Prerequisiti di Matematica

- Elementi di Logica, insiemi numerici e operazioni
- Monomi, Polinomi, Frazioni algebriche:
  - operazioni, fattorizzazione
  - eq. e diseq. di 1^o e 2^o grado, razionali
  - sistemi di eq. e diseq.
- Valore assoluto:
  - proprietà
  - eq. e diseq. con valore assoluto
- Potenze, esponenziali, logaritmi:
  - definizione e proprietà
  - eq. e diseq. irrazionali, logaritmiche, esponenziali
- Trigonometria (goniometria):
  - angoli, archi, funzioni trigonometriche e loro proprietà
  - eq. e diseq. trigonometriche
- Geometria analitica del piano: rette e coniche

Prerequisiti di Matematica

Richiami di Logica

Anna Lisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Un po' di vocabolario

- Un **predicato** o **proprietà** è una frase che contiene una o più variabili.
  La sua verità dipende dal valore assunto dalle variabili.
- Una **proposizione** è una frase che afferma una proprietà: essa contiene, oltre alle variabili, i cosiddetti **quantificatori**.
  Può essere vera o falsa.

Esempio 1. Il numero naturale n è dispari

è un predicato.
Possiamo dire se è vera o falsa? Dipende da quale valore attribuiamo a n.

Un po' di vocabolario

- Un **predicato** o **proprietà** è una frase che contiene una o più variabili.
  La sua verità dipende dal valore assunto dalle variabili.
- Una **proposizione** è una frase che afferma una proprietà: essa contiene, oltre alle variabili, i cosiddetti **quantificatori**.
  Può essere vera o falsa.

Esempio 2. Esiste un numero naturale dispari

è una proposizione.
È vera in quanto il numero naturale 3 è dispari.

Esempio 3. Ogni numero naturale è dispari

è una proposizione.
È falsa in quanto il numero naturale 2 non è dispari

Un po' di vocabolario

- Un **predicato** o **proprietà** è una frase che contiene una o più variabili.
  La sua verità dipende dal valore assunto dalle variabili.
- Una **proposizione** è una frase che afferma una proprietà: essa contiene, oltre alle variabili, i cosiddetti **quantificatori**.
  Può essere vera o falsa.

Esempio 1. **Il numero naturale n è dispari**
Esempio 2. **Esiste un numero naturale dispari**
Esempio 3. **Ogni numero naturale è dispari**

Quantificatori

Nelle proposizioni, a differenza dei predicati, sono presenti i quantificatori:
$\forall$ (**per ogni** o **qualunque**) quantificatore **universale**,
$\exists$ (**esiste**) quantificatore **esistenziale**.

- Quando si vuole provare che una certa proprietà vale per tutti i numeri reali ($\forall x \in \mathbb{R}$), bisognerà prendere in considerazione un **generico** numero x e vedere se tale proprietà è soddisfatta da x. Quando diciamo generico, intendiamo un numero **NON noto**. Per questo motivo lo chiamiamo x, perché potrebbe essere 3, $-\sqrt{2}$ o $\pi/2$ (o qualsiasi altro numero), NON lo sappiamo!

Esempio 4. Tutti i numeri positivi sono maggiori di -1

Quest'affermazione è vera poiché $\forall\ x > 0$ risulta $x > 0 > -1$.

Quantificatori

Nelle proposizioni, a differenza dei predicati, sono presenti i quantificatori:
$\forall$ **(per ogni** o **qualunque)** quantificatore **universale**,
$\exists$ **(esiste)** quantificatore **esistenziale**.

- Quando si vuole provare che una certa proprietà vale per tutti i numeri reali ($\forall x \in \mathbb{R}$), bisognerà prendere in considerazione un **generico** numero x e vedere se tale proprietà è soddisfatta da x.
- Se si vuol provare che una certa proprietà **NON** è soddisfatta da **tutti** i numeri reali basterà far vedere che **esiste** un numero che non la soddisfa, cioè basterà trovare un numero particolare (scelto da noi, quindi questa volta conosciuto!) che non ha la proprietà in questione.

Esempio 5. Tutti i numeri reali sono positivi

Quest'affermazione è falsa poiché $\exists\ x = -1$ che è negativo.

Congiunzioni e disgiunzioni

Nelle proposizioni troviamo congiunzioni o disgiunzioni.
La congiunzione più usata è **e**.
La disgiunzione più frequente è **o**.

- Una proposizione formata da due frasi legate da **e** è vera se e solo se sono vere **entrambe** le frasi.
- Una proposizione in cui sono presenti due frasi legate da un **o** è vera non appena è vera **almeno una** delle due frasi contenute.

Esempio 6.

$2+2=4$ e $3+3=6$ è vera $\quad$ $2+2=4$ o $3+3=6$ è vera
$2+2=4$ e $3+3=5$ è falsa $\quad$ $2+2=4$ o $3+3=5$ è vera

Congiunzioni e disgiunzioni

- Una proposizione formata da due frasi legate da **e** è vera se e solo se sono vere **entrambe** le frasi.
- Una proposizione in cui sono presenti due frasi legate da un **o** è vera non appena è vera **almeno una** delle due frasi contenute.

