Prerequisiti di Matematica

Geometria Analitica del piano

Annalisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli “Parthenope”

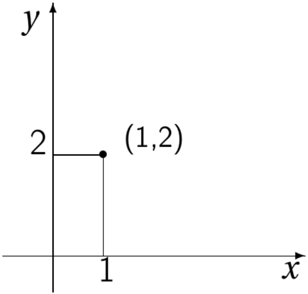
Introduzione

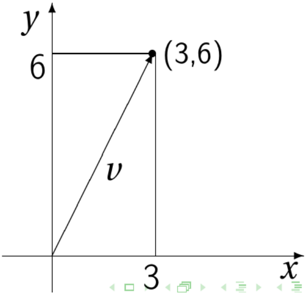
- L'idea fondante della geometria analitica è quella di poter associare a oggetti geometrici espressioni algebriche, che quindi si possano più facilmente manipolare.
- Il primo passo per questa associazione è associare ai punti del piano coppie di numeri reali che ne individuino la posizione.
- Introduciamo un sistema di assi cartesiani (da Descartes (1556-1650)) ortogonali,
- Ogni punto P_0 del piano viene individuato dalle sue coordinate (x_0, y_0) date dai numeri reali ottenuti dalle proiezioni ortogonali sugli assi del punto.

Lo Spazio Vettoriale $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Un elemento $P = (x, y)$ di $\mathbb{R}^2$ sono è un punto P del piano di coordinate x e y. Inoltre, $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale e i suoi punti (x, y) sono identificati con i vettori $v = (x, y)$ che partono dall'origine degli assi e terminano in (x, y).





Distanza in $\mathbb{R}^2$

Dati $P = (x_p, y_p)$, $Q = (x_q, y_q)$ punti di $\mathbb{R}^2$ definiamo la distanza tra P e Q il numero reale positivo

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2},$$

Proprietà :

1. $d(P, Q) \geq 0$, $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$;
2. $d(P, Q) = d(Q, P)$;
3. $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(Q, R)$, $R = (x_r, y_r)$ in $\mathbb{R}^2$.

Esempio: Dati $P = (-3, 4)$, $Q = (2, -1)$, la distanza è data da

$$d(P, Q) = \sqrt{(-3-2)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Distanza e Modulo

- La distanza di un punto $P = (x_p, y_p)$ dall'origine

$$d(P,0) = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$$

  corrisponde al **modulo del vettore** associato a P;
- Quindi la nozione di distanza concorda con quella che conosciamo in $\mathbb{R}$, dove la distanza da un punto dall'origine è esattamente il suo modulo.
- Il modulo di un vettore corrisponde alla sua **lunghezza** ed è anche detto anche **norma del vettore**.

Luoghi Geometrici

- Un **luogo geometrico** è l'insieme dei punti che verificano una certa proprietà;
- l'esempio più semplice di luogo geometrico sono le rette.
- Sono luoghi geometrici: l'ellissi, le circonferenze, i piani, i coni...

Rette: Equazioni Parametriche

Definizione

Dato un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e una direzione $v = (p, q) \neq (0, 0)$, la retta passante per P_0 e con vettore direzione v è il luogo dei punti $P = (x, y)$ tali per cui il vettore PP_0 sia parallelo a v,

Cioè

$$r = \{P \in \mathbb{R}^2 : PP_0 = tv,\ t \in \mathbb{R}\}$$

Poiché il vettore PP_0 ha componenti $(x - x_0, y - y_0)$, otteniamo

$$\begin{cases} x - x_0 = tp \\ y - y_0 = tq \end{cases}$$

queste sono le **equazioni parametriche** della retta passante per P_0 e con direzione v. **t è il parametro.**

Rette: Equazioni Parametriche

Abbiamo ottenuto le equazioni parametriche di r

$$\begin{cases} x - x_0 = tp \\ y - y_0 = tq \end{cases} \quad \text{o anche} \quad (x(t), y(t)) = (x_0 + tp, y_0 + tq)$$

- Ricordate che $P_0 = (x_0, y_0)$ e $v = (p, q)$ sono dati e al variare di $t \in \mathbb{R}$ troviamo tutti i punti della retta.

