Capitolo 1

I Numeri

I numeri dei bambini sono quelli che in matematica si dicono **naturali**, e si indicano con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 100, \dots\}$. L'insieme dei naturali nasce in modo naturale (permettete il gioco di parole...) dalla necessità di contare. Ma se vogliamo contare tutto, non solo quello che otteniamo ma anche quello che perdiamo (i nostri crediti, ma anche i nostri debiti!) dobbiamo introdurre l'insieme dei numeri **relativi o interi** $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$. Con i numeri interi, positivi e non, possiamo fare addizioni e sottrazioni tra due qualsiasi numeri, possiamo anche sottrarre un numero da uno più piccolo!
A questo punto facciamo una precisazione sulle parole: *positivo, negativo, non positivo, non negativo* . Per noi $\{1, 2, 3, \dots\}$ sono i numeri positivi, $\{-1, -2, -3, \dots\}$ i negativi, lo zero non è né positivo né negativo. Quando diciamo che un numero è non negativo vogliamo dire che è positivo o nullo (analogamente quando diremo che un numero è non positivo).
Però con i relativi non possiamo sempre fare le divisioni, abbiamo bisogno di introdurre ancora altri numeri, i numeri **razionali** indicati con $\mathbb{Q}$, cioè l'insieme delle frazioni.

Una frazione è un modo "conciso" per scrivere una divisione, quando questa da un risultato che non è in $\mathbb{Z}$, cioè se dividiamo 4 per 2 otteniamo 2 e possiamo scrivere $4 : 2 = 2$, però il risultato non sempre esiste e anche quando esiste non sempre si riesce a scrivere, ad esempio quanto fa $10 : 3$? se proviamo a calcolare il quoziente otteniamo $3,33333333\dots$, che numero è questo? non è un naturale e tanto meno un relativo, allora dobbiamo dare una definizione alla divisione, ebbene $\mathbb{Q}$ è l'insieme delle frazioni a/b dove si intende che $a/b = a : b$ e per questo andrà sempre supposto che b sia un intero non nullo, visto che non ha senso dividere un numero per zero. Dobbiamo inoltre tenere in conto che a volte due divisioni danno lo stesso risultato, ad esempio $1 : 2 = 2 : 4 = 6 : 12 = \dots$, allora diremo che due frazioni a/b, c/d sono *equivalenti* se $ad = bc$ (nei casi detti $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ e $2 \cdot 12 = 4 \cdot 6$), in questo caso le due frazioni esprimono lo stesso numero razionale, in qualche modo rappresentano la stessa quantità. Allora, potendo scegliere una frazione tra tutte quelle equivalenti, sceglieremo la frazione il cui denominatore non ha fattori in comune con numeratore. Nell'insieme dei numeri razionali è definita un'operazione di somma

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

che gode delle seguenti proprietà

1. $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$ proprietà associativa;
2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ proprietà commutativa;
3. $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b}$ esistenza dell'elemento neutro;
4. $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$ esistenza dell'opposto.

Inoltre è definita un'operazione di prodotto
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$
in modo che valgano le seguenti proprietà

1. $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}+\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$ proprietà distributiva;
2. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$ proprietà commutativa;
3. $\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$ esistenza dell'elemento neutro;
4. $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$ esistenza dell'inverso.

Inoltre ricordiamo che la divisione è definita usando la moltiplicazione come segue
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$
Infine possiamo sempre paragonare due numeri razionali, cioè possiamo sempre stabilire quale dei due è più grande in base alla seguente regola
$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\ \text{ se e solo se }\ ad>bc,\quad \text{per ogni } a/b \text{ e } c/d \text{ con } b,d\neq 0,$$
inoltre
$$\frac{a}{b}>0\qquad\text{se e solo se}\qquad a\cdot b>0$$
e
$$\frac{a}{b}>0\qquad\text{se e solo se}\qquad -\frac{a}{b}<0.$$

1.0.1 Esercizi.

1. Dire se le seguenti disuguaglianze sono vere
$$\begin{array}{llll} a)\,\frac{1}{2}>\frac{1}{4}, & b)\,\frac{4}{9}<\frac{1}{2}, & c)\,\frac{4}{9}<\frac{1}{3}, & d)\,-\frac{2}{5}>-1 \\ e)\,-\frac{2}{5}>-\frac{1}{6} & f)\,\frac{7}{4}<\frac{13}{9}, & g)\,-\frac{7}{4}<-\frac{13}{9}, & h)\,2>\frac{3}{2}, \\ i)\,2>\frac{5}{2} & l)\,2\geq\frac{8}{4} & m)\,-\frac{18}{9}>\frac{3}{4} & n)\,-\frac{49}{7}<-\frac{14}{7} \end{array}$$
[Risposta: sono vere le diseguaglianze a), b), d), g), h), l), n).]

2. Risolvere le seguenti espressioni

   (a)
   $$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{3}\right)$$
   [Risposta: 5/12]

   (b)
   $$\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)\cdot\left(3-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right)$$
   [Risposta: 17/9]

(c)
$$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right):\left(\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{5}\right)$$
[Risposta: 43/7]

(d)
$$1:\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\right):\left(\frac{1}{7}+1\right)$$
[Risposta: 30/7]

(e)
$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)$$
[Risposta: 4/21]

(f)
$$\left(\frac{10}{7}-\frac{6}{4}\right):\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{5}+1\right)$$
[Risposta: −2/203]

(g)
$$\frac{1-\frac{5}{2}+\frac{7}{10}}{2+\frac{4}{5}-\frac{3}{2}}\cdot\frac{\frac{7}{49}-\frac{16}{8}}{\frac{9}{4}-\frac{25}{10}}$$
[Risposta: −32/77].

1.1 I numeri Reali.

La storia sembrerebbe conclusa, una volta costruiti i numeri razionali siamo sicuri di poter fare tutte le quattro operazioni, ma non ci accontentiamo ancora e ci piacerebbe anche poter sempre fare le potenze e le radici di numeri (va detto che non siamo noi ad essere incontentabili, ma tanti problemi dalla geometria ci portano a dover calcolare le radici quadrate, basti pensare al teorema di Pitagora...). A questo scopo introduciamo i numeri **reali** $\mathbb{R}$, questo insieme contiene tutti i precedenti, e per ogni a, b, c in $\mathbb{R}$ sono definite una **somma**, in modo che valgano le seguenti proprietà

$a+b=b+a$ *proprietà commutativa,*

$a+(b+c)=a+b+c=(a+b)+c$ *proprietà associativa,*

$0+a=a+0=a$ esistenza dell'*elemento neutro,*

$a+(-a)=0.$ esistenza dell'*elemento opposto,*

Notate che queste proprietà valevano già nell'insieme dei relativi. Viene anche definito un prodotto tale che

$a\cdot b=b\cdot a=ab$ *proprietà commutativa,*

$a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c$ *proprietà associativa,*

$a\cdot 1=1\cdot a=a$ esistenza dell'*unità,*

se $a\neq 0$ si ha $a\cdot a^{-1}=a\cdot 1/a=1$ esistenza dell'*inverso o reciproco,*

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ *proprietà distributiva.*

Notiamo anche qui che tutte le proprietà elencate finora non valgono in $\mathbb{Z}$ ma valgono in $\mathbb{Q}$ e come in $\mathbb{Q}$ possiamo sempre paragonare due numeri reali in modo che valgano le seguenti proprietà per ogni a, b, c in $\mathbb{R}$

$a\leq b$ o $b\leq a$,

$a\leq a$

se $a\leq b$ e $b\leq a$ allora $a=b$,

se $a \le b$ e $b \le c$ allora $a \le c$,

se $a \le b$ allora $a + c \le b + c$,

se $a, b \ge 0$ allora $ab \ge 0$.

E di nuovo queste proprietà valgono anche in $\mathbb{Q}$. La proprietà che i reali hanno in più dei razionali va sotto il nome di **assioma di continuità** il quale in poche parole ci dice che nei reali non ci sono buchi, cioè tra due numeri reali ne possiamo sempre trovare uno in mezzo, e questo ci permette di fare sempre le radici di reali positivi, per dirla in modo diverso mentre in $\mathbb{Q}$ non esiste alcun elemento il cui quadrato sia 2, questo elemento lo possiamo trovare in $\mathbb{R}$. Nel corso di Analisi 1 potremo essere più chiari su questo punto. Vogliamo però sottolineare che nel passare dai numeri razionali ai numeri reali abbiamo fatto un passaggio di astrazione, infatti mentre ci è sempre chiaro il significato concreto di un numero razionale (si tratta di dividere un certo numero di torte tra un certo numero di persone), non è immediato immaginare cosa rappresenta un numero reale. Questo non ci deve spaventare, basta trattare i numeri reali come gli altri applicando ad essi le regole delle operazioni suddette.

Esercizi.

