalare, ma è altrettanto importante. Questo prodotto compare in molti ambiti della Fisica, ad esempio quando si studiano i movimenti rotatori in Meccanica o quando si studiano le proprietà magnetiche della materia.

Iniziamo a prendere confidenza con il prodotto vettoriale calcolando il prodotto vettoriale tra i versori degli assi di un sistema di riferimento cartesiano, ad esempio $\vec{v} = \hat{x} \times \hat{y}$, partendo dal calcolarne il modulo. Dato che i vettori sono ortogonali il seno dell'angolo formato è pari a 1 pertanto $\hat{x} \times \hat{y} = |\hat{x}||\hat{y}| = 1$ Il vettore $\vec{v}$ è un vettore di modulo unitario. La direzione di $\vec{v}$ è quella perpendicolare al piano formato da $\hat{x}$ e $\hat{y}$, ovvero è la stessa di quella del versore $\hat{z}$. Per quanto riguarda il verso, se i tre versori costituiscono una terna destrorsa, allora, per costruzione, anche il verso coincide con quello del versore $\hat{z}$, altrimenti con il verso opposto.

Passiamo ora ad analizzare le proprietà algebriche del prodotto vettoriale:

- **Commutatività:** per il prodotto vettoriale non vale la proprietà commutativa, in quanto, come è immediato derivare applicando la regola della mano destra, $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, ossia invertendo i fattori si inverte anche il verso del vettore risultante. Questa proprietà discende dalla variazione del verso di rotazione che sovrappone il primo vettore al secondo quando si invertono i due vettori. In questo caso si dice che il prodotto vettoriale è *anticommutativo*.
- **Associatività:** per il prodotto vettoriale ha senso discutere l'associatività, perché si può calcolare $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w}$. Calcolando però $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ e $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ si ottengono risultati diversi. L'operazione pertanto non è associativa.
- **Distributività** rispetto alla somma: il prodotto vettoriale gode della proprietà di distributività rispetto alla somma. Vale cioè l'uguaglianza $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} =$

4 INTRODUZIONE ALLA MECCANICA

$\vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$, come può essere verificato dalle definizioni prima introdotte. Rovesciando l'uguaglianza questa proprietà consente di mettere a fattor comune eventuali vettori comuni in termini sommati tra loro. Tale operazione però va effettuata senza invertire di ordine i termini o, se si effettuano inversioni di questo tipo, ricordandosi di cambiare conseguentemente il segno.

Cerchiamo infine un modo pratico per derivare le componenti di un prodotto vettoriale. Ricordare a memoria la definizione (4.18) può risultare ostico, ma, con un abuso di notazione, è possibile derivare automaticamente l'equazione (4.18). Definita la matrice

$$\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

ossia la matrice in cui nella prima riga si inseriscono i versori degli assi coordinati, nella seconda riga le componenti del primo vettore, e nella terza riga le componenti del secondo vettore, allora il prodotto vettoriale si può derivare come se fosse il determinante di tale matrice

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \\ &= (v_2 w_3 - v_3 w_2) \hat{x} + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \hat{y} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \hat{z} \end{aligned}$$