Esempio

Dato $P_0 = (2, 1)$ e $v = (-1, 3)$, otteniamo la retta r di equazioni parametriche $(x(t), y(t)) = (2 - t, 1 + 3t)$. Il punto $P = (0, 0)$ non appartiene alla retta perché non esiste $t \in \mathbb{R}$ per cui $2 - t = 0$ e $1 + 3t = 0$. Mentre $Q = (0, 7) \in r$.

Equazioni Parametriche degli Assi

- Le equazioni parametriche dell'asse delle ascisse sono quelle della retta passante per $P_0 = (0,0)$ e con direzione $v = (1,0)$

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 0. \end{cases}$$

- Le equazioni parametriche dell'asse delle ordinate sono quelle della retta passante per $P_0 = (0,0)$ e con direzione $v = (0,1)$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t. \end{cases}$$

Verso l'equazione cartesiana

Visto che $(p,q) \neq (0,0)$ possiamo supporre che sia ad esempio $p \neq 0$ e troviamo

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{p} \\ y = y_0 + \dfrac{x - x_0}{p} q \end{cases}$$

la seconda equazione si può anche scrivere

$$ax + by + c = 0$$

con $a = q$, $b = -p$ e $c = y_0 p - x_0 q$. Questa è detta **equazione cartesiana implicita** della retta.

Osservazioni ed Esempi

- Diremo che un punto P di coordinate (x, y) appartiene alla retta r se le sue coordinate soddisfano l'equazione, ad esempio data la retta r di equazione $2x - 3y + 6 = 0$ il punto $P = (0, 2)$ appartiene alla retta, poiché $2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 6 = 0$, mentre il punto $Q = (1, 2)$ non vi appartiene in quanto $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 6 = 2 \neq 0$!
- L'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate hanno equazioni rispettivamente

$$y = 0, \qquad x = 0.$$

Equazione Esplicita

Prendiamo l'equazione cartesiana implicita

$$ax + by + c = 0$$

con $a = q$, $b = -p$ e $c = y_0 p - x_0 q$. se $b \neq 0$ possiamo dividere per b e ottenere

$$y = mx + \tilde{q}$$

con $m = -a/b = q/p$, $\quad \tilde{q} = -c/b = (py_0 - x_0 q)/p$,

- che si chiama **forma canonica** o **equazione esplicita** della retta.
- Il numero m si dice coefficiente angolare della retta e ci da informazioni sulla *pendenza* della retta;
- $\tilde{q}$ si dice termine noto.

Retta per due punti

- Dati $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, un generico punto $P = (x, y)$ apparterrà alla retta in cui si trovano P_0 e P_1 se il vettore PP_0 è parallelo al vettore P_0P_1
- Poiché $PP_0 = (x - x_0, y - y_0)$ e $P_0P_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, otteniamo le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x - x_0 = t(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = t(y_1 - y_0) \end{cases}$$

Retta per due punti: seguito

$$\begin{cases} x - x_0 = t(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = t(y_1 - y_0) \end{cases}$$

Se $y_1 - y_0 \neq 0$ (altrimenti deve essere diverso da zero $x_1 - x_0$ e si può ragionare in modo analogo) si ottiene

$$x - x_0 = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}(x_1 - x_0).$$

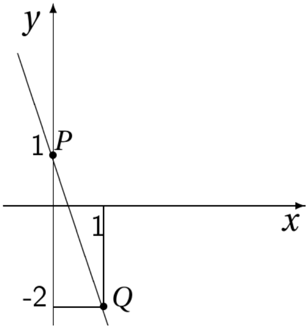
che porta alla nota formula

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Che da l'**equazione cartesiana della retta passante per due punti dati**.

Come si disegna una retta?

Per disegnare una retta basta trovare due punti P e Q che vi appartengono e tracciare la linea passante per essi.
Ad esempio per disegnare $y + 3x - 1 = 0$, poniamo $x = 0$ ottenendo $y = 1$, poi $x = 1$ ottenendo $y = -2$, quindi poniamo nel piano cartesiano $P = (0, 1)$, e $Q = (1, -2)$ e tracciamo la linea passante per P e Q.



