

## ESERCITAZIONE 3: vettori e geometria (rette e piani)

ESERCIZIO 1. Dopo aver rappresentato graficamente i vettori del piano  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , calcolare graficamente e per componenti i vettori  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{w} - \vec{v}$ ,  $3\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{w}$ ,  $\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ .

ESERCIZIO 2. Sono assegnati i vettori del piano  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .  
Calcolare  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v} + \vec{w}\|$ ,  $\vec{u} + \|\vec{v}\| \vec{w}$ ,  $\vec{v} \cdot (3\vec{w})$ ,  $(2\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u}$ .

ESERCIZIO 3. Sono assegnati i vettori dello spazio  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .  
Calcolare  $\|\vec{w}\|$ ,  $2\vec{v} - \vec{u}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{w}$ ,  $\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$ ,  $\vec{v} \wedge \vec{w}$ .

ESERCIZIO 4. Determinare un vettore parallelo a  $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$  di norma 2 e un vettore ortogonale a  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  di norma 3. Stabilire se l'angolo fra i vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è acuto o ottuso.

ESERCIZIO 5. Stabilire se i vettori  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  e  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  sono ortogonali.

Tra i seguenti vettori individuare eventuali coppie di vettori paralleli o perpendicolari:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 6. Scrivere l'equazione parametrica e l'equazione cartesiana delle seguenti rette, rappresentarle nel piano cartesiano e stabilire se il punto di coordinate  $(0, 1)$  appartiene o meno a ciascuna delle rette.

6.a) La retta per l'origine parallela al vettore  $(-1, 5/2)^T$ ,

6.b) La retta per il punto  $(3, \sqrt{5})$  parallela al vettore  $(1, 0)^T$ ,

6.c) La retta per il punto  $(3, -2)$  perpendicolare al vettore  $(1, 0)^T$ ,

6.d) La retta per il punto  $(-1, 2)$  parallela alla retta di equazione parametrica  $\begin{cases} x = 5 - 6t \\ y = 2 + t, \end{cases}$

6.e) La retta per il punto  $(-1, 2)$  ortogonale al vettore  $(3, 1)^T$ ,

6.f) La retta per il punto  $(-1, 2)$  ortogonale alla retta di equazione parametrica  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 + t, \end{cases}$

6.g) La retta per il punto  $(3, \sqrt{5})$  ortogonale alla retta di equazione cartesiana  $3x - y = 0$ ,

6.h) La retta per il punto  $(3, \sqrt{5})$  parallela alla retta di equazione cartesiana  $x + 2y - 1 = 0$ ,

6.i) La retta per i punti  $(1/4, 5)$  e  $(0, -1)$ ,

6.j) La retta per i punti  $(\sqrt{5}, -3/2)$  e  $(-5, 3)$ .

ESERCIZIO 7.

7.a) Sono assegnate le seguenti rette nel piano mediante equazione parametrica:

$$\rho : \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = \sqrt{2} + t \end{cases}, \quad \rho' : \begin{cases} x = \sqrt{3} - 2t \\ y = \frac{2}{5}t \end{cases}, \quad \rho'' : \begin{cases} x = e + \frac{t}{5} \\ y = 4 + t \end{cases}, \quad \rho''' : \begin{cases} x = 9 + 7t \\ y = 4 \end{cases}.$$

Stabilire se ognuna delle rette  $\rho'$ ,  $\rho''$  e  $\rho'''$  è parallela o ortogonale a  $\rho$ .

7.b) Sono assegnate le seguenti rette nel piano mediante equazione cartesiana:

$$\rho : 9x - 3y + 2 = 0, \\ \rho' : -3x + y - \frac{2}{5} = 0, \quad \rho'' : 6x + 18y = \sqrt{5} = 0, \quad \rho''' : 7x - 2 = 0.$$

Stabilire se ognuna delle rette  $\rho'$ ,  $\rho''$  e  $\rho'''$  è parallela o ortogonale a  $\rho$ .

7.c) Stabilire quali fra le seguenti rette sono ortogonali o parallele. In caso di parallelismo, precisare se si tratta di rette parallele coincidenti o no.

$$r_1 : 3x - 2y = 0, \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2t \end{cases}, \quad r_3 : 2x - 3y + 7 = 0, \\ r_4 : \begin{cases} x = -2 - 6t \\ y = 2 + 4t \end{cases}, \quad r_5 : -x + \frac{2}{3}y - 5 = 0, \quad r_6 : 2x + 3y = 0.$$

ESERCIZIO 8.

8.a) Determinare l'equazione parametrica della retta per  $(1, -1)$  perpendicolare alla retta  $y = 3x$ .

8.b) Determinare l'equazione parametrica della retta per  $(2, 0)$  parallela alla retta  $3x - y + 7 = 0$ .

8.c) Determinare l'equazione cartesiana della retta per l'origine ortogonale alla retta  $\begin{cases} x = 3t \\ y = 5 - t/2 \end{cases}$ ,

8.d) Determinare l'equazione cartesiana della retta per  $(-3, 1)$  parallela a  $x = 8$ .

8.e) Scrivere le equazione parametrica e cartesiana della retta per  $(3, -1)$  perpendicolare alla retta  $2x + 3y - 5 = 0$ .

ESERCIZIO 9. Determinare l'equazione parametrica delle seguenti rette nello spazio:

9.a) la retta per l'origine  $O = (0, 0, 0)$  parallela al vettore  $(-1, 5/2, -3)^T$ ,

9.b) la retta per i punti  $P_1 = (3, -1, 2)$  e  $P_2 = (0, 1, 1)$ ,

9.c) la retta per il punto  $P = (-1, 1, 2)$  ortogonale al piano di equazione cartesiana  $x + y - z + 5 = 0$ ,

9.d) la retta per il punto  $P = (-1, 1, 2)$  ortogonale al piano di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t - s \\ y = 1 + 2t \\ z = 5t + 3s, \end{cases}$$

9.e) la retta di equazioni cartesiane  $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + y - 1 = 0. \end{cases}$

9.f) Stabilire infine se il punto  $P = (0, 1, 0)$  appartiene alla retta per  $P_1 = (2, 1/2, -1)$  e  $P_2 = (5, -1/2, 1)$ .

ESERCIZIO 10. Determinare le equazioni cartesiane dei seguenti piani:

10.a) il piano per l'origine  $O = (0, 0, 0)$  ortogonale al vettore  $(-1, 2, -3)$ ,

10.b) il piano per il punto  $P = (-1, 1, 2)$  ortogonale alla retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 5t, \end{cases}$$

10.c) il piano per il punto  $P = (0, 1, 1)$  parallelo al piano di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t - s \\ y = 1 + 2t \\ z = 5t + 3s, \end{cases}$$

10.d) il piano di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - t - 2s \\ y = -1 + 3s \\ z = 5 - t + s, \end{cases}$$

10.e) il piano per i punti  $P_1 = (3, -1, -2)$ ,  $P_2 = (-1, 1, -1)$  e  $P_3 = (1, 0, 3)$ .

ESERCIZIO 11. Determinare le equazioni parametriche dei seguenti piani:

11.a) il piano per l'origine  $O = (0, 0, 0)$  parallelo ai vettori  $\vec{u} = (-1, 2, -3)^T$  e  $\vec{v} = (1, 0, 2)^T$ ,

11.b) il piano per i punti  $P_1 = (0, 3, 1)$ ,  $P_2 = (1, -1, -1)$  e  $P_3 = (-1, 0, 2)$ .