Prerequisiti di Matematica

Trigonometria

Annalisa Amadori e Benedetta Pellacci

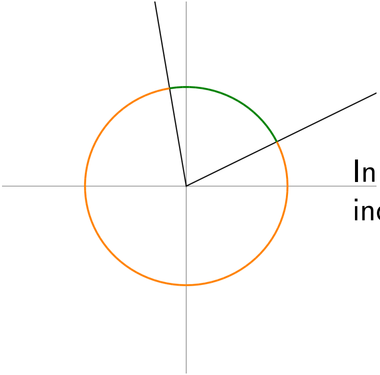
amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli “Parthenope”

Angolo

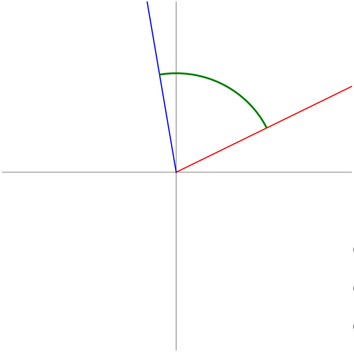
è una porzione di piano racchiusa fra due semirette con l'origine in comune (il vertice).



In effetti le due semirette individuano due angoli α e β.

Angolo

è una porzione di piano racchiusa fra due semirette con l'origine in comune (il vertice).

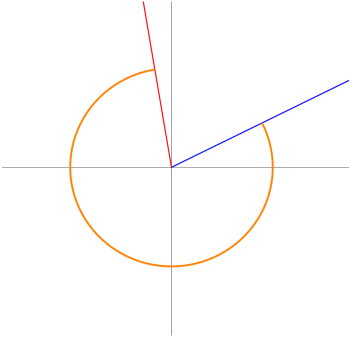


In effetti le due semirette individuano due angoli α e β.
Per precisare a quale angolo ci riferiamo, dobbiamo specificare qual è il primo lato e quale il secondo lato.

Intendiamo così l'angolo spazzato dal primo lato per sovrapporsi al secondo lato **ruotando in senso antiorario** (angolo positivamente orientato)

Angolo

è una porzione di piano racchiusa fra due semirette con l'origine in comune (il vertice).

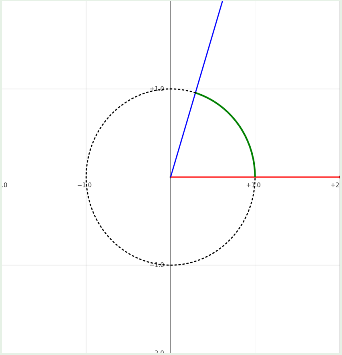


In effetti le due semirette individuano due angoli α e β.
Per precisare a quale angolo ci riferiamo, dobbiamo specificare qual è il primo lato e quale il secondo lato.

Intendiamo così l'angolo spazzato dal primo lato per sovrapporsi al secondo lato **ruotando in senso antiorario** (angolo positivamente orientato)

Misura dell'angolo in radianti

Fissiamo nel piano un riferimento cartesiano e tracciamo la **circonferenza unitaria**.



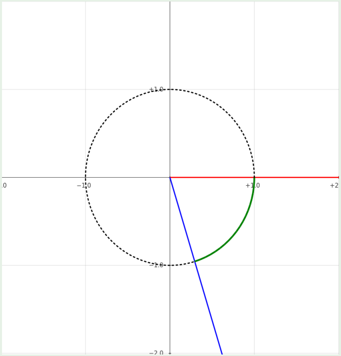
Riportiamo l'angolo in modo che il vertice coincida con l'origine ed il primo lato con la semiretta delle x positive.

La misura dell'angolo in radianti è la lunghezza dell'arco di circonferenza intercettato.

misura positiva $=$ angolo orientato in senso antiorario,
misura negativa $=$ angolo orientato in senso orario.

Misura dell'angolo in radianti

Fissiamo nel piano un riferimento cartesiano e tracciamo la **circonferenza unitaria**.