Rette Parallele

Due rette r, r' di equazioni

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0$$

sono **parallele** se le rispettive direzioni sono proporzionali e poiché le direzioni sono date da $(-b, a)$ e $(-b', a')$, deve esistere un numero α tale che

$$-b = -\alpha b' \qquad \text{e} \qquad a = \alpha a'$$

poiché almeno uno tra b' e a' è diverso da zero possiamo scrivere ad esempio che

$$a = b/b'a' \;\; \text{cioè} \;\; ab' = a'b \;\; \text{ovvero} \;\; \frac{a}{b} = -\frac{b'}{a'}$$

Ricordando che $m = -a/b$ e $m' = -a'/b'$, otteniamo che **due rette parallele hanno stesso coefficiente**

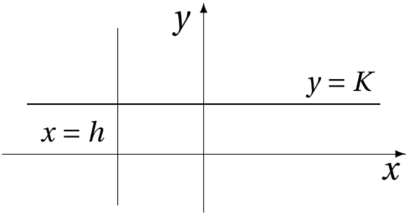
Rette parallele agli assi

- L'asse delle x ha equazione $y=0$ ed il coefficiente angolare è $m=0$. Quindi le rette parallele all'asse x hanno $m=0$ da cui l'equazione

$y=-\dfrac{c}{b}$ retta parallela all'asse x.

- L'asse y ha equazione $x=0$, quindi il suo vettore direzione è $v=(0,1)$. Se una retta è parallela all'asse y deve avere vettore direzione $v'=(-b',a')=(0,a)$ e dunque

$x=-\dfrac{c}{a}$ retta parallela all'asse y.



Rette Perpendicolari

- Due rette r, r' di equazioni

$$ax + by + c = 0,\; a'x + b'y + c' = 0$$

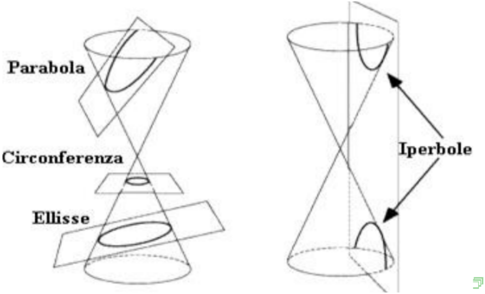
sono **perpendicolari** se sono perpendicolari i loro vettori direzione per cui deve essere

$$(-b, a) \cdot (-b', a') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = -\frac{b'}{a'}.$$

- Ricordando che $m = -a/b$ e $m' = -a'/b'$, otteniamo che **i coefficienti angolari di due rette perpendicolari soddisfano** $m = -1/m'$.

Coniche

Le **coniche** sono curve del piano ottenute intersecando un cono circolare con un piano. Un cono circolare si ottiene ruotando una retta attorno ad un'altra retta intersecante detta **asse di rotazione**. Le rette ottenute dalle successive posizioni della retta rotante si dicono **generatrici** e l'angolo α formato dalle generatrici e dall'asse di rotazione si dice **angolo di semiapertura**.



Coniche: Classificazione

A seconda di come è posizionato il piano rispetto all'asse di rotazione del cono otteniamo i seguenti luoghi geometrici diversi:

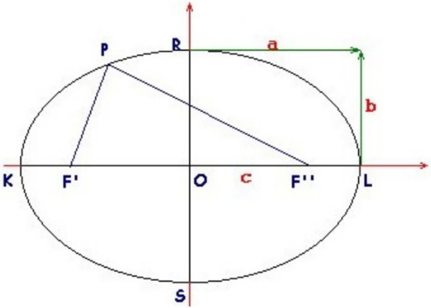
1. **Ellisse**. Questa conica si ottiene quando l'angolo tra l'asse di rotazione e il piano secante è maggiore dell'angolo di semiapertura. In particolare si ottiene una **circonferenza** se il piano è perpendicolare all'asse.
2. **Iperbole**. Questa conica si ottiene quando l'angolo tra l'asse di rotazione e il piano secante è uguale dell'angolo di semiapertura.
3. **Parabola**. Questa conica si ottiene quando l'angolo tra l'asse di rotazione e il piano secante è minore dell'angolo di semiapertura.

Ellisse: Definizione

L'ellisse è il luogo dei punti del piano per cui non cambia la somma delle distanze da due punti fissati detti **fuochi**.

