TIR_ES1

Si consideri il flusso di importi monetari x = {−45,−40, 100} relativo allo scadenzario t = {0, 1, 2}, essendo i tempi espressi su base annua.

Calcolare il tasso interno di rendimento su base annua dell'operazione finanziaria assegnata. Determinare inoltre la variazione Δx_0 che deve subire l'importo x_0 affinché il tasso interno di rendimento dell'operazione finanziaria $\{x_0 + \Delta x_0, x_1, x_2\}$ risulti uguale al 10%.

$N = 1$ ipotesi corollario verificata

$45 + 40 = 85 < 100 \Rightarrow v^* < 1$

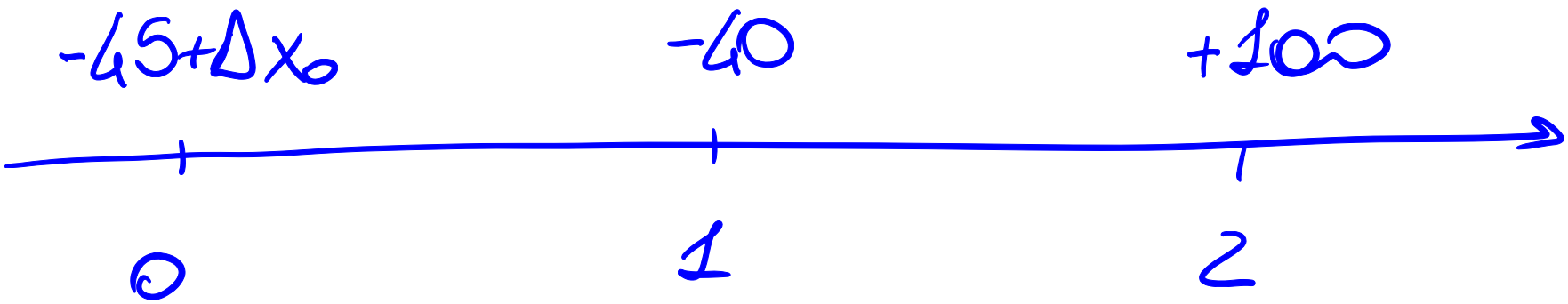
$\boxed{\text{equazione del TIR}}$

$$\underset{c}{-45} \underset{b}{-40}\, v^* + \underset{a}{100}\, v^{*2} = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$v^*_{1,2} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 + 4 \cdot 100 \cdot 45}}{200} = \begin{cases} -0.5 & \text{non accettabile} \\ 0.9 \end{cases}$$

$$v^* = 0.9 \Rightarrow i^* = \frac{1}{0.9} - 1 = 11,11\%$$

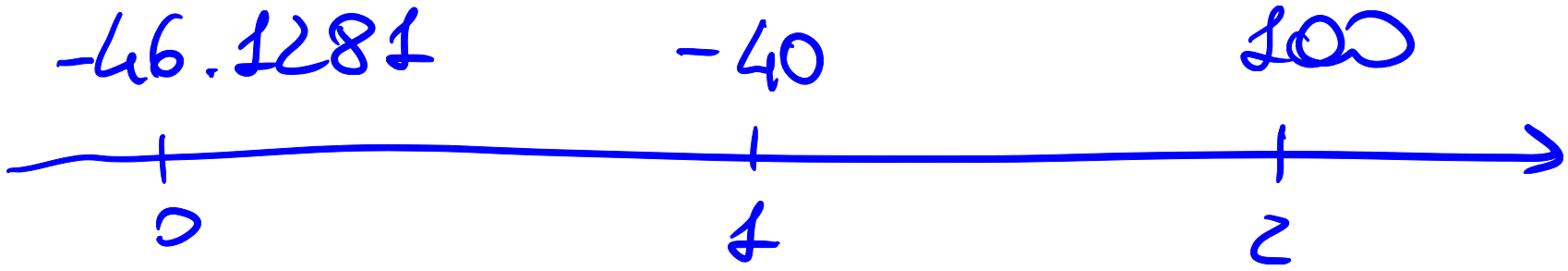


$$TIR = 10\%$$

$$-45 + \Delta x_0 - 40(1+0.1)^{-1} + 100(1+0.1)^{-2} = 0$$

$$\Delta x_0 = 45 + 40\ 1.1^{-1} - 100\ 1.1^{-2} = -1.281$$

La nuova operazione avrà come importo in $t_0 = 0$ $\quad -45 - 1.281 = -46.1281$



