

GLI AMMORTAMENTI

esercizi svolti

ESERCIZIO 1

Un'azienda concorda un finanziamento da parte di un istituto di credito, da rimborsarsi in 4 rate annuali posticipate. Per esigenze di programmazione pluriennale, l'ammortamento viene costruito con le seguenti caratteristiche:

- tasso di ammortamento $i = 6\%$,
- la quota capitale di ciascuna rata non supera i 100 000 euro,
- la successione delle quote capitali è crescente: ciascuna è il 110% di quella precedente.

Si calcoli l'importo massimo del finanziamento che l'azienda può ottenere a queste condizioni e si compili il piano di ammortamento con $S = S_{\max}$

$n = 4$ rate annuali $i = 6\%$

$$C_{\max} = 100\,000 = C_4$$

$$C_k = 110\% C_{k-1} = 1,1 \cdot C_{k-1} \quad X = 1,1$$

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = S \Rightarrow C_1 + 1,1 C_1 + 1,1 C_2 + 1,1 C_3 =$$

$$= C_1 + 1,1 C_1 + 1,1 (1,1 C_1) + 1,1 (1,1 C_2) =$$

$$= C_1 + 1,1 C_1 + 1,1^2 C_1 + 1,1^3 C_1 = S$$

$$C_1 (1 + 1,1 + 1,1^2 + 1,1^3) = S \quad (*)$$

$$C_4 = 1,1 C_3 = 1,1 \cdot 1,1 C_2 = 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 C_1 = (1,1)^3 C_1$$

$$C_1 = \frac{C_4}{(1,1)^3}$$

$$(*) \quad \frac{C_4}{(1,1)^3} \left(1 + 1,1 + 1,1^2 + 1,1^3 \right) = S$$

$$\frac{100.000}{(1,1)^3} \left[\frac{1 - 1,1^4}{1 - 1,1} \right] = S = 348685,20 \in$$

$$\Rightarrow S = 348685,20$$

K	D _k	C _k	I _k	R _k	E _k
0	348685.20	—	—	—	—
1	273553.72	75131.48	20921.11	96052.59	75131.48
2	190909.09	8264.63	16413.22	99057.85	157776.11
3	100000.00	90909.09	11454.55	102363.64	248685.20
4	—	100000	6000	106000	348685.20

ESERCIZIO 2

Il Mutuo Mandarino prevede il prestito di una somma di S euro da rimborsare in 6 rate trimestrali posticipate al tasso annuo $i = 3\%$, con le seguenti caratteristiche:

- le prime due rate sono di preammortamento,
- la terza e la quarta rata rimborsano ciascuna un quarto del debito iniziale,
- le ultime due rate sono uguali.

Si compili il piano di ammortamento per un prestito di $S = 10\,000$ euro.

$S = 10\,000\text{€}$ $n = 6$ rate trimestrali

$$i = 3\% \quad \Rightarrow \quad i_{1/4} = (1 + 0,03)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,7417\%$$

rate di preammortamento $\Rightarrow$ quote capitale nulle

$$C_1 = 0 \quad C_2 = 0$$

$$C_3 = C_4 = \frac{1}{4} S = \frac{1}{4} 10\,000 = 2\,500\text{€}$$

$$R_5 = R_6$$

K	D_K	C_K	I_K	R_K	$\bar{E}_K$
0	10000	-	-	-	-
1	10000	-	$10000 \cdot 0,7417\%$ 74.176	74.17	-
2	10000	-	74.17	74.17	-
3	7500	2500	74.17	2574.17	2500
4	5000	2500	55.63	2555.63	5000
5	2509.24	2490.76	37.09	2527.85	7490.76
6	-	2509.24	18.61	2527.85	10000

$$5000 = R Q_{210, 7417\%} \Rightarrow R = \frac{5000 \cdot 0,7417\%}{1 - 1,007417^{-2}}$$

ESERCIZIO 3

Determinare il numero minimo m di semestralità con le quali si può ammortizzare un debito di 12000€ a rata costante semestrale pagata posticipatamente al tasso annuo del 3% nel caso in cui la rata non possa superare l'importo di 1000€. Determinare inoltre l'ammontare delle rate.