A meno di traslazioni, possiamo assumere che i fuochi si trovino sull'asse x con coordinate $(-c,0)$, $(c,0)$, e preso $a \in \mathbb{R}^+$, $a > c$ i punti $P = (x,y)$ dell'ellisse soddisfano

$$\mathrm{dist}(P,F_1) + \mathrm{dist}(P,F_2) = 2a, \qquad F_1, F_2 \text{ sono i fuochi.}$$



Equazione Algebrica dell'ellisse

Dalla definizione di distanza

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

portiamo una delle due radici a secondo membro ed eleviamo al quadrato,

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-2a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ovvero

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ed elevando ancora al quadrato, otteniamo

$$a^4 - 2acx + c^2x^2 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$$

cioè

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

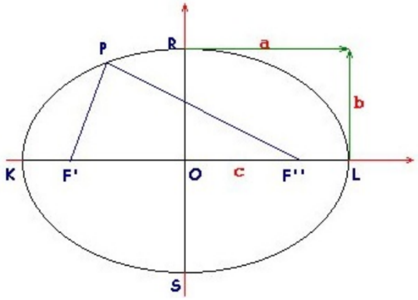
poiché deve essere $a^2 > c^2$, possiamo porre $b^2 = (a^2 - c^2)$ e dividiamo tutto per a^2b^2, ottenendo l'**equazione canonica dell'ellisse**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

dove ricordiamo $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. I numeri a e b si dicono **semiassi** dell'ellisse, gli assi di simmetria dell'ellisse sono gli assi cartesiani e il centro di simmetria è l'origine degli assi.

Riassumendo

- I punti dell'ellisse hanno la somma delle distanze di dai fuochi sempre uguale



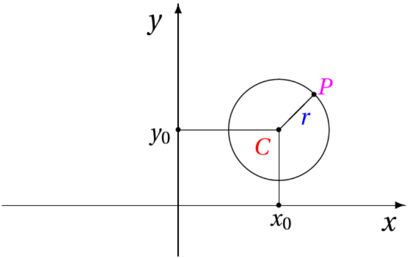
- Equazione canonica : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,
- dove $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ è il semiasse minore e a è il semiasse maggiore.

Circonferenza: Definizione

La circonferenza è l'insieme dei punti che hanno tutti stessa distanza da un punto fisso detto **centro**.

- Possiamo ottenere l'equazione canonica della circonferenza dalla sua definizione, imponendo cioè

$$\mathrm{dist}(P, C) = r \;\Rightarrow\; \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$



Circonferenza

- Equivalentemente, nell'equazione canonica dell'ellisse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
prendiamo $a = b$ (il che è equivalente a dire che $c = 0$) otteniamo l'equazione canonica della **circonferenza**
$$x^2 + y^2 = 1$$
che corrisponde ad una circonferenze centrata nell'origine $O = (0,0)$ e di raggio $r = 1$.
- va osservato che richiedere $c = 0$ nell'equazione dell'ellisse è come dire che i due fuochi coincidono e sono entrambi posti nell'origine, che quindi diventa il centro della circonferenza.

Equazione Generale di una Circoferenza

Come già detto, l'equazione cartesiana della circonferenza di centro $C = (x_0, y_0)$ e raggio r è data da

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

svolgendo i quadrati si ottiene

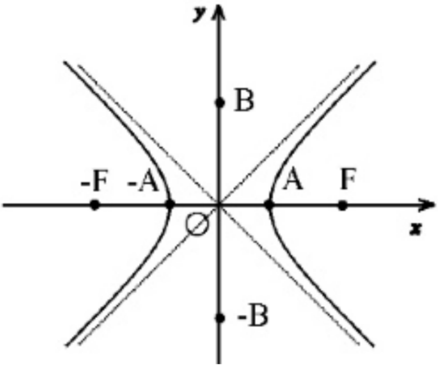
$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \qquad (1)$$

con $\alpha = -2x_0$, $\beta = -2y_0$, $\gamma = x_0^2 + y_0^2 - r^2$.
Quindi se abbiamo le coordinate del centro $C = (x_0, y_0)$ e il raggio r, calcoliamo α, β e γ e otteniamo l'equazione della circonferenza con il centro e il raggio dati.

Iperbole

Definizione

L'iperbole è il luogo dei punti per cui è costante il modulo della differenza delle distanze da due punti fissi detti **fuochi**.



Equazione Canonica

- $2a =$ il modulo della differenza delle distanze dai fuochi
- $(\pm c, 0) =$ coordinate dei fuochi.