1. $\dfrac{\frac{x}{2}}{3}$ è uguale a

$$(a)\ \frac{3}{2}x, \quad (b)\ \frac{2}{3}x \quad (c)\ \frac{2}{3x}, \quad (d)\ \frac{3}{2x}$$

[Risposta: a)]

2. $\dfrac{8x+2}{8y}$ è uguale a

$$(a)\ \frac{x+2}{y}, \quad (b)\ \frac{4x+1}{4y}, \quad (c)\ \frac{x}{y}+\frac{1}{4y}, \quad (d)\ \frac{x+4}{y}$$

[Risposta: c)]

3. $\dfrac{x}{x-y}-1$ è uguale a

$$(a)\ \frac{y}{x-y}, \quad (b)\ -\frac{x}{y}, \quad (c)\ \frac{2x}{x-y}, \quad (d)\ 1$$

[Risposta: a)]

4. Risolvere le seguenti espressioni

   (a)

$$\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b-c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b-c}},$$

$$\left[\text{Risposta:. } \frac{1}{2}\frac{a+b-c}{b-a-c}\right]$$

1.1.1 Modulo di un numero reale.

Il **valore assoluto** o **modulo** di un numero reale è quel numero così definito

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{se } a \ge 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Come dice la definizione $|a|$ è uguale al massimo tra i numeri a e $-a$, quindi se a è positivo il massimo tra i due numeri suddetti è a stesso, ma se $a < 0$ il massimo tra a e $-a$ è $-a$. Di conseguenza, il modulo di a **È SEMPRE POSITIVO** quale che sia $a \neq 0$. Dalla definizione seguono le seguenti importanti proprietà
$|a| > 0$ e $|a| = 0$ se e solo se $a = 0$,
$|a| = |-a|$,
$|a+b| = |b+a|$
$|a+b| \leq |a| + |b|$ **diseguaglianza triangolare**

Per verificare che vale la diseguaglianza triangolare, distinguiamo i seguenti casi
1) se $a, b \geq 0$ abbiamo scritto che $a+b \leq a+b$ che è vero; poiché $-b \geq 0$.
2) se $a \geq 0 \geq b$ abbiamo scritto che $|a+b| \leq a-b$ che diventa o $-a-b \leq a-b$ che è vero poiché $a \geq 0$ o $a+b \leq a-b$ vero poiché $b \leq 0$;
gli altri casi si studiano scambiando a con $-a$ e b con $-b$.
Per capire meglio il significato geometrico del modulo di un numero reale, ricordiamo che l'insieme dei numeri reali può essere disegnato come una linea senza inizio e senza fine, in cui sia fissato un verso da sinistra a destra, cioè un punto x della linea che è a destra di un altro punto y se e solo se $x > y$. Al centro poniamo lo zero che chiamiamo anche origine, in modo che a destra dello zero vediamo i numeri positivi e a sinistra vediamo i numeri negativi. Il modulo di un numero x rappresenta quanto x dista dall'origine, il che ci spiega perché il modulo sia sempre positivo (le distanze sono ovviamente sempre positive), inoltre $|x| = |-x|$ infatti sia x che $-x$ distano dallo zero per la stessa quantità .

Esercizi.

1. Calcolare i seguenti moduli

$$a)\,|3|,\qquad b)\,|-4|,\qquad c)\left|-\frac{121}{7}\right|\qquad d)\left|\left(1+\frac{1}{5}-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\right|$$
$$e)\left|\frac{99}{-37}\right|\quad f)\left|(-1)^2\right|\quad g)\left|(-81)^3\right|\quad h)\left|x^7\right|\qquad i)\left|x^{18}\right|$$

[Risposte: $a)\,3$, $b)\,4$, $c)\,121/7$, $d)\,1/5$, $e)\,99/37$, $f)\,1$, $g)\,(81)^3$

$h)$ se $x \geq 0$ $\left|x^7\right| = x^7$ se invece $x < 0, \left|x^7\right| = -x^7$, $i)\,x^{18}$]

2. Provare che $|a-b| \geq |a| - |b|$.

1.1.2 Potenze.

Se a è un numero reale positivo, quando scriviamo a^n (con n numero intero) intendiamo che il numero a viene moltiplicato per se stesso n volte. Cioè $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$, e a^n si dice potenza ennesima del numero a, mentre $(a^{-1})^n = a^{-n}$. Valgono le seguenti proprietà:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
2. $(a)^n \cdot (b)^n = (ab)^n$
3. $a^n : a^m = a^{n-m}$,
4. $(a^n)^m = a^{nm}$,
5. $a^0 = 1$

Infatti:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m}$$

quindi il numero a viene moltiplicato per se stesso $n+m$ volte. Per quanto riguarda la proprietà 2. osserviamo che

$$a^n : a^m = a^n \cdot (a^{-1})^m = a^n \cdot a^{-m} = \text{(per la prima proprietà) } a^{n-m}.$$

Per provare la proprietà 3, vediamo che succede per $n = 2$. Abbiamo

$$(a^n)^m = (a^2)^m = \underbrace{(a^2 \cdot a^2 \cdot \cdots \cdot a^2)}_{m};$$

poiché ogni fattore a^2 è moltiplicato per se stesso m volte, in totale a sarà moltiplicato per se stesso $2m$ volte. Analogamente si prova che la proprietà vale per ogni n intero. Per la proprietà 4, osserviamo che

$$a^0 = a^{1-1} = a^1 \cdot a^{-1} = a : a = 1.$$

Una importante conseguenza della proprietà caratterizzante l'insieme dei numeri reali (assioma di continuità) riguarda proprio le potenze. Infatti in $\mathbb{R}$ esiste sempre la radice ennesima di un numero reale, cioè dato dato $n \geq 1$ e $a > 0$ esiste un numero reale $x > 0$ tale che

$$x^n = a \qquad \text{cioè} \qquad x = \sqrt[n]{a}.$$

Osserviamo che se n è **dispari** possiamo definire anche la radice n-sima di un numero **negativo** a

$$\sqrt[n]{y} = -\sqrt[n]{-y}$$

mentre se n è pari $\sqrt[n]{y}$ non è definita per $y < 0$.
Un'osservazione importante da fare è la seguente: **La radice n-sima di un numero non negativo è un numero non negativo, quindi**

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

cioè se $x < 0$ $\sqrt{x^2} = -x$, ad esempio $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$ e non $\sqrt{(-2)^2} = -2$!!!!!!!!!!!

Finora abbiamo parlato di potenze con esponente $n \in \mathbb{Z}$ o al massimo con esponente $1/n$ con $n \in \mathbb{Z}$, in entrambi i casi suddetti possiamo sempre sapere se l'esponente (o il suo inverso per le radici) è pari o dispari. Ora vogliamo definire le potenze con esponente razionale o reale; a tale scopo occorre fare una precisazione. Se l'esponente n è naturale possiamo definire a^n anche se a è negativo poiché sappiamo che a^n sarà positivo per n pari e negativo solo nel caso in cui a è negativo e n dispari. Ma, se vogliamo definire a^x per x numero reale dobbiamo restringere la nostra definizione ai soli numeri a positivi, dato che non possiamo sapere se a^x avrà lo stesso segno di a o no (ricordate che ci sono numeri reali che non sono né pari né dispari!). Ricapitolando, le potenze a^x con x numero reale sono definite solo per a **positivo**. Come primo passo consideriamo un esponente $r = m/n$ con $n > 0$ e m numero relativo, allora la potenza a^r è definita così

$$a^r = a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$$

e valgono le seguenti proprietà per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ positivi e $r, s \in \mathbb{Q}$

1. $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$
2. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$
5. $a^r > 0,\ a^0 = 1,\ 1^r = 1$
6. se $r < s \begin{cases} a^r < a^s & \text{se } a > 1 \\ a^r > a^s & \text{se } a < 1 \end{cases}$

7. se $0 < a \le b \begin{cases} a^r \le b^r & \text{se } r > 0 \\ a^r \ge b^r & \text{se } r < 0 \end{cases}$

8. se a è un numero diverso da 1 e $a^r = a^s$ allora $r = s$.

Inoltre tali proprietà continuano a valere se l'esponente è un numero reale. Osserviamo inoltre che comunque si prenda $a \neq 1$

$$a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$$

ad esempio $3^{(2^3)} = 3^8$ mentre $(3^2)^3 = 3^6$! Ricordiamo infine le seguenti uguaglianze che vanno sotto il nome di **prodotti notevoli**

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2+b^2+2ab && \text{quadrato di un binomio;} \\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2 && \text{differenza di quadrati;} \\ (a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc && \text{quadrato di un trinomio;} \\ (a+b)^3 &= a^3+b^3+3a^2b+3ab^2 && \text{cubo di un binomio.} \end{aligned}$$

1.1.3 Esercizi.

1. $\dfrac{x}{1+x} - \dfrac{x}{1-x}$ è uguale a

$$(a)\ 0, \quad (b)\ \frac{2x}{1+x}, \quad (c)\ \frac{2x}{1-x^2}, \quad (d)\ -\frac{2x^2}{1-x^2}$$

[Risposta: d)]

2. $\dfrac{y}{y^2-1} - \dfrac{1}{y-1}$ è uguale a

$$(a)\ -\frac{1}{(1+y)(1-y)}, \quad (b)\ 0, \quad (c)\ -\frac{y^2}{y^2-1}, \quad (d)\ -1-y$$

[Risposta: a)]

3. Semplificare le seguenti espressioni

(a)

$$\frac{(a+b)^2-(a+b)(a-b)}{2b}$$

[Risposta: $a+b$]

(b)

$$\frac{2(a+b+c)(a+b-c)-(a+b+c)^2}{(a+b)^2-c^2}$$

[Risposta: $1-2c/(a+b-c)$]

(c)

$$\frac{(x+1)^2}{x^2-1} + (x-1)\left[\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2-1}\right] - \frac{3x}{x^2-1}$$

[Risposta: $1/(x^2-1)$]

(d)

$$\left[(1+a)^{2/3}\right]^{3/8},$$

[Risposta: $(1+a)^{1/4}$]

(e)

$$(3+b)^{4/3} : (3+b)^{1/3}$$

[Risposta: $(3+b)$].

(f)

$$(a+3)^{-1/3} \cdot (a+3)^{1/3}$$

[Risposta: 1].

4. $\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ è uguale a

$$(a)\ 1, \quad (b)\ 2^{5/6}, \quad (c)\ 2^{1/6}, \quad (d)\ 2^{3/2},$$

[Risposta: (c)].

5. Determinare i seguenti numeri reali

$$a)\ \sqrt[6]{64} \quad b)\ \sqrt[5]{(-2)^5} \quad c)\ \sqrt[6]{(-2)^6} \quad d)\ \sqrt[3]{-40\cdot 25}$$

[Risposte: $a)\,2$, $b)\,-2$, $c)\,2$, $d)\,-10$]

6. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $ab \geq 0$, è corretto scrivere $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$?

[Risposta: No! Perche?]