$$S = 12000 \quad \text{rate semestrali}$$

$$i = 3\% \quad i_{1/2} = (1 + 0.03)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1.4889\% \quad R_{\max} = 1000$$

$$S = R a_{\overline{m}|i_{1/2}} \Rightarrow 12000 = 1000 a_{\overline{m}|0.014889} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{12000}{1000} = \frac{1 - 1.014889^{-m}}{0.014889} \Rightarrow 12 \cdot 0.014889 = 1 - 1.014889^{-m}$$

$$\Rightarrow 1.014889^{-m} = 1 - 12 \cdot 0.014889 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 1.014889^{-m} = \ln (1 - 12 \cdot 0.014889)$$

$\downarrow$

$$-m \ln 1.014889$$

$$u = - \frac{\ln(1 - 12 \cdot 0.014889)}{\ln 1.014889} = u = - \frac{\ln(1 - \frac{W(0)i}{R})}{\ln(1+i)}$$

$$= 13.3179$$

$$\boxed{u = 14} \Rightarrow 12000 = R a_{\overline{14}|1.4889\%} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{12000}{a_{\overline{14}|1.4889\%}} = \frac{12000 \cdot 0.014889}{1 - 1.014889^{-14}} = 955.92$$

ESERCIZIO 4

La banca S.Mat.Fin. propone mutui a rata costante oppure a quota capitale costante, al tasso fisso annuale pari a $i = 4,43\%$ e con rate posticipate mensili. Un investitore vuole accenderne uno per un importo S e della durata di 12 mensilità, sapendo di non poter pagare una rata massima superiore a $R_{\max} = 450\text{€}$.

- Qual è l'importo massimo che può farsi prestare se sceglie la tipologia a rata costante?
- Si compili la prima riga (prima rata) del corrispondente piano di ammortamento
- Qual è l'importo massimo che può farsi prestare se sceglie la tipologia a quota capitale costante?
- Si compili la prima riga (prima rata) del corrispondente piano di ammortamento.

$$i = 4.43\% \quad n = 12 \quad \text{rate mensili}$$

$$i_{1/12} = (1 + 0.0443)^{1/12} - 1 = 0.36188\%$$

$$R_{\max} = 450$$

RATA COSTANTE

$$S = R a_{\overline{n}|i} \Rightarrow S = 450 a_{\overline{12}|0.36188\%} = 5275.10$$

K	D _K	C _K	I _K	R _K	E _K
0	5275.10	-	-	-	-
1	4844.19	430.91	19.09	450	430.91

QUOTA CAPITALE COSTANTE

$$R_{max} = R_1 = C_1 + I_1 = \frac{S}{n} + Si = S \left(\frac{1}{n} + i \right)$$

$$\Rightarrow 450 = S \left(\frac{1}{12} + 0.36188\% \right) \Rightarrow S = 5175.26$$

K	D _K	C _K	I _K	R _K	E _K
0	5175.26	-	-	-	-
1	4743.99	431.27	18.73	450	431.27

ESERCIZIO 5

Banca Rossa propone, per un prestito di S euro, una tipologia di mutuo così definita: restituzione in 4 rate semestrali posticipate, al tasso annuo $i = 4\%$, secondo un piano di ammortamento non standard in cui la quota capitale di ciascuna rata è $\frac{4}{5}$ della quota capitale della rata precedente.

Si determini S e compili il piano di ammortamento, in modo che la rata di importo massimo sia esattamente di 50 000 euro.

$$i = 4\% \quad \text{rate semestrali} \quad i_{1/2} = (1 + 0,04)^{1/2} - 1 = 1,9804\%$$

$$C_k = \frac{4}{5} C_{k-1}$$

$$R_{\max} = 50000$$

$$S = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = C_1 + \frac{4}{5} C_1 + \frac{4}{5} C_2 + \frac{4}{5} C_3 =$$

$$= C_1 + \frac{4}{5} C_1 + \frac{4}{5} \left(\frac{4}{5} C_1 \right) + \frac{4}{5} \left(\frac{4}{5} C_2 \right) = C_1 + \frac{4}{5} C_1 + \left(\frac{4}{5} \right)^2 C_1 + \left(\frac{4}{5} \right)^3 C_1 =$$

$$X = \frac{4}{5} \quad = C_1 \left[1 + X + X^2 + X^3 \right] = C_1 \frac{1 - X^4}{1 - X}$$

ragione della progressione geometrica

$$R_1 = C_1 + I_1 \Rightarrow 50000 = C_1 + I_1 = (*)$$

$$S = C_1 \frac{1-X^4}{1-X} \Rightarrow C_1 = S \cdot \frac{1-X}{1-X^4} \quad I_1 = S i_{1/2}$$