Allora un punto $P = (x, y)$ appartiene all'iperbole se le sue coordinate soddisfano

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

Da cui

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Equazione Canonica

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Questa volta $c > a$, quindi possiamo porre $b^2 = c^2 - a^2$ e dividendo per a^2b^2 otteniamo l'**equazione canonica dell'iperbole**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

- i numeri a e b si dicono **semiassi dell'iperbole**,
- nel caso in cui $a = b$ l'iperbole si dice **equilatera**.

Parabola

Definizione

La parabola è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto F detto **fuoco** e da una retta detta **direttrice**.

- L'**asse** della parabola è la retta, ortogonale alla direttrice, in cui si trova il fuoco;
- A meno di traslazioni possiamo supporre che il fuoco abbia coordinate $F = (0, c/2)$
- e che la direttrice abbia equazione $y = -c/2$,
- cosicché l'origine appartiene alla parabola (visto che l'origine ha stessa distanza dal fuoco e dalla retta).

Equazione Canonica

- La distanza di un punto da una retta r di equazione $ax + by + c = 0$ è data da

$$\mathrm{dist}(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- Per cui i punti di una parabola devono soddisfare l'uguaglianza

$$\sqrt{x^2 + (y - c/2)^2} = y + c/2$$

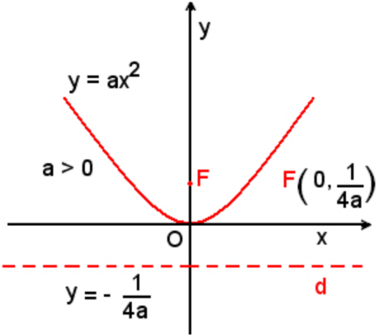
- dove a destra c'è la distanza del punto P dalla direttrice.

Equazione Canonica

Elevando al quadrato e semplificando otteniamo l'equazione canonica della parabola

$$y = ax^2$$

con $a = -c/2$. La parabola in forma canonica ha un unico asse di simmetria dato dall'asse delle ordinate.

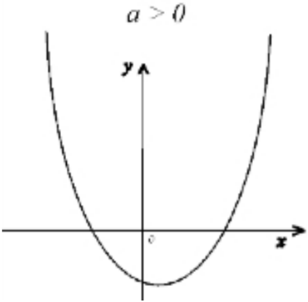


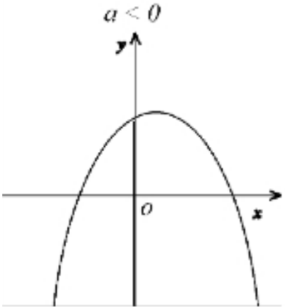
Equazione Generale

L'equazione di una generica **parabola** con asse parallelo all'asse y è data da

$$y = ax^2 + bx + c$$

Se $a > 0$ la concavità è rivolta verso l'alto.
Se $a < 0$ la concavità è rivolta verso il basso.





Vertice

$$y = ax^2 + bx + c$$

Il punto di intersezione della parabola con il suo asse si dice **vertice**. Le coordinate del vertice sono date da

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad y_v = -\frac{1}{4a}(b^2 - 4ac)$$

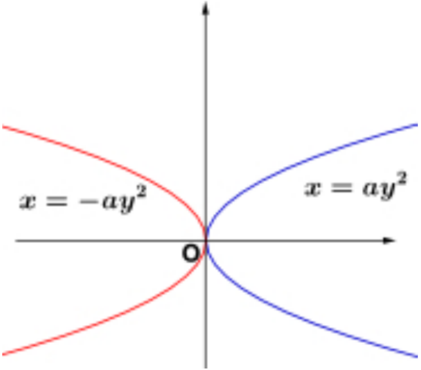
- Nel caso in cui l'asse di simmetria sia l'asse y, ricordando che il vertice è sull'asse di simmetria e che l'asse y ha equazione $x = 0$, otteniamo $x_v = 0$, quindi deve essere $b = 0$ e l'equazione è della forma

$$y = ax^2 + c$$

Asse di Simmetria Orizzontale

- Se l'asse di simmetria è parallelo all'asse x l'equazione è della forma

$$x = ay^2 + by + c.$$



Intersezioni tra coniche e rette

Una conica e una retta possono non avere punti di intersezione, averne uno o due, in quest'ultimo caso si dice che la retta è **secante** alla conica, se invece il punto di intersezione è unico la retta è **tangente**. Per trovare i punti in comune ad una generica retta di equazione $ax+by+c=0$ e ad una conica bisogna cercare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ \text{Equazione della conica} = 0 \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema si esplicita la x (o la y) nell'equazione della retta e si sostituisce nell'equazione della conica, ottenendo un'equazione di secondo grado in una variabile.

