ESERCITAZIONE 5: matrici e sistemi - seconda parte

ESERCIZIO 1.

1.a) Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ -5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.b) Stabilire quali delle seguenti matrici sono in forma ridotta:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.c) Trasformare in forma ridotta le seguenti matrici e determinarne il rango:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & 10 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 2. Scrivere in forma matriciale i seguenti sistemi e, dopo averli classificati (cioè dopo aver stabilito se sono determinati, indeterminati o incompatibili), risolverli:

2.a) $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ y - 2x = 0 \\ z + 2y + 1 = 0 \\ 3x - 2y + 3z = 1 \end{cases}$

2.b) $\begin{cases} 3x + 2z + t - 1 = 0 \\ 2y + z = 2 \\ -4y + 3x + 2t = 0 \end{cases}$

2.c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_4 + 1 = 0 \end{cases}$

2.d) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + 2y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

2.e) $\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$

2.f) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \\ 4x - y = 3 \\ -7y + 4z = 1 \end{cases}$

ESERCIZIO 3. Scrivere in forma estesa i seguenti sistemi e, dopo averli classificati, risolverli:

2.g) $A\vec{x} = \vec{b}$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}^T$ e $\vec{b} = (0, 1, 1, 1)^T$,

2.h) $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$ dove $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ESERCIZIO 4. Dire, motivando la risposta, se i seguenti sistemi omogenei ammettono soluzioni non banali. Se sì, descrivere l'insieme delle soluzioni, introducendo opportunamente parametri liberi.

4.a) $\begin{cases} x+5y-z=0 \\ y+2z=0 \\ x+4y-3z=0 \end{cases}$

4.b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

4.c) $\begin{cases} x_1+x_2=x_3 \\ 2x_2+x_3=0 \\ x_3-x_4=0 \end{cases}$

4.d) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 3x-y+z=0 \\ 2x-2y+3z=0 \\ x-3y+5z=0 \end{cases}$

ESERCIZIO 5. Alla luce delle proprietà del rango, rispondere ai seguenti quesiti.

5.i) Stabilire se i vettori riga $\vec{u}=(1,0,-1,2)$ e $\vec{v}=(0,1,2,0)$ sono linearmente indipendenti. Dire poi se $\vec{w}=(2,3,4,0)$ appartiene al sottospazio generato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

5.ii) Stabilire se i vettori riga $\vec{u}=(1,0,-1,0,1/5,2)$, $\vec{v}=(0,1,2,0,5,3)$, $\vec{w}=(-1,5,1,0,-1,-2)$ sono linearmente indipendenti.

5.iii) Dire se i vettori colonna $\vec{u_1}=(2,5,-3,0)^t$, $\vec{u_2}=(2,3,-1,1)^t$ e $\vec{u_3}=(0,2,-2,-1)^t$ sono linearmente indipendenti. Stabilire poi se il vettore $\vec{v}=(1,2,-1,0)^t$ è combinazione lineare di $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$. Precisare infine se il sistema di vettori $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$, $\vec{v}$ forma una base di V^4.

5.iv) Dire se i vettori $\vec{v_1}=(1,0,1,0,0)^t$, $\vec{v_2}=(0,3,0,0,0)^t$ e $\vec{v_3}=(1,3,1,0,0)^t$ sono linearmente indipendenti. Stabilire poi se il vettore $\vec{w}=(0,0,0,0,1)^t$ è combinazione lineare di $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$. Precisare infine se il sistema di vettori $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$, $\vec{w}$ forma una base di V^5.

5.v) Stabilire, motivando la risposta, se i vettori

$$u=(2,0,1,-4), \quad v=(5,-2,2,-1) \text{ e } \quad w=(1,-2,0,7)$$

sono linearmente indipendenti.

5.vi) Stabilire, motivando la risposta, se i vettori $\vec{u_1}=(1,1,2)$, $\vec{u_2}=(-1,4,4)$ e $\vec{u_3}=(5,0,4)$ formano una base di V^3. Dire poi se il vettore $\vec{v}=(0,1,6/5)$ è combinazione lineare di $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ e $\vec{u_3}$; in caso affermativo, determinare i valori delle incognite x,y,z per cui $x\vec{u_1}+y\vec{u_2}+z\vec{u_3}=\vec{v}$.

ESERCIZIO 6. Calcolare il rango della matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

e stabilire, motivando la risposta, se il sistema omogeneo $C\vec{x}=\vec{0}$ ammette soluzioni non banali.

ESERCIZIO 7. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Per ognuna delle seguenti affermazioni, stabilire se è vera o falsa e <u>scrivere la motivazione</u>:

a) La matrice A è invertibile. ☐ V ☐ F

b) Il sisitema lineare $A\vec{x}=\vec{b}$, con $\vec{b}=(1,2,1,0)^T$, è incompatibile ☐ V ☐ F

Se la risposta a b è F, determinare le soluzioni.

ESERCIZIO 8.

8.a) Calcolare la matrice $C=A\,B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1/2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Sia poi $\vec{v}$ il vettore $\vec{v} = (1, 1, 1)^T$. Si consideri poi il sistema lineare $C\,\vec{x} = \vec{v}$ e lo si scriva esplicitamente. Si stabilisca, motivando la risposta, se tale sistema è compatibile. In caso affermativo, si precisi se è determinato o indeterminato e se ne calcolino le soluzioni.

8.b) Calcolare la matrice $C = A\,B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia poi $\vec{v}$ il vettore $\vec{v} = (-1, -1, 1)^T$. Si consideri poi il sistema lineare $C\,\vec{x} = \vec{v}$ e lo si scriva esplicitamente. Si stabilisca, motivando la risposta, se tale sistema è compatibile. In caso affermativo, si precisi se è determinato o indeterminato e se ne calcolino le soluzioni.

ESERCIZIO 9. È dato un sistema lineare di 5 equazioni in 4 incognite in forma matriciale $A\vec{x} = \vec{b}$. Sapendo che $\det(A, \vec{b}) \neq 0$, possiamo concludere che

A) Il sistema è determinato,
B) Il sistema è incompatibile,
C) Il sistema non è omogeneo,
D) Mal posto: il determinante di $(A, \vec{b})$ non è definito,
E) Il sistema è indeterminato

(più di una risposta potrebbe essere corretta).

ESERCIZIO 10. È dato un sistema lineare di 4 equazioni in 5 incognite in forma matriciale $A\vec{x} = \vec{b}$. Sapendo che $\operatorname{rank}(A) = 4$, possiamo concludere che

A) Il sistema è determinato,
B) Il sistema è incompatibile,
C) Il sistema è omogeneo,
D) Il sistema è compatibile solo se è omogeneo,
E) il sistema è sempre compatibile,
F) il sistema è compatibile se $\det(A, \vec{b}) \neq 0$
G) Il sistema è indeterminato

(più di una risposta potrebbe essere corretta).

ESERCIZIO 11. Stabilire, motivando la risposta, per quali valori del parametro reale k la matrice

$$A(k) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & k-1 & k \\ 1 & -1 & 3-k & 0 \end{pmatrix}$$

è invertibile. Dire poi se ci sono valori di k per cui la matrice $A(k)$ ha rango 2.

ESERCIZIO 12. Calcolare il rango di

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ a & a & a \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

al variare di a e b. Trovare poi le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y/2 = 0 \\ x + y + z = 1 \\ y/2 + z = 1 \end{cases}$$