È diminuito il tasso di rendimento quindi è aumentato l'esborso iniziale

TIR_ES2

Determinare il tasso interno di rendimento i su base annua dell'operazione finanziaria $\{-92, 3, 95\} = \{0, 0.5, 1\}$ essendo il tempo misurato in anni.

Determinare inoltre la quantità x che bisogna sommare all'ultima posta per ottenere un tasso interno di rendimento annuo del 4%.

TIR_ES3

Sia dato un titolo a cedola fissa x di valore facciale C = 100 euro, vita a scadenza di 10 anni, cedola I= 4 euro e quotato alla pari. Calcolare il tasso interno di rendimento nei seguenti casi:

(a) cedola annua,

(b) cedola semestrale,

(c) cedola trimestrale.

$C = 100 \qquad I = 4 \qquad j = \frac{I}{C} = \frac{4}{100} = 4\%$

$P = C = 100 \qquad TIR = j$

(a) $j = 4\% \qquad TIR = 4\%$

(b) $j = 4\% \qquad TIR_{1/2} = 4\% \qquad TIR = (1+0{,}04)^2 - 1 =$

$= 8.16\%$

(c) $j = 4\%$ $TIR_{1/4} = 4\%$ $TIR = (1+0{,}04)^4 - 1 =$

$= 16.986\%$

TIR_ES4

Sia dato un titolo a cedola fissa x di valore nominale 100 euro, vita a scadenza 7 anni, cedola annuale e quotato alla pari. Sapendo che il T.I.R. di x è uguale a 12.73%, calcolare la cedola I del titolo e il valore attuale rispetto a tale tasso.

Il titolo quota alla pari $\Rightarrow$ il tasso cedolare è uguale al TIR

$$j = 12{,}73\% \Rightarrow I = 12.73\% \, 100 = 12.73€$$

$$W(0) = 100$$

TIR_ES5

Sia dato un titolo a cedola fissa x di valore facciale 120 euro, vita a scadenza 10 anni, cedola annuale di 12.5 euro e quotato alla pari. Calcolarne il T.I.R. ed il valore attuale relativamente tale tasso.

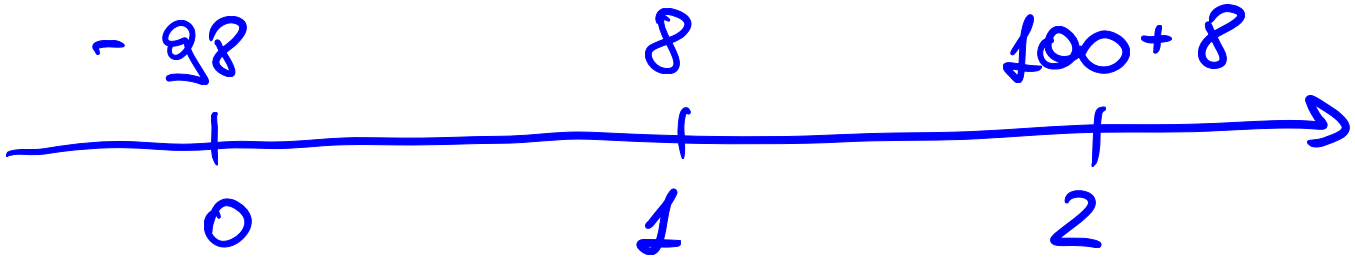
TIR_ES6

Sia dato il flusso di importi monetari $x = \{x_0, x_1, x_2\}$, esigibili secondo lo scadenzario $t = \{0, 1, 2\}$, ove $x=\{-11.5,13,-1\}$.

Calcolare il T.I.R. i dell'operazione finanziaria x/t. Determinare inoltre l'importo Δx_0 che bisogna sommare ad x_0 affinché il T.I.R. dell'operazione $\{x_0 + \Delta x_0, x_1, x_2\}/t$ risulti uguale al 6%.