7. Dire se le seguenti uguaglianze sono vere

$$(a)\ \sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{5} \qquad (b)\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}, \qquad (c)\ (\sqrt{2})^2 = 1,$$

[Risposta: Sono vere (b) e (c)]

8. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ è uguale a

$$(a)\ -1, \quad (b)\ \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}, \quad (c)\ \frac{\sqrt{a+b}}{a-b}, \quad (d)\ 0.$$

[Risposta: (b)]

9. $b(a^6b^3)^{1/2}$ è uguale a

$$(a)\ \frac{1}{a^{12}b^5}, \quad (b)\ b^2\sqrt{a}a^3, \quad (c)\ b^2a^3\sqrt{b}, \quad (d)\ b\sqrt{b}a^3.$$

[Risposta: (c)]

10. $[a^2b^{1/3}]^{-1}$ è uguale a

$$(a)\ ab^{1/6}, \quad (b)\ \frac{1}{ab^2}, \quad (c)\ \frac{a^{-2}}{b^{1/3}}, \quad (d)\ (ab)^{-1/3}.$$

[Risposta: (c)]

1.1.4 Logaritmo.

Come abbiamo visto, per poter definire una potenza quale che sia l'esponente dobbiamo prendere una base a positiva, perciò anche il risultato dell'elevazione a potenza sarà sempre positivo. Se $a > 0$, il **logaritmo in base** a di un numero b è quell'esponente da dare ad a per ottenere b, cioè

$$\lg_a b = x \quad \text{se e solo se} \quad a^x = b.$$

Detto in altri termini x è l'unico numero a cui bisogna elevare a per ottenere b. Va subito osservato che affinché tutto abbia senso a deve essere positivo e diverso da 1, inoltre, l'argomento b deve essere positivo. Valgono le seguenti proprietà

1. $a^{\lg_a b} = b \qquad$ per definizione;
2. $\lg_a b + \lg_a c = \lg_a (bc)$;
3. $\lg_a b - \lg_a c = \lg_a \left(\dfrac{b}{c}\right)$;
4. $\lg_a (b^y) = y \lg_a b$;
5. per ogni $a \neq 1$ si ha $\lg_a 1 = 0, \quad \lg_a a = 1, \quad \lg_a 1/a = -1$
6. $\lg_a b = \lg_c b \cdot \lg_a c$;
7. $\lg_a b = \dfrac{1}{\lg_b a}$.

Inoltre va ricordato che per ogni $x \neq 0$ si ha

$$\lg_a x^2 = 2 \lg_a |x|$$

e se $xy > 0$

$$\lg_a (xy) = \lg_a |x| + \lg_a |y|.$$

1.1.5 Esercizi.

1. Calcolare i seguenti logaritmi

$$a)\ \lg_2 4, \quad b)\ \lg_2(-4), \quad c)\ \lg_3(1/3), \quad d)\ \lg_{10}(100), \quad e)\ \lg_4 2, \qquad f)\ \lg_3 6,$$

$$g)\ \lg_3 27 \quad h)\ \lg_2 1/4 \quad i)\ \lg_{1/25} 5 \quad l)\ \lg_{10} 10000 \quad m)\ \lg_{10} 0,0001 \quad n)\ \lg_{25} 5 + \lg_{25} 125.$$

   [Risposte: $a)\,2$, $b)$ non esiste $c)\,-1$, $d)\,2$, $e)\,1/2$, $f)\,1+\lg_3 2$, $g)\,3$, $h)\,-2$, $i)\,-1/2$, $l)\,4$,
   $m)\,-3$, $n)\,2$]

2. Dire quale tra le seguenti risposte è quella giusta.

   (a) $\lg_3(7/4)$ è uguale a

$$a)\ \lg_3 7 - \lg_3 4, \quad b)\ \lg_3 2, \quad c)\ \frac{\lg_3 7}{\lg_3 4}, \quad d)\ \lg_3 7 \lg_3 \frac{1}{4}$$

   [Risposta: $a)$]

   (b) $\lg_{1/2}(2^x)$ è uguale a

$$a)\ \frac{x}{2}, \quad b)\ -x, \quad c)\ \sqrt{x}, \quad d)\ 2x$$

   [Risposta: $b)$]

3. Usando le proprietà dei logaritmi, semplificare le seguenti espressioni

$$a)\, 5^{-4\lg_{25}(1/x)} \text{ per ogni } x>0 \quad b)\, 3^{\lg_9 x} \text{ per ogni } x>0$$

$$c)\, \lg_{1/2} 2^{5x} \text{per ogni } x\in\mathbb{R} \quad d)\, \lg_{10}\sqrt{10x^2} \text{ per ogni } x\neq 0$$

[Risposte: *a*) x^2, *b*) $\sqrt{x}$, *c*) $-5x$, *d*) $1/2+\lg_{10}x$]

Capitolo 2

Equazioni e Disequazioni

In questa capitolo ricorderemo come si risolvono i tipi più noti di equazioni e disequazioni algebriche. Iniziamo con il dire che un **polinomio** di grado n è una somma di termini del tipo $a_j x^j$ dove a_j è un numero reale e j è un numero naturale che varia da 0 a n, cioè un polinomio $p(x)$ si scrive così

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n.$$

Un'equazione algebrica è un'uguaglianza così scritta

$$p(x) = 0;$$

il grado dell'equazione è il grado del polinomio $p(x)$. Ad esempio, l'ugualgianza

$$1 + 2x^2 - x^3 = 0$$

è un'equazione di terzo grado dove $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = -1$. Risolvere un'equazione algebrica vuol dire cercare i numeri reali x per cui è soddisfatta la data equazione, o in altri termini vuol dire cercare i punti in cui il polinomio che è dato nell'equazione si annulla, cioè cercare i suoi zeri. Iniziamo a vedere come si risolvono le equazioni più facili, quelle di grado uno.

2.1 Equazioni e disequazioni di primo grado

Un'equazione algebrica di primo grado è scritta nella forma

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0, \tag{2.1}$$

dove a, b sono numeri dati con $a \neq 0$ e x è il numero da determinare affinché l'equazione sia soddisfatta. Dalle proprietà dei numeri reali sappiamo che l'uguaglianza su scritta non cambia se aggiungiamo un qualsiasi numero reale, per cui risolvere (**??**) è equivalente a risolvere

$$ax + b - b = 0 - b \quad \text{che equivale a} \quad ax = -b.$$

Di nuovo l'uguaglianza non varia se moltiplichiamo per uno stesso numero (diverso da zero !) i membri dell'equazione e allora abbiamo

$$\frac{1}{a}(ax) = -b \cdot \frac{1}{a} \quad \text{che equivale a} \quad x = -\frac{b}{a}.$$

L'ultima uguaglianza ci dice che, nel caso in cui $a \neq 0$ c'è un unico numero reale che soddisfa (**??**) e tale numero è $x = -b/a$. È anche chiaro che nel caso in cui $a = 0$ l'equazione sarà soddisfatta per ogni x se $b = 0$, mentre non avrà soluzioni se $b = 0$. Passiamo ora alla risoluzione delle disequazioni.
Una disequazione di primo grado è scritta come segue

$$ax + b > 0; \qquad \text{o} \qquad ax + b < 0, \tag{2.2}$$

oppure possiamo anche avere le cosiddette disequazioni larghe

$$ax+b \geq 0; \qquad \text{o} \qquad ax+b \leq 0,$$

Che differenza c'è tra un'equazione e una disequazione? Innanzitutto la richiesta è diversa, risolvere un'equazione vuol dire cercare il valore dell'incognita x (perché abbiamo visto che per un'equazione di primo grado tale valore è unico se $a \neq 0$) per cui una certa uguaglianza è soddisfatta. Mentre risolvere una disequazione vuol dire cercare **i valori** per cui la data diseguaglianza è vera. Quindi mentre una equazione è soddisfatta per un certo numero reale, una disequazione sarà soddisfatta per parecchi numeri o per nessun numero.
Ma come si risolve una disequazione di primo grado? Iniziamo da due semplici esempi

$$2x > 0 \qquad\qquad -2x > 0.$$

Nella prima disequazione si richiede di trovare i numeri x che moltiplicati per due danno un risultato che è positivo, tali numeri saranno tutti i numeri positivi. Mentre nella seconda disequazione si richiede di determinare i numeri x il cui prodotto con -2 è positivo. In questo caso le soluzioni non potranno essere i numeri positivi, visto che ogni numero positivo moltiplicato per -2 da come risultato un numero negativo. (Ricordate che un numero c è positivo se e solo se $-c$ è negativo!), quindi in questo caso la disequazione è soddisfatta se $x < 0$. Dai ragionamenti fatti possiamo dedurre la semplice regola da non dimenticare:
quando si moltiplica per un numero negativo ambo i membri di una disequazione si cambia il verso della diseguaglianza.
Tornando alla disequazione (**??**), questa è equivalente a $ax > -b$ o $ax < -b$; ora vorremmo moltiplicare ambo i membri per $1/a$, ma dobbiamo tenere a mente la regola dei segni, perciò distinguiamo due casi
1. Se $a > 0$ possiamo dividere per a senza dover cambiare il verso alla diseguaglianza e otteniamo

$$x > -\frac{b}{a}; \quad \text{o} \quad x < -\frac{b}{a};$$

2. se invece $a < 0$, allora dividendo per a si cambia il verso della diseguaglianza e abbiamo

$$x < -\frac{b}{a}, \quad \text{o} \quad x > -\frac{b}{a}.$$

La risoluzione non cambia se abbiamo la diseguaglianza larga, basta aggiungere all'insieme delle soluzioni anche $-b/a$.