Esempio 7.

x è un naturale pari e maggiore di 10.
x è un naturale pari o maggiore di 10.

x pari: $x \in \{2, 4, 6, \dots\}$.
x maggiore di 10: $x \in \{11, 12, 13, \dots\}$.

x è un naturale pari e maggiore di 10:

$$x \in \{2, 4, 6, \dots\} \bigcap \{11, 12, 13, \dots\} = \{12, 14, 16, \dots\}.$$

x è un naturale pari o maggiore di 10:

$$x \in \{2, 4, 6, \dots\} \bigcup \{11, 12, 13, \dots\} = \{2, 4, \dots 10, 11, 12, 13, \dots\}.$$

Congiunzioni e disgiunzioni

- Una proposizione formata da due frasi legate da **e** è vera se e solo se sono vere **entrambe** le frasi.
- Una proposizione in cui sono presenti due frasi legate da un **o** è vera non appena è vera **almeno una** delle due frasi contenute.

- L'insieme delle x che verificano il predicato $\mathcal{P}(x)$ **e** il predicato $\mathcal{Q}(x)$ è l'**intersezione** fra le x che verificano $\mathcal{P}(x)$ e quelle che verificano $\mathcal{Q}(x)$.
- L'insieme delle x che verificano il predicato $\mathcal{P}(x)$ **o** il predicato $\mathcal{Q}(x)$ è l'**unione** delle x che verificano $\mathcal{P}(x)$ e di quelle che verificano $\mathcal{Q}(x)$.

Negazioni

La **negazione** di una proposizione A è la proposizione (**non** A o $\neg A$) che è vera quando A è falsa, e viceversa falsa quando A è vera.

$A : \forall x \, , \mathcal{P}(x)$ vero

"per ogni valore di x vale la proprietà $\mathcal{P}(x)$"

$\neg A : \exists x \, , \mathcal{P}(x)$ falso

"esiste un valore di x per cui non vale la proprietà $\mathcal{P}(x)$"

$B : \exists x \, , \mathcal{P}(x)$ vero

"esiste un valore di x per cui vale la proprietà $\mathcal{P}(x)$"

$\neg B : \forall x \, , \mathcal{P}(x)$ falso

"per ogni valore di x non vale la proprietà $\mathcal{P}(x)$"

Per negare il "per ogni" dobbiamo usare "esiste", mentre per negare "esiste" dobbiamo usare il "per ogni".

Negazioni

La **negazione** di una proposizione A è la proposizione (**non** A o $\neg A$) che è vera quando A è falsa, e viceversa falsa quando A è vera.

Allo stesso modo se in una proposizione è presente un "e" nella negazione otteniamo un "o" e viceversa.

A : "Tutti i sabato vado al cinema e in pizzeria"

$\neg A$: "Esiste un sabato in cui non vado al cinema o in pizzeria"

Esercizio

Indicare qual è la negazione dell'affermazione

"Umberto ha almeno un figlio biondo"

1. Tutti i figli di Umberto sono bruni
2. Almeno un figlio di Umberto non è biondo
3. Nessun figlio di Umberto è biondo
4. Non tutti i figli di Umberto sono biondi
5. Umberto non ha figli

Esercizio

Indicare qual è la negazione dell'affermazione

"Umberto ha almeno un figlio biondo"

1. Tutti i figli di Umberto sono bruni
2. Almeno un figlio di Umberto non è biondo
3. **Nessun figlio di Umberto è biondo**
4. Non tutti i figli di Umberto sono biondi
5. Umberto non ha figli

Esercizio

Indicare qual è la negazione dell'affermazione
"Tutti gli Italiani sono bassi e hanno gli occhi scuri"

1. Alcuni Italiani sono alti e biondi
2. Almeno un Italiano è alto e biondo
3. Tutti gli Italiani con gli occhi scuri sono alti
4. Alcuni Italiani bassi hanno gli occhi chiari
5. C'è almeno un Italiano che è alto, oppure ha gli occhi chiari

Esercizio

Indicare qual è la negazione dell'affermazione

"Tutti gli Italiani sono bassi e hanno gli occhi scuri"

1. Alcuni Italiani sono alti e biondi
2. Almeno un Italiano è alto e biondo
3. Tutti gli Italiani con gli occhi scuri sono alti
4. Alcuni Italiani bassi hanno gli occhi chiari
5. C'è almeno un Italiano che è alto, oppure ha gli occhi chiari

- Una **definizione** è una frase che spiega in modo **univoco** il significato di una parola o di un concetto.

Esempio 8.

Un numero razionale è un numero che si scrive come $x = p/q$ con p e q interi, $q \neq 0$.

- Un **Teorema** o **enunciato matematico** è formato da almeno due predicati e da una **implicazione logica**.
  Un predicato, detto **ipotesi**, svolge il ruolo di causa.
  L'altro predicato, detto **tesi**, ne è l'effetto.

Esempio 9.