TIR_ES7

Sia dato un titolo a cedola fissa x di valore nominale 100 euro, vita a scadenza m = 2 anni, cedola annuale dell'8% nominale e prezzo P = 98 euro. Calcolarne il T.I.R. i e il valore attuale W(0, x) secondo la legge esponenziale individuata dal T.I.R.; determinare inoltre la quantità P di cui bisogna decrementare il prezzo affinché il T.I.R. risulti uguale al 10%.



$J = 8\%$ $\qquad I = 8\% \cdot 100 = 8$

$$-98 + 8v^* + 108v^{*2} = 0 \qquad v^*_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 108 \cdot 98}}{216}$$

$$v^* = 0{,}9163 \qquad i = \frac{1}{0{,}9163} - 1 = 9{,}1391\%$$

$$W(0,x) = 98€$$

$$-98 + \Delta P + 8(1+0.1)^{-1} + 108(1+0.1)^{-2} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta P = 98 - 8 \cdot 1.1^{-1} - 108\ 1.1^{-2} = 1.4711$$

Il nuovo prezzo sarà

$$P = -98 + 1.4711 = -96.53€$$

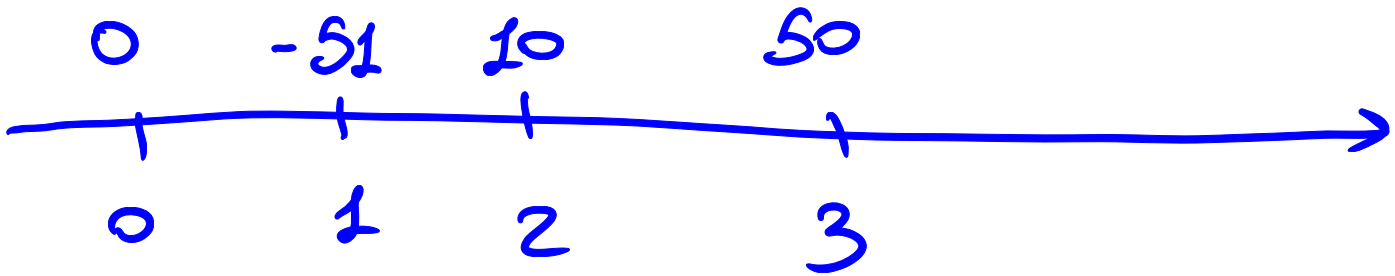
Potevamo anche calcolare direttamente il nuovo prezzo:

$$P = 8(1+0.1)^{-1} + 108(1+0.1)^{-2} = 96.53€$$

TIR_ES8

Sia dato il flusso di importi monetari $x = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, esigibili secondo lo scadenzario $t = \{0,1,2,3\}$, ove $x = \{0,-51,10,50\}$.

Calcolare il T.I.R. i dell'operazione finanziaria x/t. Determinare inoltre l'importo x_0 che bisogna sommare ad x_0 affinché il T.I.R. dell'operazione $\{x_0+\Delta x_0, x_1, x_2, x_3\}/t$ risulti uguale all'8%.



Per la proprietà invariantiva l'operazione è equa in ogni istante. Scrivo l'equazione del TIR al tempo 1.

$$-51 + 10\,v^* + 50\,v^{*2} = 0$$

$$v^*_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 50 \cdot 51}}{100} = \begin{cases} 0.91489 \\ -1.1149 \end{cases}$$