2.1.1 Esercizi.

1. Risolvere le seguenti equazioni di primo grado

   (a)
   $$1)\, x+6=0, \qquad 2)\, x-5=0, \qquad 3)\, 2x=0, \qquad 4)\, 3x-9=0.$$
   [Risposte: 1) $x=-6$, 2) $x=5$, 3) $x=0$, 4) $x=3$]

   (b)
   $$1)\, x-4+2x+5=0, \quad 2)\, x-8+\frac{x}{2}-1=0, \quad 3)\, 3x+5=3x, \quad 4)\, x-7+\frac{5x}{2}=7.$$
   [Risposte: 1) $x=-1/3$, 2) $x=6$, 3) senza soluzioni, 4) $x=4$]

2. Risolvere le seguenti disequazioni di primo grado

   (a)
   $$1)\, -2x \geq 0, \quad 2)\, x-1 \leq 0, \quad 3)\, -3x+5>0, \quad 4)\, -4x+8<0.$$
   [Risposte: 1) $x \leq 0$, 2) $x \leq 1$, 3) $x < 5/3$, 4) $x > 2$]

(b)

$$1)\, 3x+4-x+1<x-6, \quad 2)\, \frac{x}{2}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}x \geq \frac{5}{4}x+2, \quad 3)\, x+7+2x \leq x-7$$

[Risposte: 1) $x \leq -11$, 2) senza soluzioni 3) $x \leq -7$]

(c)

$$1)\, x+\frac{3}{4}+\frac{x}{2} > \frac{3}{2}x \quad 2)\, -2x-3+\frac{1}{3} > \frac{x}{3}-\frac{1}{5}, \quad 3)\, -\frac{x}{5}+\frac{1}{5}+x \geq \frac{1}{2}-\frac{x}{2}$$

[Risposte: 1) soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$, 2) $x < -37/35$, 3) $x \geq 3/13$].

2.2 Equazioni e disequazioni di secondo grado

Una equazione di secondo grado è scritta come segue

$$ax^2+bx+c=0, \qquad a \neq 0 \tag{2.3}$$

Come per le equazioni di primo grado bisogna determinare per quali x l'uguaglianza è soddisfatta, o equivalentemente bisogna cercare gli zeri del polinomio ax^2+bx+c. Al contrario delle equazioni di primo grado, un'equazione di secondo grado può avere due soluzioni, nessuna soluzione o essere soddisfatta in tutti i numeri reali, quest'ultimo caso si ha però solo nel caso in cui il polinomio di cui bisogna cercare gli zeri ha tutti i coefficienti nulli. Vediamo qualche esempio

1. Si risolva $x^2-1=0$.
   Dai prodotti notevoli deduciamo che il polinomio a sinistra può essere scomposto nel prodotto di due polinomi di primo grado, quindi l'equazione è equivalente a

   $$x^2-1=(x+1)(x-1)=0$$

   Il prodotto di due numeri è zero se e solo se uno dei numeri è zero, quindi abbiamo che l'equazione è soddisfatta in uno dei due casi

   $$x+1=0 \qquad \text{o} \qquad x-1=0$$

   quindi in questo caso l'equazione è soddisfatta in due numeri $x=1$ e $x=-1$.

2. Si risolva $x^2+1=0$.
   Il polinomio di cui bisogna cercare gli zeri, è la somma di due quadrati x^2 e 1, poiché il quadrato di un numero è sempre positivo e nullo solo nel caso in cui il numero è nullo, il polinomio non ha zeri. Detto in altri termini, l'equazione è equivalente a

   $$x^2=-1$$

   e di nuovo, essendo $x^2 \geq 0$ l'uguaglianza non potrà essere mai soddisfatta.

Nel primo esempio abbiamo visto che per risolvere l'equazione è stato fondamentale scomporre il polinomio nel prodotto di due polinomi di primo grado. Vogliamo cercare una scomposizione che valga in generale. Supponiamo che $b^2-4ac \geq 0$ cosicché sono ben definiti i numeri

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2.4}$$

e proviamo che vale

$$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2+bx+c. \tag{2.5}$$

Se svolgiamo il prodotto a sinistra abbiamo

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]$$

e usando le regole dei prodotti notevoli otteniamo

$$a(x-x_1)(x-x_2) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = ax^2+bx+c$$

per cui la scomposizione è corretta. Avendo ottenuto un'equazione equivalente a quella data che si scrive come il prodotto di due polinomi di primo grado, ragioniamo come nel primo esempio ed otteniamo che le soluzioni dell'equazione data sono x_1 e x_2. Ricordiamo che il ragionamento svolto è corretto se x_1, x_2 sono ben definite, cioè se

$$\Delta = b^2-4ac \geq 0$$

la quantità su scritta è detta **discriminante**. Per chiarezza distinguiamo tre casi:
1. $\Delta > 0$ in questo caso $x_1 \neq x_2$ e queste sono le soluzioni dell'equazione e si dice che si hanno due radici reali e distinte.
2. $\Delta = 0$ in questo caso

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}$$

e $x_1 = x_2$ è la soluzione, si dice anche che si hanno due radici reali e coincidenti.
3. $\Delta < 0$ in questo caso non possiamo scrivere x_1 e x_2, comunque vale questa scomposizione

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= \frac{1}{4a}[4a^2x^2+4abx+4ac] = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2-(b^2-4ac)] \\ &= \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2-\Delta] \end{aligned}$$

essendo $-\Delta > 0$ nella parentesi quadra abbiamo scritto la somma di due quadrati che quindi è positiva, per cui l'equazione non ha radici reali.

Osservazione 1. *In molti casi per risolvere l'equazione non è necessario ricordare la formula delle radici $x_{1,2}$, ma si può procedere con calcoli più semplici. Ad esempio se $c = 0$, possiamo mettere in evidenza x e ottenere*

$$x(ax+b) = 0$$

le cui radici sono $x_1 = 0$, $x_2 = -b/a$. Se invece $b = 0$ abbiamo

$$ax^2 = -c$$

e se $c \neq 0$ e a e c hanno segno concorde non ci sono soluzioni, se $c = 0$ c'è solo la soluzione $x = 0$, se $c \neq 0$ e a e c hanno segno discorde, ci sono le due soluzioni $x_{1,2} = \pm\sqrt{-c/a}$.

Nel caso in cui $b = 2\beta$ l'equazione si scrive così

$$ax^2+2\beta x+c = 0$$

e vale una **formula ridotta** per le radici (sempre se $\beta^2-ac \geq 0$!), date da

$$x_1 = \frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-ac}}{a}, \quad x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-ac}}{a}$$

2.2.1 Esercizi.

Risolvere le seguenti equazioni

1. $x^2-3x+2 = 0$,

2. $4x^2-1 = 0$,

3. $3x^2 - 5x = 0$,
4. $(x-1)(x+1) = 0$
5. $x^2 + 3 = 0$
6. $x^2 - x - 30 = 0$

[Risposte: 1) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; 2) $x_1 = -1/2$, $x_2 = 1/2$; 3) $x_1 = 0$, $x_2 = 5/3$ 4) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; 5) non ha soluzioni; 6) $x_1 = -5$, $x_2 = 6$].

2.2.2 Disequazioni

Per risolvere la disequazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \tag{2.6}$$

studiamo separatamente i tre casi precedenti:
1. $(\Delta > 0)$. Come abbiamo visto, in questo caso l'equazione ha due radici reali e distinte x_1 e x_2 e vale la scomposizione (**??**) per cui dobbiamo trovare i numeri x per cui il prodotto in (**??**) è non negativo. Supponiamo, ad esempio, che $a > 0$, basta quindi che sia $(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$. Ricordando la regola dei segni per il prodotto abbiamo che i due fattori devono avere lo stesso segno, o entrambi positivi o entrambi negativi, quindi

$$x \geq x_1 \text{ e } x \geq x_2 \qquad \text{oppure} \qquad x \leq x_1 \text{ e } x \leq x_2.$$

Osservando che $x_1 < x_2$, la soluzione è data da

$$x \leq x_1 \quad oppure \quad x \geq x_2$$

si dice che la disequazione è verificata negli intervalli esterni alle radici x_1 e x_2. Nel caso in cui $a < 0$ l'intervallo in cui è soddisfatta la disequazione è quello interno alle radici $x_1 \leq x \leq x_2$.
Nel caso in cui avessimo avuto il segno opposto in (**??**) avremmo dovuto prendere l'intervallo interno $x_1 \leq x \leq x_2$ per $a > 0$, mentre l'intervallo esterno se $a < 0$.
2. $(\Delta = 0)$. In questo caso $x_1 = x_2$ e la disequazione (**??**) è equivalente a

$$a(x - x_1)^2 \geq 0.$$

Ora se $a < 0$ la disequazione non ha evidentemente soluzioni, mentre se $a > 0$ la disequazione è sempre soddisfatta.
3. $(\Delta < 0)$. In questo caso sappiamo che l'equazione non ha soluzioni, per cui il polinomio di secondo grado non ha zeri, quindi è sempre positivo o sempre negativo, e la disequazione o è soddisfatta per ogni x o non è mai soddisfatta, a seconda del segno del coefficiente a e del segno richiesto. Non specifichiamo i casi per esteso ma lasciamo al ragionamento lo studio delle singole situazioni.
N.B. Nel caso in cui la disequazione (**??**) ha il segno stretto, bisogna escludere le radici dall'insieme delle soluzioni.

2.2.3 Esercizi.

Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado.

1. $1 - x^2 \leq 0$,
2. $x^2 \geq 0$,
3. $x^2 > 0$
4. $2x^2 + 1 \leq 0$,

5. $(x+5)(x-6) \leq 0$,

6. $x^2 - 2x + 1 > 0$

7. $x^2 + 2x + 1 \leq 0$,

8. $x^2 > 9$,

9. $5 + 4x + 3x^2 > 0$.

[Risposte: 1) $x \leq -1$, $x \geq 1$; 2) $\forall\, x$ 3) $x \neq 0$ 4) Non esiste soluzione; 5) $-5 \leq x \leq 6$; 6) $x \neq 1$, 7) $x = -1$, 8) $x < -3$, $x > 3$, 9) $\forall\, x \in \mathbb{R}$].