Se due bimbi sono gemelli allora sono fratelli

ipotesi: "essere gemelli" **tesi:** "essere fratelli"
implicazione logica: "allora"

Poniamo, per brevità:

$$A: \text{“essere gemelli”}, \qquad B: \text{“essere fratelli”},$$

$\Longrightarrow$ l'implicazione logica: “allora” o “implica che”.

Esempio 9. $A \Longrightarrow B$

La proprietà di essere gemelli implica (causa, ha come conseguenza) essere fratelli,

se l'ipotesi di essere gemelli viene soddisfatta allora la tesi di essere fratelli sarà vera.

“essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli”

Che possiamo dire delle altre implicazioni?

implicazione diretta: $A \Longrightarrow B$

"essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli"

implicazione controniversa: **non**$B \Longrightarrow$ **non**A**?**

Se due bambini non sono fratelli allora non sono gemelli?

SÍ, se B è falsa, allora anche A è falsa

"essere fratelli è condizione necessaria per essere gemelli

Questo è sempre vero ed è noto come "legge della controinversa (o contronominale)".

implicazione diretta: $A \Longrightarrow B$

“essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli”

implicazione controniversa: **non**$B \Longrightarrow$ **non**A

“essere fratelli è condizione necessaria per essere gemelli

implicazione inversa: $B \Longrightarrow A$?

Se due bimbi sono fratelli allora sono gemelli?

NO, è possibile che A sia falsa anche se B è vera

“essere fratelli non è condizione sufficiente per essere gemelli”

implicazione diretta: $A \Longrightarrow B$

"essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli"

implicazione controniversa: **non**$B \Longrightarrow$ **non**A

"essere fratelli è condizione necessaria per essere gemelli

implicazione inversa: $B \Longrightarrow A$ **NO**

"essere fratelli non è condizione sufficiente per essere gemelli"

implicazione contraria: **non** $A \Longrightarrow$ **non** B**?**

Se due bambini non sono gemelli allora non sono fratelli?

NO, è possibile che B sia vera anche se A è falsa

"essere gemelli non è condizione necessaria per essere fratelli"

implicazione diretta: $A \Longrightarrow B$

"essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli"

implicazione controniversa: $\textbf{non}B \Longrightarrow \textbf{non}A$

"essere fratelli è condizione necessaria per essere gemelli

implicazione inversa: $B \Longrightarrow A$ <u>NO</u>

"essere fratelli non è condizione sufficiente per essere gemelli"

implicazione contraria: $\textbf{non}A \Longrightarrow \textbf{non}B$ <u>NO</u>

"essere gemelli non è condizione necessaria per essere fratelli"

Nell'esempio A è condizione necessaria ma non sufficiente per B

Quando tutte e quattro le implicazioni sono vere diciamo che

coimplicazione: $A \Longleftrightarrow B$

"A è condizione necessaria e sufficiente per B"
A è vera se e solo se B è vera, cioè A e B sono equivalenti

Esempio 10: condizione sufficiente

Se $x = 2$ allora $x^2 = 4$.

Nell'ipotesi vengono affermate le condizioni sufficienti a garantire che la tesi si avveri: è sufficiente che un numero x sia uguale a due affinché il suo quadrato sia uguale a quattro.

NON viene affermato che x^2 è uguale a quattro SOLTANTO se x è uguale a due (infatti $x^2 = 4$ anche quando $x = -2$)

Essere condizione sufficiente è DIVERSO dall'essere condizione necessaria.

Esempio 11: condizione sufficiente e necessaria

$|x| = 2$ se e solo se $x^2 = 4$.

In questo caso, avere valore assoluto due (cioè essere uguale a più o meno due) è una condizione sufficiente e necessaria per un numero x affinché il suo quadrato sia uguale a quattro.
Cioè

- $|x| = 2 \Longrightarrow x = \pm 2 \Longrightarrow x^2 = 4$

  E, VICEVERSA,
- $x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \Longrightarrow |x| = |\pm 2| = 2$

Per dimostrare che vale una condizione sufficiente e necessaria bisogna verificare sia l'implicazione diretta che l'implicazione inversa.

Tecniche di dimostrazione

dimostrazione diretta

Partendo dal fatto che l'ipotesi è vera e usando altri teoremi dimostrati in precedenza (proprietà note) si deduce logicamente che la tesi è anch'essa vera

Esempio 12.

Dimostriamo che "Tutti i numeri positivi sono maggiori di -1"
ipotesi: ??? $\quad \Longrightarrow \quad$ tesi: ???

Tecniche di dimostrazione

dimostrazione diretta

Partendo dal fatto che l'ipotesi è vera e usando altri teoremi dimostrati in precedenza (proprietà note) si deduce logicamente che la tesi è anch'essa vera

Esempio 12.

Dimostriamo che "Tutti i numeri positivi sono maggiori di -1"
ipotesi: $x \in \mathbb{R},\ x > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ tesi: $x > -1$

Tecniche di dimostrazione

dimostrazione diretta

Partendo dal fatto che l'ipotesi è vera e usando altri teoremi dimostrati in precedenza (proprietà note) si deduce logicamente che la tesi è anch'essa vera

Esempio 12.