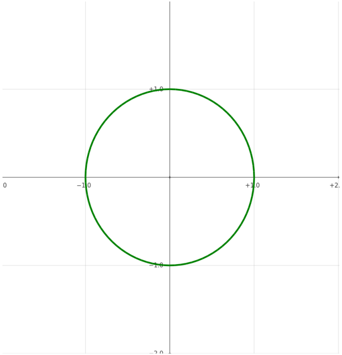
Riportiamo l'angolo in modo che il vertice coincida con l'origine ed il primo lato con la semiretta delle x positive.

La misura dell'angolo in radianti è la lunghezza dell'arco di circonferenza intercettato.

misura positiva = angolo orientato in senso antiorario,
misura negativa = angolo orientato in senso orario.

Angoli: radianti e gradi

La misura dell'angolo in radianti è la lunghezza dell'arco di circonferenza intercettatto.



In tal modo, l'**angolo giro** corrisponde alla lunghezza della circonferenza, cioè 2π.

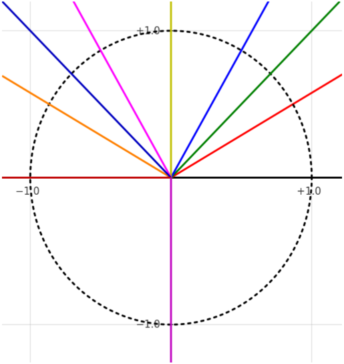
Poiché l'angolo giro misura 360^o, possiamo impostare il rapporto

$$\alpha_g : 360 = \alpha_r : 2\pi$$

da cui le equivalenze

$$\boxed{\alpha_r = \frac{\pi}{180}\alpha_g} \qquad \text{o} \qquad \boxed{\alpha_g = \frac{180}{\pi}\alpha_r}$$

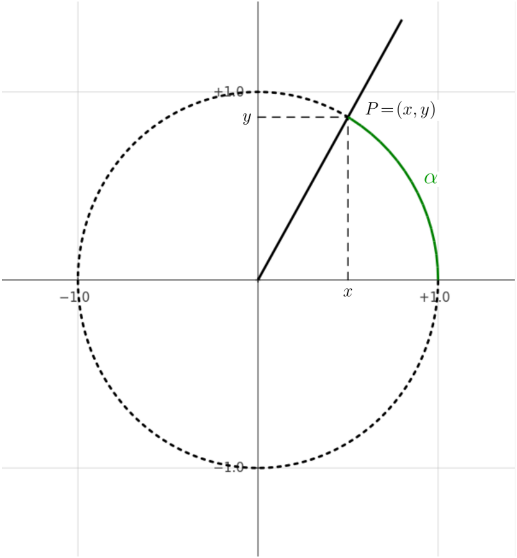
Riportiamo in un diagramma le misure degli angoli più usati:



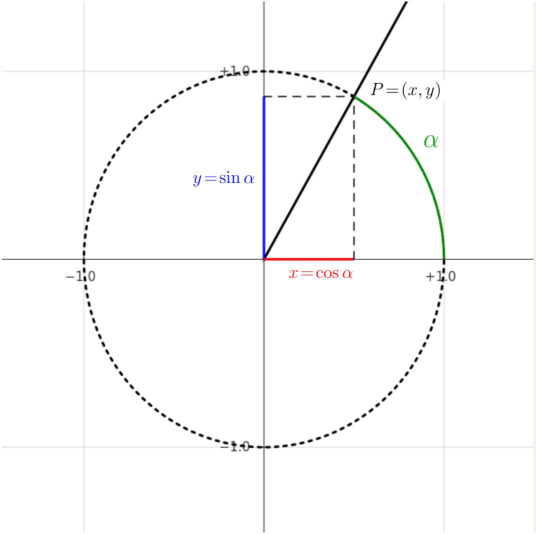
$0^\circ = 0$ $\quad 30^\circ = \pi/6$ $\quad 45^\circ = \pi/4$ $\quad 60^\circ = \pi/3$

$90^\circ = \pi/2$ $\quad 120^\circ = 2\pi/3$ $\quad 135^\circ = 3\pi/4$ $\quad 150^\circ = 5\pi/6$

$180^\circ = \pi$ $\quad 270^\circ = 3\pi/2$ $\quad 360^\circ = 2\pi$



Nel riferimento cartesiano si puó assegnare un **angolo** α indicando le **coordinate del punto** $P = (x, y)$ intercettato dal secondo lato sulla circonferenza unitaria.