2.3 Equazioni e disequazioni di grado superiore

Nel caso in cui un'equazione data abbia grado superiore al secondo non ci sono regole generali di risoluzione, bisogna affrontare caso per caso cercando di trovare una scomposizione utile. A titolo di esempio risolviamo la disequazione

$$2x - 9x^3 < 0.$$

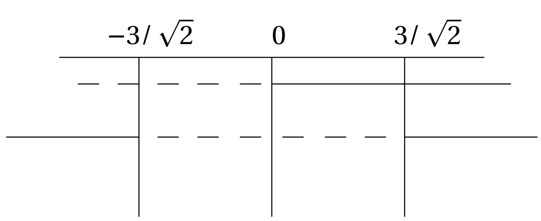
Possiamo mettere in evidenza l'incognita e otteniamo la disequazione equivalente

$$x(2 - 9x^2) < 0$$

quindi il prodotto del polinomio $p(x) = x$ e del polinomio $q(x) = 2 - 9x^2$ è negativo, pertanto i due polinomi devono avere segno opposto. Un modo per determinare l'insieme delle soluzioni consiste nel seguente ragionamento.
Primo Passo.
Si risolvono separatamente le disequazioni

$$x > 0 \qquad\qquad 2 - 9x^2 > 0$$

la prima è soddisfatta per $x > 0$ la seconda per $x < 3/\sqrt{2}$ o $x > 3/\sqrt{2}$.
Secondo Passo.
Si riportano tali soluzioni sul seguente grafico



dove la linea continua sta a significare che la disequazione è soddisfatta e la linea tratteggiata che la disequazione non è soddisfatta. Quindi dove leggiamo in verticale due linee continue vuol dire che entrambi i polinomi sono positivi per cui anche il loro prodotto è positivo, lo stesso accade dove troviamo due linee tratteggiate, mentre dove leggiamo una linea tratteggiata e una continua vuol dire che un polinomio è negativo e uno positivo, quindi il prodotto è negativo. Nel nostro caso dobbiamo scegliere gli intervalli in cui troviamo una linea continua e una tratteggiata, cioè $x < -\sqrt{3}/2$ o $0 < x < \sqrt{3}/2$.

2.3.1 Esercizi

Si risolvano le seguenti equazioni

1. $x^3 > 1$
2. $x^4 - x \leq 0$
3. $4x^4 - 9 \geq 0$
4. $x^2 > 8x^5$
5. $(2x^2 + 1)^2 - 4 < 0$

[Risposte: 1) $x > 1$ 2) $0 \leq x \leq 1$ 3) $x \leq -\sqrt{3/2} \cup x \geq \sqrt{3/2}$ 4) $x < 1/2,\ x \neq 0$ 5) $-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$]

2.3.2 Equazioni e Disequazioni Biquadratiche

Un caso di equazioni di grado superiore al secondo che si può risolvere con una certa facilità è quello delle equazioni biquadratiche. Un'equazione biquadratica è scritta così

$$ax^4 + bx^2 + c = 0. \qquad a \neq 0$$

Per risolverla, si pone $x^2 = t$ e l'equazione diventa di secondo grado in t, avrà (nel caso di discriminante positivo) le radici x_1 e x_2, poi dovremo cercare le soluzioni delle due equazioni

$$x^2 = x_1 \qquad x^2 = x_2.$$

Le due equazioni precedenti si studiano come abbiamo visto e si avranno 0, 1, 2, 3, 4 o infinite soluzioni a seconda del segno di x_1 e x_2.

2.3.3 Esercizi.

1. Si risolvano le seguenti equazioni biquadratiche.

$$a)\ x^4 - 2x^2 - 8 = 0, 1 \quad b)\ x^4 + 2x^2 = 0, \quad c)\ x^4 - 2x^2 = 0$$

[Risposte: *a*) $x_1 = 2,\ x_2 = -2$; *b*) $x_1 = 0$; *c*) $x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{2},\ x_3 = \sqrt{2}$].

2. Si risolvano le seguenti disequazioni biquadratiche.

$$a)\ x^4 - 3x^2 \geq 0, \qquad b)\ x^4 - x^2 + 1 > 0, \quad c)\ x^4 + 1 < 0$$

$$d)\ x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \quad e)\ x^4 - 2x^2 - 8 \leq 0 \quad f)\ 3x^4 + 4x^2 - 7 > 0.$$

[Risposte: *a*) $x \leq -\sqrt{3},\ x \geq \sqrt{3}$; *b*) $\forall x \in \mathbb{R}$; *c*) nessuna soluzione *d*) $\forall x \in \mathbb{R}$;
e) $-2 \leq x \leq 2$; *f*) $x < -1,\ x > 1$.]

2.4 Equazioni e disequazioni razionali.

Una equazione razionale si scrive come segue

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi nella variabile x. Visto che una frazione si annulla quando si annulla il suo denominatore, le soluzioni dell'equazione sono le soluzioni di $p(x) = 0$ che non siano anche soluzioni di $q(x) = 0$. La difficoltà aumenta nel caso in cui si deve studiare la disequazione. Infatti, dovendo risolvere

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0 \quad \text{o} \quad \frac{p(x)}{q(x)} < 0$$

dobbiamo tenere in conto la regola dei segni, per cui il prodotto tra $p(x)$ e $1/q(x)$ sarà positivo se i due polinomi $p(x)$, $q(x)$ hanno lo stesso segno, mentre il prodotto sarà negativo se numeratore e denominatore hanno segno opposto. Si può procedere come spiegato nella sezione **??**. Ad esempio risolviamo la disequazione

$$\frac{3x}{5x-1} \leq \frac{2}{4-x}.$$

Prima di tutto dobbiamo semplificare l'espressione data in modo da ottenere una unica frazione. Quindi portiamo (ad esempio) la frazione scritta a destra a sinistra e sommiamo le due frazioni,

$$\frac{3x}{5x-1} - \frac{2}{4-x} = \frac{3x(4-x)-2(5x-1)}{(5x-1)(4-x)} \leq 0 \quad \text{da cui} \quad \frac{-3x^2+2x+2}{(5x-1)(4-x)} \leq 0$$

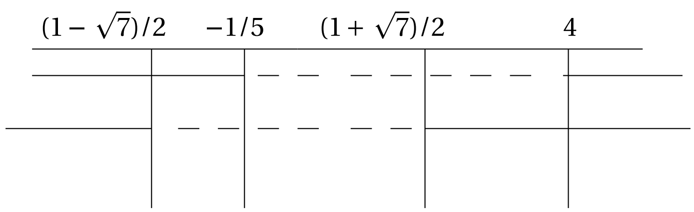
che è equivalente a

$$\frac{3x^2-2x-2}{(5x-1)(x-4)} \leq 0.$$

A questo punto risolviamo separatamente le disequazioni

$$3x^2-2x-2 \geq 0 \qquad (5x-1)(x-4) > 0;$$

la prima ha come radici $x_1 = (1-\sqrt{7})/2$, $x_2 = (1+\sqrt{7})/2$ e visto che il coefficiente di x^2 è positivo ($a = 3$) e la richiesta è di maggiore o uguale a zero, la prima disequazione è soddisfatta per $x \leq (1-\sqrt{7})/2$ e per $x \geq (1+\sqrt{7})/2$. La seconda ha come radici $x_3 = 1/5$, $x_4 = 4$, e la disequazione è soddisfatta per $x < 1/5$, $x > 4$. Riportiamo le soluzioni delle singole disequazioni sul diagramma dei segni



Visto che il segno nella disequazione è quello del minore o uguale dobbiamo scegliere gli intervalli in cui c'è una linea continua e una linea tratteggiata. Per cui la soluzione della disequazione di partenza è $(1-\sqrt{7})/2 \leq x < -1/5$ e $(1+\sqrt{7})/2 \leq x < 4$. Osservate che mentre $(1 \pm \sqrt{7})/2$ appartengono all'insieme delle soluzioni visto che annullano il numeratore, $-1/5$ e 4 non ci sono, poiché sono zeri del denominatore e una frazione non ha senso se il denominatore è nullo!

2.4.1 Esercizi.

Si risolvano le seguenti disequazioni razionali:

1. $(x+3)/(x-3) \geq 0$,

   $[x \leq -3,\ x > 3]$.

2. $(2x+5)/(x-3) \leq 0$,

$[-5/2 \leq x < 3]$.

3. $(x-4)/(2x-6) < \dfrac{1}{2}$,

$[x > 3]$.

4. $(3-x)/x > 1$,

$[0 < x < 3/2]$.

5. $(2-3x)/5 - 1/2 \geq 0$,

$[x \leq -1/6]$.

6. $3 - 11/(x+4) > 5$,

$[-19/2 < x < -4]$.

7. $2 + 1/(x-1) < 1/3$,

$[2/5 < x < 1]$.

8. $1 - (2x+1)/(x-1) > 3/4$,

$[-5/7 < x < 1]$.

9. $(x-1)/(x+1) - (x+1)/(x-1) < 2$,

$[x < -1-\sqrt{2}, -1 < x < -1+\sqrt{2}, x > 1]$.

10. $(x^2-2x)/(x^2-4x+3) < 0$,

$[0 < x < 1, 2 < x < 3]$.

11. $2 + 1/(x+3) \geq 1/(x+2)$,

$[x \leq (-5-\sqrt{3})/2, x \geq (-5+\sqrt{3})/2]$.

12. $(1+x)/x + 2/(x-2) \geq 0$,

$[x \leq -2, 0 < x \leq 1, x > 2]$.

13. $4/(x+2) < (3-x)/(x-1)$,

$[-5 < x < 2]$.

14. $(2-x)^2(x^2+2x-15)(1-x)(2x+4) > 0$

$[]$.

15. $(x^2-3x-4)/(x^2+2x-15) \leq 0$

$[]$.