Dimostriamo che "Tutti i numeri positivi sono maggiori di -1"
ipotesi: $x \in \mathbb{R},\ x > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ tesi: $x > -1$

Dimostrazione: So che $0 > -1$ (per definizione di "$>$", poiché $0 - (-1) = 1 > 0$), dunque

$$\underset{\text{ipotesi}}{x > 0} \quad e \quad \underset{\text{verificato}}{0 > 1} \quad \underset{\substack{\text{proprietà}\\ \text{transitiva}}}{\Longrightarrow} \quad \underset{\text{tesi}}{x > -1}$$

dimostrazione contronominale o controinversa

Si suppone che la tesi sia falsa, e si mostra attraverso passaggi logici che ANCHE l'ipotesi è falsa.

Per provare "$A \Longrightarrow B$", dimostriamo che "non $B \Longrightarrow$ non A"

Esempio 13.

Dimostriamo "I numeri dispari non sono divisibili per 4"
ipotesi: ??? $\quad \Longrightarrow$
tesi: ???

dimostrazione contronominale o controinversa

Si suppone che la tesi sia falsa, e si mostra attraverso passaggi logici che ANCHE l'ipotesi è falsa.

Per provare "$A \Longrightarrow B$", dimostriamo che "non $B \Longrightarrow$ non A"

Esempio 13.

Dimostriamo "I numeri dispari non sono divisibili per 4"
ipotesi: $n \in \mathbb{N}, \ \exists k \in \mathbb{N} \ : n = 2k + 1 \quad \Longrightarrow$
tesi: $\nexists h \in \mathbb{N} \ : n = 4h$
Noi però dimostriamo "I numeri divisibili per 4 sono pari"
ipotesi: $n \in \mathbb{N}, \ \exists h \in \mathbb{N} \ : n = 4h \quad \Longrightarrow$
tesi: $\exists k \in \mathbb{N} \ : n = 2k$

dimostrazione contronominale o controinversa

Si suppone che la tesi sia falsa, e si mostra attraverso passaggi logici che ANCHE l'ipotesi è falsa.

Per provare "$A \implies B$", dimostriamo che "non $B \implies$ non A"

Esempio 13.

Dimostriamo "I numeri dispari non sono divisibili per 4"
ipotesi: $n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N}\ : n = 2k+1 \quad \implies$
tesi: $\nexists h \in \mathbb{N}\ : n = 4h$
Noi però dimostriamo "I numeri divisibili per 4 sono pari"
ipotesi: $n \in \mathbb{N},\ \exists h \in \mathbb{N}\ : n = 4h \quad \implies$
tesi: $\exists k \in \mathbb{N}\ : n = 2k$

Dimostrazione: Sappiamo che $4 = 2 \cdot 2$, dunque

$$n \underset{\text{ipotesi}}{=} 4 \cdot h \underset{\text{verificato}}{=} 2 \cdot 2 \cdot h \underset{\substack{\text{proprietà} \\ \text{associativa}}}{=} 2 \cdot (2 \cdot h) \underset{\substack{2 \cdot h = k \\ \text{è intero}}}{=} \underset{\text{tesi}}{2 \cdot k}$$

dimostrazione per assurdo

Si suppone che l'ipotesi sia vera ma la tesi falsa, e si arriva ad una contraddizione (ad esempio che l'ipotesi è falsa)

Per provare "$A \implies B$", dimostriamo che "A e non $B \implies$ non A"

Esempio 13.

Dimostriamo "Non esiste un numero razionale il cui quadrato è 2"
ipotesi: ??? $\implies$ tesi: ???

dimostrazione per assurdo

Si suppone che l'ipotesi sia vera ma la tesi falsa, e si arriva ad una contraddizione (ad esempio che l'ipotesi è falsa)

Per provare "$A \Longrightarrow B$", dimostriamo che "A e non $B \Longrightarrow$ non A"

Esempio 13.

Dimostriamo "Non esiste un numero razionale il cui quadrato è 2"
ipotesi: $x \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad$ tesi: $x^2 \neq 2$
noi verifichiamo che
ipotesi (per ass.): $x \in \mathbb{Q}$ e $x^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad$ tesi: $x \notin \mathbb{Q}$

Esempio 13.

ipotesi (per ass.): $x \in \mathbb{Q}$ e $x^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad$ tesi: $x \notin \mathbb{Q}$

Dimostrazione: Per definizione ogni numero razionale si può scrivere come rapporto $x = \frac{p}{q}$ e, dopo aver semplificato, p e q sono primi fra loro. Dunque

$$2 = x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

e moltiplicando per q^2 il primo e l'ultimo membro si ha

$$2q^2 = p^2 \implies p \text{ è pari}$$

cioè $\exists k \in \mathbb{Z} \ : \ p = 2k$. Sostituiamo nell'uguaglianza precedente:

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

e dividendo per 2 il primo e l'ultimo membro si ha

$$q^2 = 2k^2 \implies \text{ è } q \text{ è pari}$$

Esempio 13.