$$(*) = S \frac{1-X}{1-X^4} + S i_{1/2} = S \left(\frac{1-X}{1-X^4} + i_{1/2} \right)$$

$$S = \frac{50000}{\frac{1-X}{1-X^4} + i_{1/2}} = 139447.73 \text{ €}$$

k	D_k	C_k	I_k	R_k
0	139447.73	-		
1	92209.34	47238.39	2761.61	50000
2	54418.63	37730.71	1826.10	39616.82
3	24186.06	30232.57	1077.70	31310.27
4	-	24186.06	478.98	24665.03

ESERCIZIO 6

Si consideri un individuo che vuole accendere un mutuo per una somma di S euro, da restituirsi secondo un ammortamento in 6 rate trimestrali posticipate, di cui le prime tre di preammortamento e le rimanenti tre con rata costante.

Il tasso annuo applicato è $i=7\%$ e ogni rata non può superare i 20000€. Dopo aver calcolato il capitale massimo finanziabile, si compili il piano di ammortamento corrispondente.

$$n=6 \quad \text{rate Trimestrali} \quad i=7\% \quad i_{1/4} = (1+0,07)^{1/4} - 1 = 1,7059\%$$

$$C_1 = C_2 = C_3 \quad R_1 = I_1 \quad R_2 = I_2 \quad R_3 = I_3$$

$$R_4 = R_5 = R_6 \quad R_{\max} = 20000$$

$$R_1 = I_1 = Si_{1/4}$$

$$R_2 = I_2 = Si_{1/4}$$

$$R_3 = I_3 = Si_{1/4}$$

$$R_4 = C_4 + I_4 = C_4 + Si_{1/4}$$

$$R_5 = R_4$$

$$R_6 = R_4$$

$$S = R a_{\overline{6}|i_{1/4}}$$

$$S = 20000 a_{\overline{6}|i_{1/4}}$$

$$= 58009,72 \text{ €}$$

K	D_k	C_k	I_k	R_k	E_k
0	58009.72	—	—	—	—
1	58009.72	—	989.56	989.56	—
2	58009.72	—	989.56	989.56	—
3	58009.72	—	989.56	989.56	—
4	38999.28	19010.44	989.56	20000	19010.44
5	19664.55	19334.73	665.27	20000	38345.17
6	—	19664.55	335.45	20000	58009.72

ESERCIZIO 7

Un'imprenditrice decide di accendere un mutuo per una somma di $S = 500\,000$ euro, da restituirsi in 4 rate semestrali al tasso annuo $i = 5\%$. L'ammortamento del mutuo prevede che le quote capitali delle prime due rate siano uguali tra loro, che la loro somma sia uguale alla metà del debito iniziale e che le ultime due rate sia uguali fra loro. Si compili il piano di ammortamento.

$$S = 500\,000 \text{ €} \quad n = 4 \quad \text{semestrali}$$

$$i = 5\% \Rightarrow i_{1/2} = (1 + 0,05)^{\frac{1}{2}} - 1 = 2,4695\%$$

$$C_1 = C_2 \quad C_1 + C_2 = \frac{S}{2} = \frac{500\,000}{2} = 250\,000$$

$$C_1 + C_1 = 2C_1 = 250\,000 \Rightarrow C_1 = 125\,000$$

$$C_2 = C_1 = 125\,000$$

$$R_3 = R_4$$

K	D _K	C _K	I _K	R _K	E _K
0	500 000	—	—	—	—
1	375 000	125 000	12 347.75	137 347.75	
2	250 000	125 000	9 260.65	134 260.65	
3	126 524.62	123 475.38	6 173.77	129 649.15	
4	—	126 524.62	3 124.54	129 649.15	

$$\begin{aligned}
 250000 &= R \cdot Q \cdot i_{1/2} & 250000 &= R_3 (1+i_{1/2})^{-1} + R_4 (1+i_{1/2})^{-2} \\
 R &= \frac{250000}{Q \cdot i_{1/2}} = \frac{250000 \cdot i_{1/2}}{1 - (1+i_{1/2})^{-2}} & &= R \left[(1+i_{1/2})^{-1} + (1+i_{1/2})^{-2} \right] \\
 &= 129649.15 \text{ €}
 \end{aligned}$$