2.4.2 Sistemi di Disequazioni

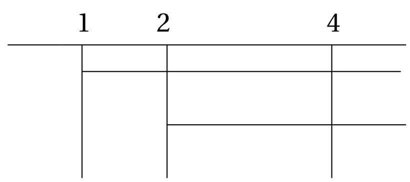
Un sistema di due (ad esempio) disequazioni si scrive così

$$\begin{cases} Disequazione1 \\ Disequazione2 \end{cases}$$

Cercare le soluzioni di un sistema di disequazioni vuol dire cercare i numeri x per cui **TUTTE** le disequazioni del sistema siano soddisfatte, quindi in questo caso non si deve applicare la regola del prodotto dei segni! Bisogna risolvere separatamente le disequazioni, quindi si riportano le soluzioni sul diagramma, ma questa volta non segneremo anche righe tratteggiate e dovremmo scegliere solo gli intervalli in cui ci sono due linee continue. Risolviamo come esempio il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

Le soluzioni della prima disequazione sono i numeri che soddisfano $1 < x < 4$ mentre le soluzioni della seconda sono $x \geq 2$, quindi i numeri che soddisfano entrambe le disequazioni sono $2 \leq x < 4$ come è evidenziato dal seguente diagramma



2.4.3 Esercizi.

Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.

1. $$\begin{cases} -(x^2 + x) \geq 0 \\ 3x + x^2 \geq 0 \end{cases}$$

   [$x = 0$]

2. $$\begin{cases} x^2(2x - 1) > 0 \\ \dfrac{3x + 2}{x^2 + 4} \leq 0 \end{cases}$$

   [Non esistono soluzioni.]

3. $$\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} > -1 \\ \dfrac{x^2 + x + 4}{4 - x^2} \geq 0 \end{cases}$$

   [$-2 < x < 2$]

4. $$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x < 30 \\ 2(x + 1) > x \end{cases}$$

$[-1 < x < 2]$

5. $\begin{cases} \dfrac{1}{6} - \dfrac{4+x}{4x^2+2x} < -\dfrac{x+2}{3x} \\ \dfrac{3x+5}{4x+1} - \dfrac{x}{3x-4} > \dfrac{x^2}{12x^2-13x-4} \end{cases}$

$[-6 < x < -5/2]$

6. $\begin{cases} \dfrac{3x+1}{2} \leq \dfrac{2+4x}{3} \\ x^2+2x > 3 \\ x-1 < 5-2x \end{cases}$

$[x < -3]$

2.5 Disequazioni con il modulo.

Un tipo di disequazioni che incontreremo spesso è quello in cui sono presenti moduli. Non c'è nulla di nuovo nella teoria da aggiungere per risolvere questo tipo di disequazioni, bisogna solo fare le cose con calma e ragionare. Risolviamo ad esempio la seguente disequazione

$$|x-1| < 2$$

Primo Metodo.
Ricordiamo che $|x-1| = x-1$ se $x-1 \geq 0$ e $|x-1| = 1-x$ se $x-1 < 0$. Quindi possiamo sciogliere la disequazione scrivendo i seguenti sistemi

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 < 2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ 1-x < 2 \end{cases}$$

Il primo sistema è risolto da $1 \leq x < 3$ il secondo da $-1 < x \leq 1$, a questo punto dobbiamo prendere l'**UNIONE** delle soluzioni trovate, poiché la nostra equazione di partenza è verificata sia in un caso che nell'altro, in conclusione la soluzione è data da $-1 < x < 3$.
Secondo Metodo.
Poiché il modulo misura quanto dista un punto dall'origine, se $|x-1| < 2$ il punto $x-1$ deve stare nel segmento di estremi -2, 2 ovvero deve essere soddisfatta

$$-2 < x-1 < 2$$

e queste due diseguaglianze sono soddisfatte proprio per x tra -1, 3 estremi esclusi.
Terzo Metodo
A volte si possono usare degli accorgimenti *ad hoc*, ad esempio se dobbiamo risolvere la disequazione

$$|x-2| \leq |x|$$

invece di considerare tutti i casi usando la definizione di modulo, conviene osservare che entrambi i membri della disequazione sono maggiori o uguali a zero (per definizione di modulo) pertanto la diseguaglianza è equivalente alla seguente

$$|x-2|^2 \leq |x|^2$$

cioè

$$x^2-4x+4 \leq x^2 \quad \text{cioè} \quad 1-x \leq 0$$

quindi la soluzione consiste in tutti i punti $x \geq 1$.

2.5.1 Esercizi.

Si risolvano le seguenti disequazioni.

1. $|3x^2 - 6x - 5| > 0$

   $[x \neq 1 \pm 2\sqrt{6}/3]$

2. $|x - 1| \leq 3x + 4$,

   $[-5/2 \leq x \leq -3/4]$

3. $\left|3x + \dfrac{x}{x-1} - 1\right| \geq 1$

   $[0 \leq x \leq 2/3]$

4. $\dfrac{|x^2 - 9|}{x^2 - 4x + 3} \geq 0$

   $[x < 1,\ x > 3]$

5. $|1 - x^2| \leq 1$

   $[-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}]$

6. $|4x + 3| \geq -3$

   $[\forall\, x \in \mathbb{R}]$

7. $|x^2 - 5x| < 4$

   $[(5 - \sqrt{41})/2 < x < 1, 4 < x < (5 + \sqrt{41})/2]$.

8. $|2x - 3| + 2 \leq |2x + 1| - 1$

   $[x \geq 5/4$

9. $|x^2 - x - 2| < 2x + 1$

   $[(3 - \sqrt{21})/2 < x \leq -1/2,\ (\sqrt{5} - 1)/2 < x < (3 + \sqrt{21})/2]$

10. $|(2x - 5)/(x + 1)| > 1$

    $[x < 4/3,\ x > 6]$.

2.6 Disequazioni irrazionali.

Una disequazione irrazionale è una disequazione in cui compaiono delle radici, per cui è scritta come segue

$$\sqrt[n]{p(x)} \leq q(x) \qquad \text{o} \qquad \sqrt[n]{p(x)} \geq q(x). \tag{2.7}$$

Inizieremo a trattare le disequazioni irrazionali con esponente n dispari.

2.6.1 Esponenti Dispari.

Questo è il caso più semplice per vari motivi. Innanzitutto se n è dispari siamo sicuri che quello che c'è scritto in (**??**) ha senso indipendentemente dal segno di $p(x)$, poiché la radice ad esponente dispari esiste per qualsiasi numero reale, sia esso positivo o negativo. Inoltre la potenza con esponente dispari conserva l'ordine dei numeri reali, cioè se partiamo da due numeri x, y con $x \le y$ allora se n è dispari $x^n \le y^n$. Per cui quando abbiamo disequazioni del tipo (**??**) con n dispari possiamo elevare alla potenza ennesima in modo da ottenere la seguente disequazione equivalente

$$p(x) \le [q(x)]^n \quad \text{o} \quad p(x) \ge [q(x)]^n$$

2.6.2 Esercizi.

Risolvere le seguenti disequazioni.

1. $\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 3x - 2} > x$

   $[1 < x < 2]$.

2. $\sqrt[3]{x(x^2 - 1)} > x - 1$

   $[x < 1/3,\ x > 1]$.

3. $x \ge \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}$

   $[x \le -1,\ x \ge 1]$

2.6.3 Esponenti Pari

La situazione si complica quando abbiamo a che fare con radici ad esponente pari. Supponiamo di dover risolvere

$$\sqrt[n]{p(x)} \le q(x);$$

innanzitutto dobbiamo imporre che l'argomento della radice sia non negativo (altrimenti la radice non ha senso!), e poi se abbiamo una disequazione come (**??**) dobbiamo di conseguenza imporre che anche $q(x) \ge 0$, (altrimenti la disequazioni non può essere soddisfatta!) a questo punto possiamo passare alla potenza ennesima; ad esempio risolviamo

$$2\sqrt{2 - x} \le 4 - x.$$

Ricordiamo che le richieste da fare sono tre:

1. radicando maggiore o uguale a zero;
2. membro di destra maggiore o uguale a zero;
3. disequazione ottenuta elevando al quadrato: $4(2 - x) \le (4 - x)^2$.

Perciò otteniamo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2 - x \ge 0 \\ 4 - x \ge 0 \\ 4(2 - x) \le (4 - x)^2 \end{cases} \qquad \text{che è equivalente a} \qquad \begin{cases} x \le 2 \\ x \le 4 \\ x^2 - 4x + 8 \ge 0. \end{cases}$$

L'ultima disequazione nel sistema è sempre soddisfatta, dunque la soluzione è $x \leq 2$. La situazione cambia se abbiamo una disequazione del tipo

$$\sqrt[n]{p(x)} \geq q(x).$$

Distinguiamo due casi in dipendenza del segno di $q(x)$

a) $q(x) \leq 0$.

In questo caso la diseguaglianza sarà sempre soddisfatta una volta che sia $p(x) \geq 0$.

b) $q(x) \geq 0$.

In questo caso dobbiamo sempre imporre che $p(x) \geq 0$ e poi dovremo elevare alla potenza ennesima e studiare $p(x) \geq q(x)^n$. I ragionamenti fatti ci portano a dover studiare i due seguenti sistemi

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) \geq [q(x)]^n \end{cases}$$

Va osservato che bisogna prendere l'unione delle soluzioni, cioè i numeri x che soddisfano il primo sistema più i numeri che soddisfano il secondo sistema. Ad esempio, risolviamo

$$2\sqrt{2-x} \geq 1-x$$

Come detto in precedenza dobbiamo risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 1-x \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 4(2-x) \geq (1-x)^2 \end{cases}$$

Da qui

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2+2x-7 \leq 0. \end{cases}$$

Il secondo sistema ha soluzioni $-1-2\sqrt{2} \leq x \leq 1$ e unendo tali soluzioni con quelle del primo, otteniamo $-1-2\sqrt{2} \leq x \leq 2$ che è la soluzione della disequazione data.

2.6.4 Esercizi.

Risolvere le seguenti disequazioni.

1. $2 \leq \sqrt{2-3x}$,

   [$x \leq -2/3$]

2. $\sqrt{x^2-4} \leq 2-x$,

   [non esistono soluzioni.]

3. $\sqrt{\dfrac{5x+2}{x+1}} < 2$,

   [$-2/5 \leq x < 0$]

4. $x-2 \leq \sqrt{\dfrac{x^3-1}{x+2}}$,

$[x \geq (2+\sqrt{22})/2]$

5. $\sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} \geq \sqrt{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)}$

$[x \geq 2]$,

6. $|x| \geq |x-1|$,

$[x \geq 1/2]$

7. $2\sqrt{2-x} < \sqrt{2}(1+3|2x-3|)$.