ipotesi (per ass.): $x \in \mathbb{Q}$ e $x^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad$ tesi: $x \notin \mathbb{Q}$

Dimostrazione: Per definizione ogni numero razionale si può scrivere come rapporto $x = \frac{p}{q}$ e, dopo aver semplificato, **p e q sono primi fra loro**. Dunque

$$2 = x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

e moltiplicando per q^2 il primo e l'ultimo membro si ha

$$2q^2 = p^2 \implies p \text{ è pari}$$

cioè $\exists k \in \mathbb{Z} \,:\, p = 2k$. Sostituiamo nell'uguaglianza precedente:

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

e dividendo per 2 il primo e l'ultimo membro si ha

$$q^2 = 2k^2 \implies \text{è } q \text{ è pari}$$

Esercizio

Un accogliente cartello all'ingresso del ristorante L'Oca Giuliva recita:

Se si è in pochi, si mangia bene

Se si è in tanti, si spende poco

Il Signor Aquilotto, con la sua mente acuta, ne deduce logicamente che:

1. se si è pochi, si spende tanto
2. per mangiar bene è necessario andarci in pochi
3. se si mangia male non si è in pochi
4. per spendere poco bisogna essere in tanti
5. se si è in tanti, si mangia male.

Esercizio

Un accogliente cartello all'ingresso del ristorante L'Oca Giuliva recita:

Se si è in pochi, si mangia bene

Se si è in tanti, si spende poco

Il Signor Aquilotto, con la sua mente acuta, ne deduce logicamente che:

1. se si è pochi, si spende tanto
2. per mangiar bene è necessario andarci in pochi
3. **se si mangia male non si è in pochi**
4. per spendere poco bisogna essere in tanti
5. se si è in tanti, si mangia male.

Esercizio

Un chimico, studiando una soluzione che si era tinta di arancione, constatò che in essa era presente del sodio o del potassio (o entrambi); inoltre osservò che, se NON c'era sodio, c'era ferro, e che, se c'era potassio, c'era anche iodio. Quale di queste situazione si può verificare?

1. La soluzione contiene solo potassio e ferro
2. La soluzione contiene solo ferro e iodio
3. La soluzione contiene sodio e potassio, e non contiene iodio
4. La soluzione non contiene né sodio né iodio
5. La soluzione contiene solo sodio

Esercizio

Un chimico, studiando una soluzione che si era tinta di arancione, constatò che in essa era presente del sodio o del potassio (o entrambi); inoltre osservò che, se NON c'era sodio, c'era ferro, e che, se c'era potassio, c'era anche iodio. Quale di queste situazione si può verificare?

1. La soluzione contiene solo potassio e ferro
2. La soluzione contiene solo ferro e iodio
3. La soluzione contiene sodio e potassio, e non contiene iodio
4. La soluzione non contiene né sodio né iodio
5. **La soluzione contiene solo sodio**

Esercizio

Premesso che:

- chi ascolta musica rock o blues non è stonato
- Agenore non è stonato
- chi ascolta blues non vince al Lotto

quale tra le seguenti conclusioni NON si può trarre dalle precedenti premesse?

1. Uno stonato non ascolta rock
2. È possibile che Agenore non vinca al Lotto
3. Chi vince al Lotto non ascolta blues
4. Certamente Agenore ascolta blues o rock
5. Non è escluso che Agenore ascolti rock

Esercizio

Premesso che:

- chi ascolta musica rock o blues non è stonato
- Agenore non è stonato
- chi ascolta blues non vince al Lotto

quale tra le seguenti conclusioni NON si può trarre dalle precedenti premesse?

1. Uno stonato non ascolta rock
2. È possibile che Agenore non vinca al Lotto
3. Chi vince al Lotto non ascolta blues
4. **Certamente Agenore ascolta blues o rock**
5. Non è escluso che Agenore ascolti rock

Esercizio

Un Marziolano, osservando che:

- metà di tutti i Tondolini sono remissivi
- metà di tutti i Marziolani sono testardi
- metà di tutti i Marziolani sono remissivi

e tenendo presente che non si può essere insieme remissivi e testardi, deduce che una e una sola delle seguenti affermazioni NON può essere vera. Quale?

1. Metà di tutti i Tondolini sono testardi
2. Tutti i Tondolini sono Marziolani
3. Non esistono Tondolini che siano anche Marziolani
4. Tutti i Marziolani sono Tondolini e nessun Tondolino è testardo
5. Tondolini e Marziolani sono lo stesso insieme di persone

Esercizio

Nel corso delle indagini su un assassinio, sono stati appurato questi due fatti:

- se X ha sparato alla vittima, allora X è mancino;
- se Y ha sparato alla vittima, allora Y è l'assassino.

Quale di queste deduzioni è corretta?

1. L'assassino ha sparato alla vittima
2. Poiché il signor Bianchi non è mancino, è innocente
3. Poiché il signor Rossi è mancino, è l'assassino
4. Poiché il signor Rossi è mancino, ha sparato alla vittima
5. Poiché il signor Bianchi non è mancino, non ha sparato alla vittima

Esercizio

Nel corso delle indagini su un assassinio, sono stati appurato questi due fatti:

- se X ha sparato alla vittima, allora X è mancino;
- se Y ha sparato alla vittima, allora Y è l'assassino.

