

ESERCITAZIONE 7: limiti, continuità, asintoti - 1 parte

ESERCIZIO 1. Stabilire se le seguenti funzioni sono continue in $x = 0$. In caso negativo, classificare il tipo di discontinuità.

$$1.a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1, \end{cases},$$

$$1.b) \quad f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

$$1.c) \quad |x|,$$

$$1.d) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ x - x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2. Stabilire quali delle seguenti funzione sono infiniti e quali infinitesimi per $x \rightarrow +\infty$ (è possibile che non siano né l'uno né l'altro)

$$\begin{array}{ccccc} 3^x, & 3^{\frac{1}{x}}, & \left(\frac{1}{3}\right)^x, & \log(x^2 - 1), & \log\left(\frac{1}{3+x}\right), \\ \frac{1-x}{x^2+3x}, & \frac{x^3-x^5}{2-x^4}, & \sin\left(\frac{2}{3+x}\right), & \exp_3\left(\frac{x}{1+x}\right) = 3^{\frac{x}{1+x}}, & \exp_3\left(\frac{x}{1-x^2}\right). \end{array}$$

ESERCIZIO 3. Stabilire quali delle seguenti funzione sono infiniti e quali infinitesimi per $x \rightarrow 0$ (è possibile che non siano né l'uno né l'altro)

$$\begin{array}{ccccc} \cos x, & 3^{\frac{1}{x}}, & \sin(2x), & \log(1+x^2), & \log(x^2), \\ \log(\cos x), & \exp\left(\frac{1-x^5}{x^2}\right), & e^x - 1, & \frac{1+3x}{x}, & 1 - \exp_{10}\left(\frac{x}{1+x^2}\right). \end{array}$$

ESERCIZIO 4. Individuare il dominio e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1-x}{4-x^2}, & \frac{1-x^3}{2+x}, & \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}, & 2x + \sin x, & \frac{2x + \sin x}{1+x}, \\ \arctan \frac{x^2}{x-1}, & \log \frac{x}{x+1}, & \exp \frac{x}{x+1}, & \log \frac{x^2}{x+1}, & \exp(x^2 - 1). \end{array}$$

ESERCIZIO 5. Utilizzando l'algebra dei limiti (e le sue estensioni), i teoremi di confronto e il cambiamento di variabile nei limiti, calcolare:

5.a)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x}$	$[+\infty]$	5.b)	$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}$	$[0]$
5.c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \arctan x$	$[+\infty]$	5.d)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$	$[0]$
5.e)	$\lim_{x \rightarrow 1} \log\left(\frac{x}{x^2 - 2x + 1}\right)$	$[+\infty]$	5.f)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^3}\right)$	$[0]$
5.g)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{3+x}{1+x^3}\right)$	$[0]$	5.h)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)$	$[e^3]$
5.i)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \cos \frac{1+x}{x}$	$[+\infty]$	5.j)	$\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x}$	$[0]$
5.k)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-2}$	$[\lim_{x \rightarrow 2^\pm} = \mp\infty]$	5.l)	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{(x+2)^2}$	$[+\infty]$
5.m)	$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos(e^x - \log x)$	$[0]$	5.n)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$	$[0]$
5.o)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x}$	$[-\infty]$	5.p)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^2}{\sin x - 3x^4}$	$[-1/3]$
5.q)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 7}}{x^2 + 1}$	$[0]$	5.r)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{1 + 4^x}$	$[+\infty]$