$[x \leq -2-2\sqrt{3},\ -2+\sqrt{3} \leq x \leq 2]$.

8. $x-8 < \sqrt{x^2-9x+14}$

$[x \geq 7]$

9. $\sqrt{x^2-2x+1} > 2-|x+4|$

$[x < -1/2]$

10. $5-x > \sqrt{x^2+6x+8}$

$[x \leq -4,\ -2 \leq x < 17/16]$

2.7 Disequazioni esponenziali e logaritmiche.

Per studiare la risoluzione di disequazioni in cui sono presenti logaritmi, è importante ricordare come il logaritmo si comporta rispetto all'ordinamento dei numeri reali, cioè ricordiamo le seguenti proprietà

$$\text{se } 0 < y < x \text{ si ha} \begin{cases} \lg_a y < \lg_a x & \text{se } a > 1 \\ \lg_a y > \lg_a x & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

cioè se la base a è maggiore di uno, il logaritmo conserva l'ordine tra i numeri, se invece $a < 1$ l'ordine viene invertito. Osservate che questa proprietà è conseguenza dell'analoga proprietà delle potenze

$$\text{se } r < s \begin{cases} a^r < a^s & \text{se } a > 1 \\ a^r > a^s & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

Queste proprietà ci aiutano nella risoluzione di disequazioni in cui appaiano esponenziali o logaritmi; ad esempio risolviamo

$$\lg_3 x < \frac{1}{2}$$

dobbiamo cercare i numeri x per cui il logaritmo in base 3 di x è minore di un mezzo. Prima di tutto dobbiamo imporre che x sia positivo affinché il logaritmo sia ben definito, quindi possiamo usare la proprietà dell'elevamento a potenza con base maggiore di uno, e scriviamo

$$\begin{cases} x > 0 \\ x = 3^{\lg_3 x} < (3)^{1/2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Quindi la soluzione è $0 < x < \sqrt{3}$.
Per vedere come le cose cambino quando la base è minore di uno, risolviamo

$$\lg_{1/3} x < \frac{1}{2}$$

in questo passando agli esponenti dobbiamo cambiare il verso della diseguaglianza ed otteniamo

$$\begin{cases} x > 0 \\ x = \frac{1}{3}^{\lg_{1/3} x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Quindi la soluzione è $x > \sqrt{3}/3$. Ragionamenti analoghi si fanno quando dobbiamo risolvere disequazioni esponenziali. Ad esempio studiamo

$$5^{2x-1} > 5^{x+2}.$$

In questo caso $a = 5 > 1$, quindi se passiamo ai logaritmi l'ordine viene conservato e possiamo scrivere

$$2x - 1 = \lg_5\left(5^{2x-1}\right) > x + 2 = \lg_5\left(5^{x+2}\right)$$

cioè $2x - 1 > x + 2$ che è soddisfatta se $x > 3$. Se invece dobbiamo risolvere

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1$$

passando agli esponenti dobbiamo cambiare il verso della disequazione per cui otteniamo

$$x = \lg_{1/2}\left(\frac{1}{2}^x\right) < 0 = \lg_{1/2}(1)$$

pertanto la soluzione è $x < 0$.

2.7.1 Esercizi.

Risolvere le seguenti disequazioni.

1. $\lg_{1/5}(x^2 + 4x) > \lg_{1/5} 5$

   $[0 < x < 2 + \sqrt{5}]$

2. $\lg_2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) \leq 1$

   $[x < 0, \text{o}\, x = 1]$

3. $\lg_3(x - 1) \leq -1$

   $[1 < x \leq 4/3]$

4. $\lg_2 x^2 > \lg_2 x$

   $[x > 1]$

5. $\lg_{10}(x^2 - 7x + 11) < 0$

   $[(7 + \sqrt{5})/2 < x < 5]$

6. $\lg_3 |x-1| > \lg_3(x+2)$,

$[-2 < x < -1/2]$

7. $\lg_5(x^2-1) > \lg_5(x+1)$,

$[x > 2]$

8. $\lg_{1/2}(x^2+2x) > \lg_{1/2}(7x-6)$,

$[2 < x < 3]$

9. $\lg_{10}\left(\frac{x+2}{x-1}\right) > 1$,

$[2 < x < 22/9]$

10. $\lg_{1/3}(x-2) + \lg_{1/3}(x+1) > \lg_{1/3}(2x^2-4)$,

$[-2 < x < -\sqrt{2}]$

11. $\lg_3(x-1) - 2\lg_3(x-1) - 2 > 0$,

$[1 < x < 10/9]$

12. $5^x > 0$,

[per ogni x]

13. $3^{1-x} > 9^{2+x}$,

$[x < -1]$

14. $10^{-x} > 100^{x-3/2}$,

$[x < 3/4]$

15. $8^{-1+x/2} > (1/4)^{x+2}$,

$[x > -2/7]$

16. $3 \cdot 2^x > 4 \cdot 3^{x+1}$,

$[x > \lg_{2/3} 4]$

17. $4^x > 2$,

$[x > 1/2.]$

18. $\left(\frac{1}{3}\right)^{(1-12x)x} > 3$

$[-1/4 < x < 1/3.]$

19. $2^{x^2+5x} < 4$

$[-4 < x < -1]$

Capitolo 3

Trigonometria.

Richiamiamo qui i principali elementi di trigonometria che saranno utili in seguito. Consideriamo la circonferenza centrata nell'origine e di raggio unitario. Per misurare gli angoli useremo i **radianti** invece dei gradi.
Ricordiamo che la misura di un angolo in radianti è pari alla lunghezza dell'arco di circonferenza intercettato dalle due semirette che formano l'angolo.
Quindi la misura in radianti dell'angolo giro (360º gradi) è pari alla lunghezza di tutta la circonferenza unitaria, cioè a 2π; mentre la misura in radianti dell'angolo piatto (180º gradi) è π. Per passare dai gradi ai radianti e viceversa basta usare le proporzioni, cioè se x_g è la misura di un angolo in gradi e x_r è la misura dello stesso angolo in radianti x_g e x_r sono legate dall'uguaglianza

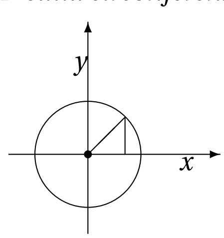
$$x_g : 360 = x_r : 2\pi \quad \text{che è equivalente a} \quad \frac{x_g}{360} = \frac{x_r}{2\pi}.$$

Nel seguente diagramma ricordiamo i valori degli angoli che più spesso useremo espressi in radianti.

$$\begin{array}{ccc} 0^\circ = 0 & 30^\circ = \dfrac{\pi}{6} & 45^\circ = \dfrac{\pi}{4} \\ 60^\circ = \dfrac{\pi}{3} & 90^\circ = \dfrac{\pi}{2} & 180^\circ = \pi \\ 270^\circ = \dfrac{3}{2}\pi & 360^\circ = 2\pi. & \end{array}$$

Per definire le principali grandezze trigonometriche fissiamo sulla circonferenza unitaria un verso di percorrenza, in modo da stabilire un ordine tra i suoi punti; il **verso positivo** che si sceglie per convenzione è quello **antiorario**. Perciò un angolo sarà maggiore di un altro se verrà intercettato dopo percorrendo la circonferenza in senso antiorario. Dato un angolo α, le prime grandezze trigonometriche da introdurre sono il seno di α (senα) e il coseno di α ($\cos\alpha$), definiti come segue.

Definizione 1. *Il* **seno** *di un angolo α è l'ordinata del punto P sulla circonferenza che sottende un angolo di misura α.*
Il **coseno** *di un angolo α è l'ascissa del punto P sulla circonferenza che sottende un angolo di misura α.*



Percorrendo la circonferenza in senso antiorario ci accorgiamo che dopo un angolo 2π ci ritroviamo al punto iniziale $\alpha = 0$, quindi tutti gli angoli del tipo α, $\alpha + 2\pi$, $\alpha + 4\pi$, $\alpha + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, rappresentano lo stesso punto sulla circonferenza, da questa osservazione segue che il seno e il coseno di un angolo soddisfano

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha, \qquad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Per $k = 1$ otteniamo 2π che è il più piccolo numero dopo il quale il seno e il coseno riassumono gli stesso valori, tale quantità è detta **periodo**. Inoltre dalla definizione seguono altre importanti proprietà

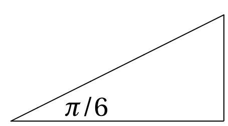
$$\begin{array}{lccl} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, & & \cos(-\alpha) & = \cos(\alpha), \\ |\sin\alpha| \le 1, & & |\cos\alpha| & \le 1 \\ |\sin\alpha| \le |\alpha|, & e & \sin\alpha & \le \alpha \ \forall\, \alpha > 0. \end{array}$$

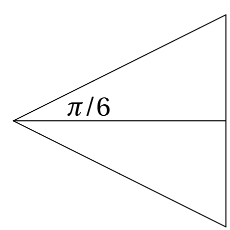
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

L'ultima proprietà è conseguenza del Teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo di cateti di lunghezza $|\sin\alpha|, |\cos\alpha|$ ricordando che l'ipotenusa ha lunghezza 1. Ricordiamo i valori di $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ negli angoli su indicati

$$\begin{array}{llll} \cos 0 = 1, & \sin 0 = 0 & \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{2}{2}} & \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\frac{\pi}{3} = 1/2 & \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\frac{\pi}{2} = 0 & \sin\frac{\pi}{2} = 1 & \cos\pi = -1 & \sin\pi = 0 \\ \cos\frac{3}{2}\pi = 0 & \sin\frac{3}{2}\pi = -1 & & \end{array}$$

I valori precedenti del seno e del coseno si possono ottenere usando le proprietà dei triangoli rettangoli; ad esempio consideriamo il primo caso.