Quale di queste deduzioni è corretta?

1. L'assassino ha sparato alla vittima
2. Poiché il signor Bianchi non è mancino, è innocente
3. Poiché il signor Rossi è mancino, è l'assassino
4. Poiché il signor Rossi è mancino, ha sparato alla vittima
5. **Poiché il signor Bianchi non è mancino, non ha sparato alla vittima**

Esercizio

In occasione delle elezioni primarie per la scelta del candidato premier, ciascuno dei sette candidati è sicuro di riuscire a classificarsi fra i tre più votati. Negare questa frase vuol dire affermare che:

1. almeno un candidato teme di rientrare fra i tre meno votati
2. almeno un candidato non è sicuro di rientrare fra i primi tre più votati
3. alcuni candidati sono certi di classificarsi fra i tre più votati
4. ogni candidato è sicuro di non classificarsi fra i tre più votati
5. ciascuno dei candidati teme di rientrare fra i tre meno votati

Esercizio

In occasione delle elezioni primarie per la scelta del candidato premier, ciascuno dei sette candidati è sicuro di riuscire a classificarsi fra i tre più votati. Negare questa frase vuol dire affermare che:

1. almeno un candidato teme di rientrare fra i tre meno votati
2. **almeno un candidato non è sicuro di rientrare fra i primi tre più votati**
3. alcuni candidati sono certi di classificarsi fra i tre più votati
4. ogni candidato è sicuro di non classificarsi fra i tre più votati
5. ciascuno dei candidati teme di rientrare fra i tre meno votati

Esercizio

Il ministro dell'economia afferma: *Se il bilancio non sarà tagliato, allora i prezzi rimarranno stabili se e soltanto se aumenteremo tutte le tasse.* Sapendo che il bilancio non fu tagliato, che cosa può essere accaduto a Matlandia?

1. Tutte le tasse furono aumentate e i prezzi crebbero
2. Le tasse non furono aumentate e i prezzi rimasero stabili
3. Furono aumentate le tasse solo sugli stipendi degli impiegati dello Stato e i prezzi rimasero stabili
4. Tutte le tasse furono aumentate e i prezzi rimasero stabili
5. I prezzi crebbero comunque

Esercizio

Il ministro dell'economia afferma: *Se il bilancio non sarà tagliato, allora i prezzi rimarranno stabili se e soltanto se aumenteremo tutte le tasse.* Sapendo che il bilancio non fu tagliato, che cosa può essere accaduto a Matlandia?

1. Tutte le tasse furono aumentate e i prezzi crebbero
2. **Le tasse non furono aumentate e i prezzi rimasero stabili**
3. Furono aumentate le tasse solo sugli stipendi degli impiegati dello Stato e i prezzi rimasero stabili
4. Tutte le tasse furono aumentate e i prezzi rimasero stabili
5. I prezzi crebbero comunque

Prerequisiti di Matematica

Numeri e Algebra

Annalisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

I numeri che servono per contare sono i numeri naturali:

Definizione

L'insieme dei numeri naturali ($\mathbb{N}$) è definito mediante le proprietà

1. $0 \in \mathbb{N}$,
2. *se* $n \in \mathbb{N}$, *allora* $n+1 \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

I numeri interi servono per fare il bilancio:

Definizione

L'insieme dei numeri interi ($\mathbb{Z}$) è formato dai numeri naturali e dai loro opposti, cioè

$$k \in \mathbb{Z} \textit{ se, e solo se, } k \in \mathbb{N} \textit{ oppure } -k \in \mathbb{N}.$$

$$\mathbb{Z} = \{\cdots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Osservazione

Positivi *sono i numeri maggiori di zero, cioè* $\{1, 2, 3, \dots\}$,
Negativi *sono i numeri minori di zero, cioè* $\{-1, -2, -3, \dots\}$.
0 *non è né positivo né negativo!*

Chiamiamo interi nonnegativi $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Osservazione

Con i numeri interi possiamo fare ogni sorta di addizione e sottrazione, ad esempio:

$$4 + (-7) = 4 - 7 = -3 \qquad 4 - (-7) = 4 + 7 = 11$$

Con i numeri interi <u>non</u> possiamo fare ogni sorta di divisione, ad esempio:

$4 : 2 = 2$	*ok*
$5 : 2 = 2,5$	*<u>non</u> è un num. intero*
$10 : 3 = 3,33333333\cdots$	*<u>non</u> è un num. intero.*

Tutti i possibili risultati delle divisioni fra numeri interi, cioè le frazioni, formano l'insieme dei numeri razionali:

Definizione

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{a}{b} = a : b \quad : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0 \right\}$$

- *il numero a si dice numeratore*
- *b denominatore*

Osservazione

Ogni numero **intero** *è anche un numero* **razionale**, *il cui denominatore (sottinteso) è uguale a 1.*