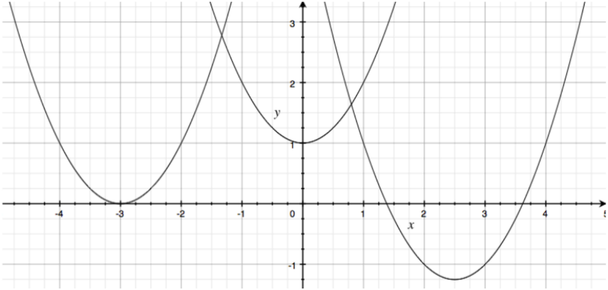
Intersezioni tra Coniche e Rette

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \text{Equazione della conica} = 0 \end{cases}$$

- Se il discriminante è positivo si avranno due soluzioni distinte corrispondenti a due punti di intersezione,
- se il discriminante è nullo si avrà un unico punto comune alla retta e alla conica che quindi saranno tangenti.
- Mentre se il discriminante è negativo la retta e la conica non hanno punti in comune.

Parabola ed Equazioni Algebriche

- Prendiamo una parabola con asse parallelo all'asse y e con la concavità rivolta verso l'alto $(a > 0)$, $y = ax^2 + bx + c$.
- Se l'ordinata del vertice è negativa, la parabola incontra l'asse x in due punti,
- se invece l'ordinata del vertice è positiva la parabola non incontra l'asse x.



Equazioni Algebriche di Secondo Grado

Le coordinate dei punti di intersezione della parabola con l'asse x sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y \\ y = 0 \end{cases}$$

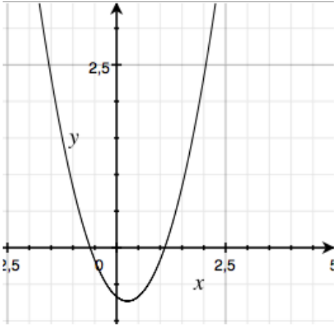
cioè le soluzioni dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Quindi il numero delle soluzioni dell'equazione algebrica $ax^2 + bx + c = 0$ dipende dal segno della coordinata y del vertice della parabola di equazione $ax^2 + bx + c = y$.

Due Soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$

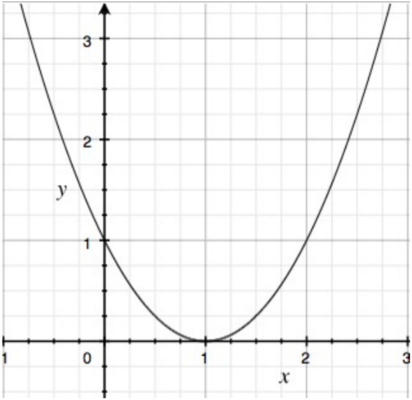
- Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ il vertice ha coordinata $y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$ negativa.
- La parabola è secante all'asse delle x per cui l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni distinte.



Troviamo una soluzione negativa e una positiva.

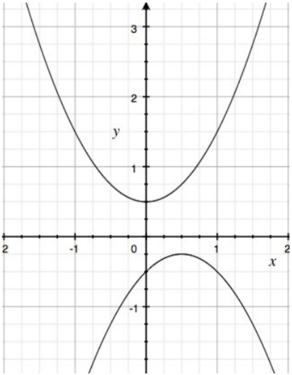
Una Soluzione

- $y_v = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$, se e solo se $b^2 = 4ac$ cioè $\Delta = 0$.
- In questo caso la parabola è tangente all'asse x per cui l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha una sola soluzione.



Nessuna Soluzione

- Se $\Delta < 0$ l'ordinata del vertice $y_v = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ è positiva.
- Quindi la parabola non incontra l'asse x e l'equazione non ha soluzioni.



Se $a > 0$ la parabola giace tutta nel semipiano delle ordinate positive.

Se $a < 0$ la parabola giace tutta nel semipiano delle ordinate negative