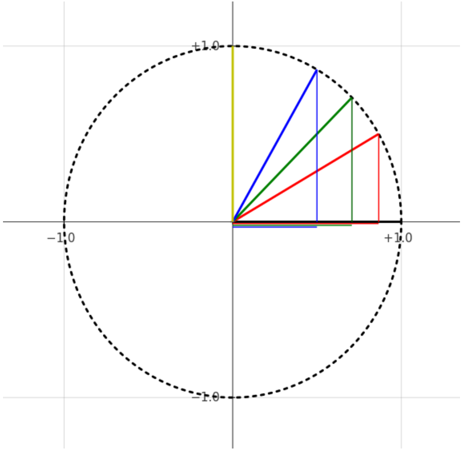


Definizione

Il coseno di un angolo α ($\cos\alpha$) è l'ascissa x di P.
Il seno di un angolo α ($\sin\alpha$) è l'ordinata y di P.

Seno e coseno

Valori di coseno e seno da ricordare:



$\cos 0 = 1 \qquad \sin 0 = 0$

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

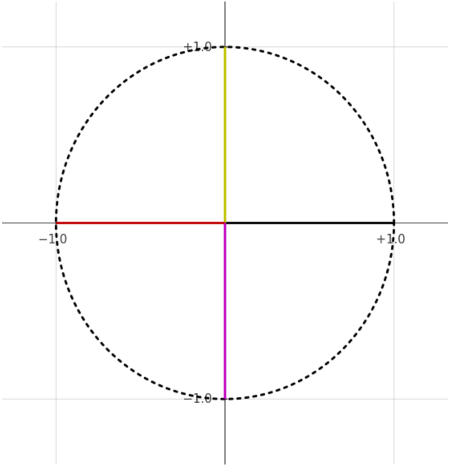
$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Seno e coseno

Per simmetria si ricava:



$\cos 0 = 1 \qquad \sin 0 = 0$

$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{\pi}{2} = 1$

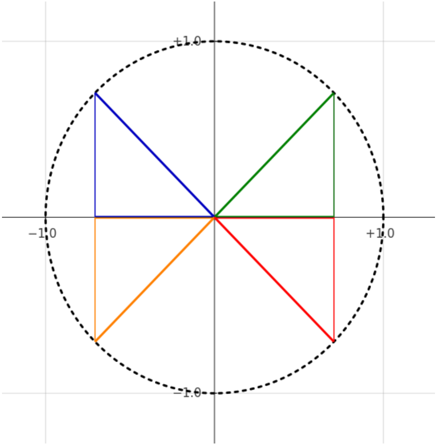
$\cos \pi = -1 \qquad \sin \pi = 0$

$\cos \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

$\cos 2\pi = 1 \qquad \sin 2\pi = 0$

Seno e coseno

Per simmetria si ricava:



$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

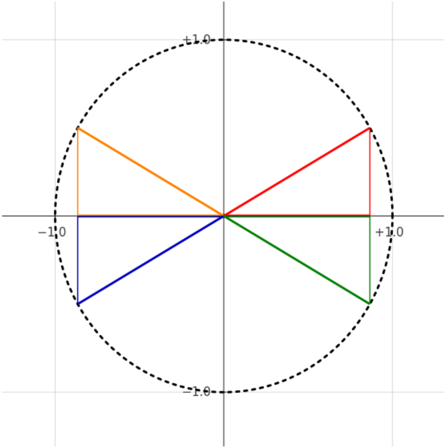
$$\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{7\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Seno e coseno

Per simmetria si ricava:



$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

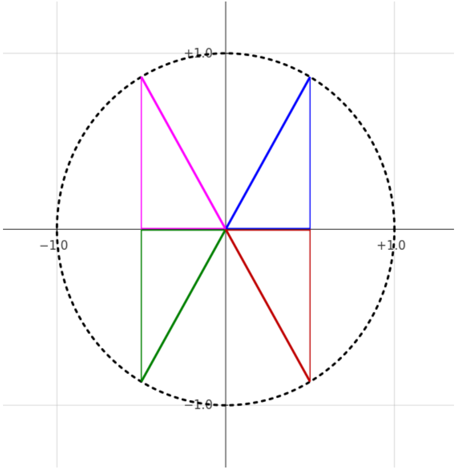
$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Seno e coseno

Per simmetria si ricava:

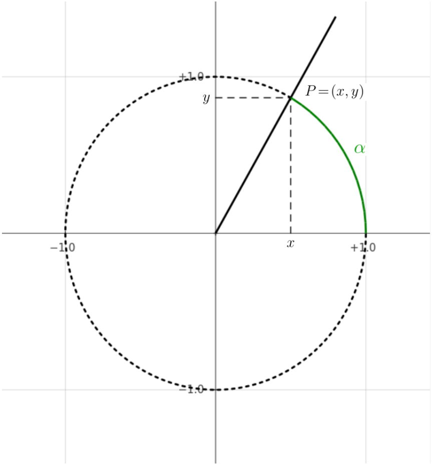


$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2} \qquad \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2} \qquad \sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2} \qquad \sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Percorrendo la circonferenza (in senso antiorario o orario), dopo un angolo 2π ci ritroviamo al punto iniziale.
Gli angoli α, $\alpha + 2\pi$, $\alpha - 2\pi$, $\ldots$ $\alpha + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ rappresentano lo stesso punto sulla circonferenza.

$$\boxed{\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$$

Diremo che seno e coseno hanno periodo 2π.

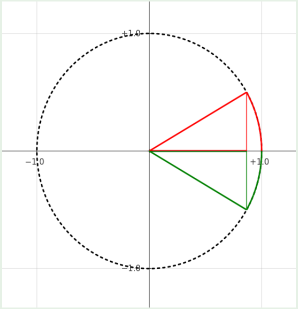
Proprietà di seno e coseno:

$$\boxed{-1 \leq \sin\alpha \leq 1}$$

$$\boxed{-1 \leq \cos\alpha \leq 1}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

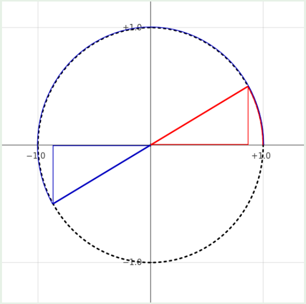
Simmetrie



$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}$$

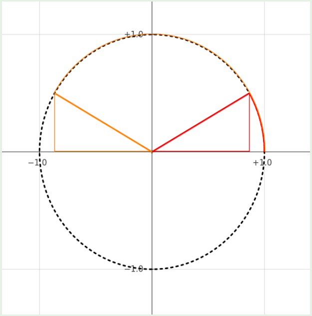
$$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$$

Simmetrie



$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

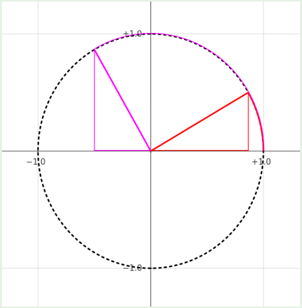
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$



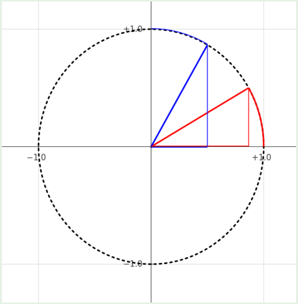
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

Simmetrie



$$\cos(\pi/2+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\sin(\pi/2+\alpha) = \cos\alpha$$