Ad esempio $\quad -7 = \dfrac{-7}{1}$

Tutti i possibili risultati delle divisioni fra numeri interi, cioè le frazioni, formano l'insieme dei numeri razionali:

Definizione

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{a}{b} = a : b \quad : \; a, b \in \mathbb{Z}, \; b \neq 0 \right\}$$

- *il numero a si dice numeratore*
- *b denominatore*

C'è una certa libertà sulla scelta dei segni di numeratore e denominatore. Ad esempio

$$-\frac{7}{3} = \frac{-7}{3} = \frac{7}{-3} \qquad \text{e} \qquad \frac{7}{3} = \frac{-7}{-3}$$

Definizione

Un numero razionale è
positivo se num. e den. hanno lo stesso segno $(a \cdot b > 0)$
negativo se num. e den. hanno segno discorde $(a \cdot b < 0)$

Tutti i possibili risultati delle divisioni fra numeri interi, cioè le frazioni, formano l'insieme dei numeri razionali:

Definizione

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{a}{b} = a : b \quad : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0 \right\}$$

- *il numero a si dice numeratore*
- *b denominatore*

C'è libertà sulla scelta di numeratore e denominatore.

Ad esempio $\quad \dfrac{10}{5} = \dfrac{6}{3} = 2$

Definizione

Due numeri razionali $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si dicono equivalenti se

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Nell'esempio si ha $\frac{10}{5} = \frac{6}{3}$ poiché $10 \cdot 3 = 5 \cdot 6$

e anche $\frac{10}{5} = 2$ poiché $10 \cdot 1 = 2 \cdot 5$

e anche $\frac{6}{3} = 2$ poiché $6 \cdot 1 = 2 \cdot 3$

Possiamo scegliere una frazione fra tutte quelle equivalenti. Quale scegliamo?
La più semplice: quella il cui numeratore non ha fattori comuni con il denominatore.

Ricordatevi di semplificare!

Definizione (somma di numeri razionali)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Proprietà della somma

$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$ si ha

1. $\boxed{(x + y) + z = x + (y + z)}$ associativa
2. $\boxed{x + y = y + x}$ commutativa
3. $\boxed{x + 0 = x}$ 0 è l'elemento neutro
4. esiste l'inverso di x, cioè un numero $-x$ tale che: $\boxed{x + (-x) = 0}$

L'inverso rispetto alla somma (opposto) di x si indica con il simbolo $-x$.

Se $x = \frac{a}{b}$ si ha $\quad -x = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Definizione (prodotto di numeri razionali)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Proprietà del prodotto

$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$ si ha

1. $\boxed{(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)}$ associativa
2. $\boxed{x \cdot y = y \cdot x}$ commutativa
3. $\boxed{x \cdot 1 = x}$ 1 è elemento neutro
4. esiste l'inverso di x, cioè un numero x^{-1} tale che $\boxed{x \cdot x^{-1} = 1}$ se $x \neq 0$

Se $a \neq 0$, l'inverso (o reciproco) di $\frac{a}{b}$ esiste, si indica con il simbolo $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ e vale $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

Definizione (somma di numeri razionali)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Definizione (prodotto di numeri razionali)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Proprietà distibutiva del prodotto rispetto alla somma

$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$ si ha

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Legge di annullamento del prodotto

$\forall x, y \in \mathbb{Q}$ si ha

$$x \cdot y = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = 0 \text{ o } y = 0$$

Definizione (divisione fra numeri razionali)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \qquad \textit{se } c \neq 0.$$

Si può anche indicare con una linea di frazione, cioè

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Esempio

$$\frac{9}{14} : \frac{6}{7} = \frac{9}{14} \cdot \frac{7}{6} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\frac{3}{14}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{7}$$

Esercizio

Calcolare $\quad \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} : \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{5}.$

Ricordiamo: un numero razionale a/b è positivo (ovvero maggiore di zero) se i numeri interi a e b hanno ugual segno.

Definizione (ordine fra numeri razionali)

Si dice che $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$ *se, e solo se,* $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} > 0$
Calcolando $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$, *significa che i numeri interi* $ad - bc$ *e* bd *hanno ugual segno.*

Si dice poi che $\dfrac{a}{b} \geq \dfrac{c}{d}$ *se* $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$ *oppure* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

Nella pratica, conviene riportarsi alla situazione in cui b e d sono entrambi positivi.
In tal caso $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$ se, e solo se, $ad - bc$ è positivo, cioè $ad > bc$.

Proprietà della relazione d'ordine $\geq$.