Il triangolo a destra è il doppio di quello a sinistra e visto che gli angoli acuti del triangolo di sinistra sono di $30°, 60°$ il triangolo di destra ha tutti gli angoli uguali a $60°$, perciò è equilatero ed ha anche tutti i lati uguali. Essendo l'ipotenusa del triangolo di sinistra pari al raggio (che è lungo 1), il triangolo di destra ha tutti i lati lunghi 1. Allora il cateto più corto di quello di sinistra è lungo $1/2$ e il teorema di Pitagora implica che l'altro lato è lungo $\sqrt{3}/2$. Cioè $\mathrm{sen}(\pi/6) = 1/2$ e $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.
Nel caso di angolo $\pi/4$ basta semplicemente osservare che i due cateti hanno pari lunghezza perciò devono essere lunghi $\sqrt{2}/2$.
Ricordiamo infine le formule di addizione e duplicazione

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\sin\alpha - \cos\beta\sin\beta \\ \sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos(2\beta) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{aligned}$$

Come immediate conseguenze delle formule di addizione e sottrazione ricaviamo

$$\begin{array}{llll} (1)\ \sin(\pi+\alpha) & = -\sin\alpha, & (2)\ \sin(\pi-\alpha) & = \sin\alpha \\ (3)\ \sin(\pi/2+\alpha) & = \cos\alpha & (4)\ \sin(\pi/2-\alpha) & = \cos\alpha \\ (5)\ \cos(\pi+\alpha) & = -\cos\alpha & (6)\ \cos(\pi-\alpha) & = -\cos\alpha \\ (7)\ \cos(\pi/2+\alpha) & = -\sin\alpha & (8)\ \cos(\pi/2-\alpha) & = \sin\alpha \end{array}$$

Definizione 2. *La* **tangente** *e la* **cotangente** *di α sono date da*

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \mathrm{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{3.1}$$

segue che la tangente è ben definita per $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mentre la cotangente è ben definita per $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Come per il seno e coseno anche per la tangente e la cotangente è definito un periodo che è pari a π per cui

$$\mathrm{tg}(\alpha + k\pi) = \tan\alpha, \qquad \cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Dalle formula di addizione e sottrazione per il seno e coseno seguono le corrispondenti formule per tangente

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$
$$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$$

da cui si possono ricavare quelle per la cotangente osservando che $\cot\alpha = 1/\mathrm{tg}\alpha$.

3.0.2 Esercizi.

1. Determinare tutti i valori dell'angolo α per cui risulta

$$a)\ \sin\alpha = 0 \quad b)\ \cos\alpha = 0 \quad c)\ \sin\alpha = -1$$
$$d)\ \cos\alpha = \frac{1}{2} \quad e)\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad f)\ \cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

[Risposte: a) $\alpha = k\pi$; b) $\alpha = \pi/2+k\pi$; c) $\alpha = -\pi/2+2k\pi$; d) $\alpha = \pm\pi/3+2k\pi$; e) $\alpha = \pi/4+2k\pi, 3\pi/4+2k\pi$; f) $\alpha = \pm3\pi/4+2k\pi$.]

2. Calcolare

$$a)\ \sin 5\pi \quad b)\ \cos\frac{7}{2}\pi \quad c)\ \sin\frac{9}{2}\pi,$$
$$d)\ \sin\frac{15}{4}\pi \quad e)\ \cos\frac{19}{6}\pi \quad f)\ \cos\frac{22}{3}\pi$$

[Risposte: a) 0; b) 0; c) 1; d) $-\sqrt{2}/2$; e) $-\sqrt{3}/2$; f) $-1/2$.]

3. Dire quali tra le seguenti uguaglianze è vera

$$a)\ \mathrm{sen}(x-y) = \frac{\mathrm{sen}x}{\mathrm{sen}y}, \qquad b)\ \mathrm{sen}(x-y) = \cos x\cos y - \mathrm{sen}x\mathrm{sen}y$$
$$c)\ \mathrm{sen}(x-y) = \mathrm{sen}x - \mathrm{sen}y, \quad d)\ \mathrm{sen}(x-y) = \mathrm{sen}x\cos y - \cos x\mathrm{sen}y.$$

[Risposta: *d*)]

4. Dire quali tra le seguenti uguaglianze è vera

$$a)\ \mathrm{sen}(\pi - x) = -\mathrm{sen}x, \quad b)\ \mathrm{sen}(\pi - x) = \mathrm{sen}x$$
$$c)\ \mathrm{sen}(\pi - x) = \cos x, \quad d)\ \mathrm{sen}(\pi - x) = \mathrm{sen}x\cos x.$$

[Risposta: *b*)]

5. Dire quali tra le seguenti uguaglianze è vera

$$a)\ \cos(-x) = -\cos x, \quad b)\ \cos(x+\pi) = \cos x$$
$$c)\ \cos(-x) = \cos x, \quad d)\ \cos(x+\pi) = \sin x.$$

[Risposta: *c*)]

3.1 Equazioni e Disequazioni Trigonometriche.

Le equazioni trigonometriche più semplici sono della forma

$$\sin x = a, \qquad \cos x = a.$$

Tali equazioni non hanno soluzione se $|a| > 1$ poiché il seno e coseno hanno modulo sempre minore di 1. Invece, nel caso in cui $|a| \leq 1$, preso x_0 un angolo in cui l'equazione è soddisfatta, le soluzioni sono date da $x = x_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a causa della periodicità del seno e coseno. Quindi a differenza delle equazioni algebriche per le equazioni trigonometriche o non esistono soluzioni o ne esistono infinite. Per l'equazione

$$\tan x = a$$

si prende $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ che soddisfa l'equazione e le soluzioni sono date da $x = x_0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.1.1 Esercizi.

Risolvere le seguenti equazioni.

1. $\sin^2 x = 1$,

   $[x = \pi/2 + k\pi]$

2. $\sin x + \cos x = 0$,

   $[x = 3/4\pi + k\pi]$

3. $\sin x - \cos x = 0$

   $[x = \pi/4 + k\pi]$

4. $2\sin^2 x = 1$,

   $[x = \pm\pi/4 + k\pi]$

5. $\sin^2 x - \sin x = 0$,

   $[x = k\pi/2]$

6. $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

   $[x = \pi/6 + 2k\pi,\ 5/6\pi + k\pi,\ \pi/2 + k\pi]$

7. $\sin^2 x = \cos x - 1$,

   $[x = (1+k)\pi,\ 2/3\pi + 2k\pi,\ 4/3\pi + 2k\pi]$

8. $\sin^2 x = 2\cos x + 1$,

   $[x = \pi/2 + k\pi]$

9. $\tan^2 x - \tan x = 0$

$[x = k\pi,\ \pi/4\pi + k\pi]$

10. $\sin 2x - \cos x = 0$,

$[x = \pi/2 + k\pi,\ \pi/6 + 2k\pi,\ 5/6\pi + k\pi]$

11. $\cos 2x - \sin x = 0$,

$[x = -\pi/2 + 2k\pi,\ \pi/6 + 2k\pi,\ 5/6\pi + 2k\pi]$

12. $\sin x \cdot \cos x \cdot \tan x = 1$

[non esistono soluzioni]

3.1.2 Disequazioni.

Iniziamo sempre dalla disequazione più semplice

$$\sin x > a, \qquad \cos x > a$$

come prima osserviamo che se $a > 1$ non può esistere soluzione, se $a < -1$ la disequazione è soddisfatta per ogni x mentre se $-1 < a < 1$, posto x_0 tale che $\sin x_0 = a$, bisogna vedere dove si trova x_0 e ragionare sulla circonferenza, ad esempio nel caso della disequazione sen$x > a$ con $0 < a < 1$, se $0 \leq x_0 < \pi/2$ allora la soluzione sarà $x_0 + 2k\pi < x < \pi - x_0 + 2k\pi$, la cosa migliore è ragionare caso per caso. Ad esempio, risolviamo

$$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sappiamo che $\sin x = \sqrt{2}/2$ in $\pi/4$ e in $3/4\pi$. Allora la disequazione sarà soddisfatta se $\pi/4 + 2k\pi < x < 3/4 + 2k\pi$. Se invece dobbiamo risolvere

$$\cos x < \frac{1}{2},$$

allora, si ha $\cos x = 1/2$ se $x = \pm\pi/3$, e la soluzione è $-\pi/3 + 2k\pi < x < \pi/3 + 2k\pi$.

3.1.3 Esercizi.

Risolvere le seguenti disequazioni.

1. $$(a)\ \sin x > -1, \qquad (b)\ \sin x \leq -\frac{1}{2}, \qquad (c)\ \sin^2 x \leq \sin x$$

   [(a) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\quad (b)\ 5\pi/6 + 2k\pi \leq x \leq 7\pi/6 + 2k\pi$, $\quad (c)\ \pi(1+2k) \leq x \leq 2(k+1)\pi$.]

2. $$(a)\ 2\sin^2 x > 1, \qquad (b)\ \cos^2 x \leq 1, \qquad (c)\ \sin x \geq 0$$

   [$(a)\ \pi/4 + 2k\pi < x < 3\pi/4 + 2k\pi$, $\quad (b)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\quad (c)\ 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$.]

3. Risolvere nell'intervallo $[0, \pi]$ la disequazione

   $$\sin x < \cos x$$

   $[0 < x < \pi/4]$.

4. Risolvere nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$ la disequazione

$$4\sin x \cos x + 1 < 0$$

$[-5\pi/12 < x < -\pi/12, 7\pi/12 < x < 11\pi/12]$.

5. Risolvere nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ le disequazioni

$$(a)\, 3 - \tan^2 x \leq 0 \qquad (b)\, \tan^2 x > 1$$

$[(a)\ -\pi/3 \leq x \leq \pi/3,\ (b)\, \pi/4 < x < \pi/2.]$

6. Risolvere la disequazione

$$\sin x < \sin 2x$$

$[2k\pi < x < \pi/3 + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi < x < 5\pi/3 + 2k\pi.]$