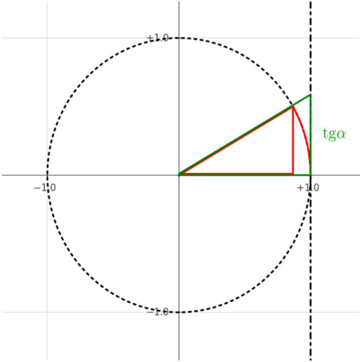


$$\cos(\pi/2-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha$$

Definizione

La tangente di α $(\mathrm{tg}\alpha)$ *è il rapporto fra seno e coseno*

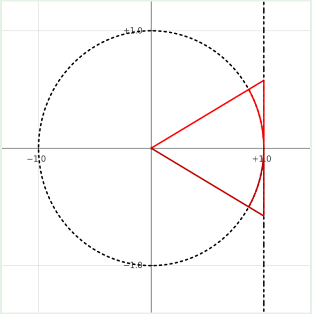
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



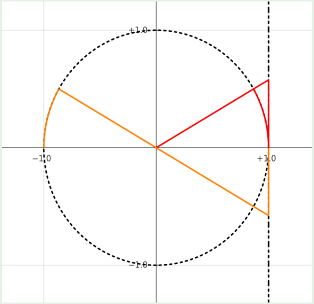
Geometricamente, la tangente rappresenta la lunghezza del segmento intercettato dall'angolo α sulla retta verticale $x = 1$.
È definita per $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ha periodo π: $\boxed{\mathrm{tg}(\alpha + k\pi) = \mathrm{tg}\alpha \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$

Simmetrie

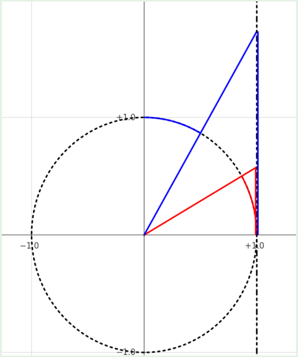


$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

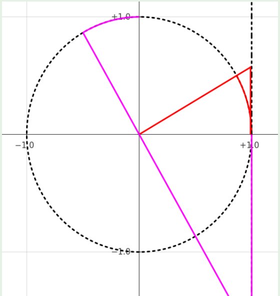


$$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

Simmetrie



$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$$



$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$$

Formule di addizione

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

Da queste si ricavano ($\beta = \alpha$):

Formule di duplicazione

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

Formule di addizione

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

Da queste si ricavano ($\beta \leftrightarrow -\beta$):

Formule di sottrazione

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

Esercizio (Calcolare)

$\sin 5\pi$	$\cos 7\pi/2$	$\sin 9\pi/2$
$\sin 15\pi/4$	$\cos 19\pi/6$	$\cos 22\pi/3$
$\operatorname{tg}(\pi/3)$	$\operatorname{tg}(-\pi/4)$	$\operatorname{tg}(5\pi/6)$

Esercizio (Determinare tutti i valori dell'angolo α per cui risulta)

$\sin\alpha = 0$	$\cos\alpha = 0$	$\sin\alpha = -1$
$\cos\alpha = 1/2$	$\sin\alpha = \sqrt{2}/2$	$\cos\alpha = -\sqrt{2}/2$
$\operatorname{tg}(\alpha) = 1$	$\operatorname{tg}(\alpha) = -\sqrt{3}$	$\operatorname{tg}(\alpha) = 1/\sqrt{3}$

Esercizio (Equazioni trigonometriche)

$$\sin^2 x = 1 \qquad \sin x + \cos x = 0$$

$$\sin^2 x - \sin x = 0 \qquad \sin^2 x = 2\cos x + 1$$

$$2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0 \qquad \mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg} x = 0$$

Esercizio (Disequazioni trigonometriche)

$$\sin x > \sqrt{2}/2 \qquad \cos x < 1/2 \qquad \cos x < 1/2$$

$$\sin \leq -1/2 \qquad \cos x \geq 1 \qquad \sin^2 x \leq \sin x$$

Esercizio (Disequazioni trigonometriche)

$\sin x < \cos x$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$

$3 - \mathrm{tg}^2 x \leq 0$ nell'intervallo $-\pi/2 < x < \pi/2$