Per ogni $x, y, z \in \mathbb{Q}$ si ha

1. $\boxed{x \geq x}$ riflessiva
2. $\boxed{\text{se } x \geq y \text{ e } y \geq x, \text{ allora } x = y}$ antisimmetrica
3. $\boxed{\text{se } x \geq y \text{ e } y \geq z, \text{ allora } x \geq z}$ transitiva
4. $\boxed{x \geq y \text{ oppure } y \geq x}$ totale
5. $\boxed{\text{se } x \geq y, \text{ allora } x + z \geq y + z \text{ per ogni } z}$
6. $\boxed{\text{se } x \geq y, \text{ allora } \begin{cases} x \cdot z \geq y \cdot z & \text{se } z \geq 0, \\ x \cdot z \leq y \cdot z & \text{se } z \leq 0 \end{cases}}$

Esercizio (Mettere in ordine crescente)

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{-5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{1}{-2}$$

Esercizio

Ci sono cinque persone con diverse situazioni patrimoniali. Oronzo è più ricco di Rocco, le cui ricchezze sono più modeste di quelle di Silvio, e quest'ultimo a sua volta è più danaroso di Piero. Quirino è meno benestante di Piero, ma più agiato di Oronzo. Chi è il terzo in ordine di ricchezza?

1. Piero
2. Rocco
3. Oronzo
4. Silvio
5. Quirino

Esercizio

Ci sono cinque persone con diverse situazioni patrimoniali. Oronzo è più ricco di Rocco, le cui ricchezze sono più modeste di quelle di Silvio, e quest'ultimo a sua volta è più danaroso di Piero. Quirino è meno benestante di Piero, ma più agiato di Oronzo. Chi è il terzo in ordine di ricchezza?

1. Piero
2. Rocco
3. Oronzo
4. Silvio
5. **Quirino**

Esercizio

Giocando a Risiko Giulio Cesare ha vinto più di suo nipote Augusto, ma non di Napoleone. Alessandro Magno ha vinto meno di Carlo Magno, ma più di Napoleone. Chi ha vinto di meno?

1. Carlo Magno
2. Alessandro Magno
3. Napoleone
4. Augusto
5. Giulio Cesare

Esercizio

Giocando a Risiko Giulio Cesare ha vinto più di suo nipote Augusto, ma non di Napoleone. Alessandro Magno ha vinto meno di Carlo Magno, ma più di Napoleone. Chi ha vinto di meno?

1. Carlo Magno
2. Alessandro Magno
3. Napoleone
4. **Augusto**
5. Giulio Cesare

Finalmente possiamo fare tutte le operazioni fondamentali e dunque abbiamo tutti i numeri che ci servono!

NO!

A titolo di esempio, non sappiamo calcolare la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1.

Il teorema di Pitagora afferma che tale lungezza è data dalla radice quadrata della somma di due quadrati costruiti sui lati, cioè

$$\ell = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

In altre parole, il numero ℓ elevato al quadrato deve fare 2.

Ma non esiste alcun numero razionale il cui quadrato faccia 2!

Per colmare questa lacuna dei numeri razionali (e molte altre...) si introducono i numeri reali ($\mathbb{R}$).
Per i nostri scopi, è sufficiente dire che i numeri reali sono tutti i numeri che possiamo scrivere come allineamento decimale (sia esso finito, infinito, periodico...).

Esempio

$-\dfrac{5}{2} = -2,5$	allineamento decimale finito
$\dfrac{1}{3} = 0,333333\cdots = 0,\overline{3}$	allineamento decimale infinito periodico
$\sqrt{2} = 1.4142135623\cdots$	allineamento decimale infinito non periodico

Sui numeri reali si assegnano somma, prodotto e relazione d'ordine in modo che valgano tutte le proprietà che abbiamo riconosciuto per i numeri razionali.

Ma allora qual è la differenza? Non ci sono "buchi".

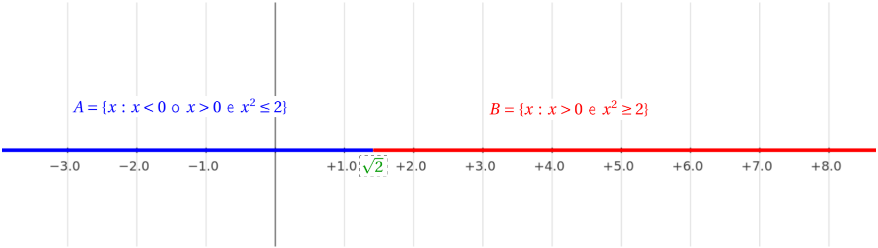
Assioma di completezza

Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ tali che $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$ e

$$a < b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

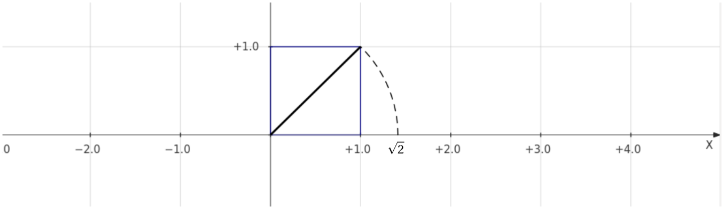
Allora esiste un unico $s \in \mathbb{R}$ che fa da elemento separatore:

$$a \leq s \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$



Sui numeri reali si assegnano somma, prodotto e relazione d'ordine in modo che valgano tutte le proprietà che abbiamo riconosciuto per i numeri razionali.

Possiamo misurare ogni lunghezza!



C'è una corrispondenza fra i numeri reali e la retta. La relazione d'ordine fra i numeri dà un orientamento.