ESERCITAZIONE 4: matrici e sistemi - prima parte

ESERCIZIO 1. Data matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 1/2 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & \sqrt{2} & 7 \end{pmatrix}$, indicare

- a quale spazio matriciale appartiene ,
- qual è il coefficiente di posto $(2, 3)$ e quale quello di posto $(3, 1)$,
- quale vettore costituisce la terza colonna e quale la prima riga (indicando gli spazi vettoriali di appartenenza).

ESERCIZIO 2. Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $3A + 4B - 2C$ e $A^t - B^t + 3C^t$.

ESERCIZIO 3. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Calcolare, se possibile, AC, $(BC)A$, $B + (CA)$, BA, BA^t, AD, D^tC, $3A^t + BC$.

ESERCIZIO 4. Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 5 & 1 \\ \frac{4}{3} & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 6 \\ -2 & \sqrt{7} & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 57 & 10 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -100 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & -21 & 72 & -3 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -14 & -6 \\ 1 & 37 & -43 & 103 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & \frac{15}{4} & 73 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 5. Stabilire quali delle seguenti matrici è invertibile e scrivere, quando esiste, la matrice inversa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 6. Per quali valori del parametro k la matrice
$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \\ 2 & k & 1 \end{pmatrix}$$
è invertibile? Calcolare, quando esiste, la matrice inversa $(A_k)^{-1}$.

ESERCIZIO 7. Scrivere in forma matriciale i seguenti sistemi e, se possibile, risolverli con il metodo di Cramer.

7.a) $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ y - 2x = 0 \\ z + 2y + 1 = 0 \end{cases}$

7.b) $\begin{cases} 3x + 2z - 1 = 0 \\ 2y + z = 2 \\ -4y + 3x = 0 \end{cases}$

7.c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_4 + 1 = 0 \end{cases}$

7.d) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + 2y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

ESERCIZIO 8. Scrivere in forma estesa i seguenti sistemi e, se possibile, risolverli con il metodo di Cramer.

7.e) $A\vec{x} = \vec{b}$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$,

7.f) $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$ dove $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alla luce del risultato ottenuto, dire se i vettori $\vec{u}, \vec{u}$ e $\vec{w}$

- sono linearmente dipendenti ☐ sì ☐ no
- formano una base di V^3 ☐ sì ☐ no

ESERCIZIO 9. Stabilire se le seguenti famiglie di vettori formano una base degli spazi vettoriali a cui appartengono.

- $(1, 2, -5)$, $(2, 3, 0)$, $(1, 1, 5)$,
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
- $(1, 2, 0, 0)$, $(1, 2, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(2, 0, 0, 3)$,
- $(1, 2, 0, 0)$, $(1, 2, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(2, 0, 0, 3)$, $(0, 0, 0, 1)$.

Stabilire poi, motivando la risposta, per quali valori del parametro k i seguenti vettori formano una base di V^4
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ k-2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ 11 \\ -3 \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 10. Date le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

calcolare la matrice $C = A\,B$. Applicare poi il teorema di Cramer al sistema lineare

$$C\vec{x} = (-1, 3, 0)^t$$

e rispondere alle seguenti domande

2.a) Il teorema di Cramer assicura che questo sistema è determinato ☐ vero ☐ falso
2.b) Il teorema di Cramer assicura che questo sistema è incompatibile ☐ vero ☐ falso
2.c) È possibile che questo sistema sia incompatibile ☐ vero ☐ falso

esercizio 11. Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare la matrice prodotto $C = A\,B$ e verificare la formula di Binet.
b) Stabilire, motivando la risposta, se il sistema omogeneo $A\,\vec{x} = \vec{0}$ è compatibile/incompatibile, determinato/indeterminato.

esercizio 12.

12.a) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Detto poi $\vec{b}$ il vettore $\vec{b} = (-3, 3, 6)^t$, stabilire motivando la risposta se il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ è determinato/indeterminato, compatibile/incompatibile. Quando possibile, calcolare le soluzioni.

12.b) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Sia poi $\vec{b}$ il vettore $\vec{b} = (5, -3, 8)^t$. Alla luce del risultato precedente, stabilire motivando la risposta se il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ è determinato/indeterminato, compatibile/incompatibile. Quando possibile, calcolare le soluzioni.

12.c) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Detto poi $\vec{b}$ il vettore $\vec{b} = (3, 2, 3)^t$, stabilire motivando la risposta se il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ è determinato/indeterminato, compatibile/incompatibile. Quando possibile, calcolare le soluzioni.