$$i^* = \frac{1}{0.91489} - 1 = 9.3029\%$$

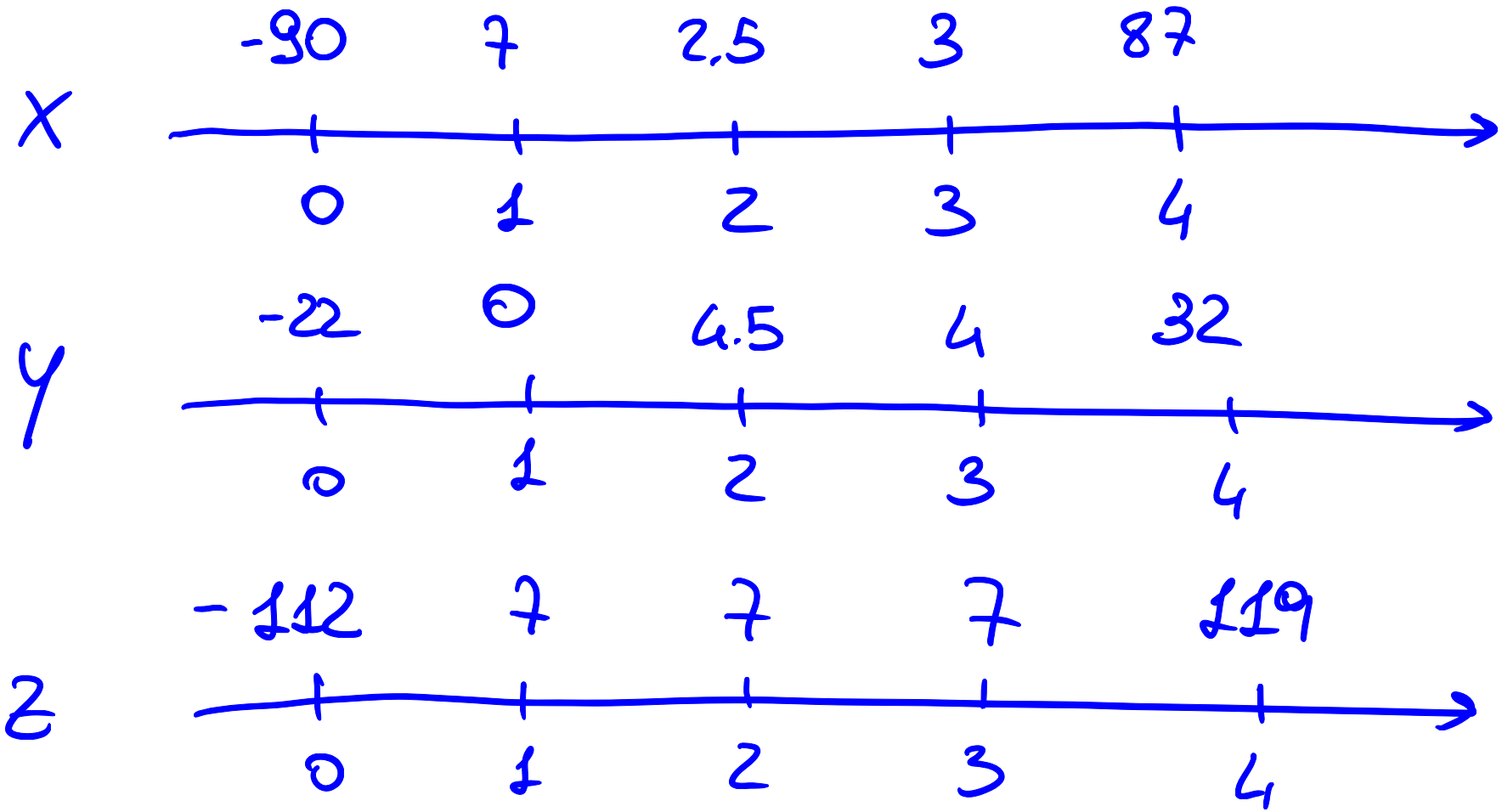
TIR_ES9

Si consideri un mercato in cui sono presenti al tempo $t_0 = 0$ i seguenti titoli:

- un titolo x = {7, 2.5, 3, 87}/t al prezzo di 90 euro,
- un titolo y = {0, 4.5, 4, 32}/t al prezzo di 22 euro,

ove t = {1, 2, 3, 4} anni.

Si determini il tasso interno di rendimento i del titolo z composto dalla somma del titolo x con il titolo y. Si determini inoltre il valore attuale di z secondo la legge esponenziale individuata dal t.i.r. i.



cedola $I = 7$ $\Rightarrow$ $119 = C + I = C + 7$

$$\Rightarrow C = 119 - 7 = 112$$

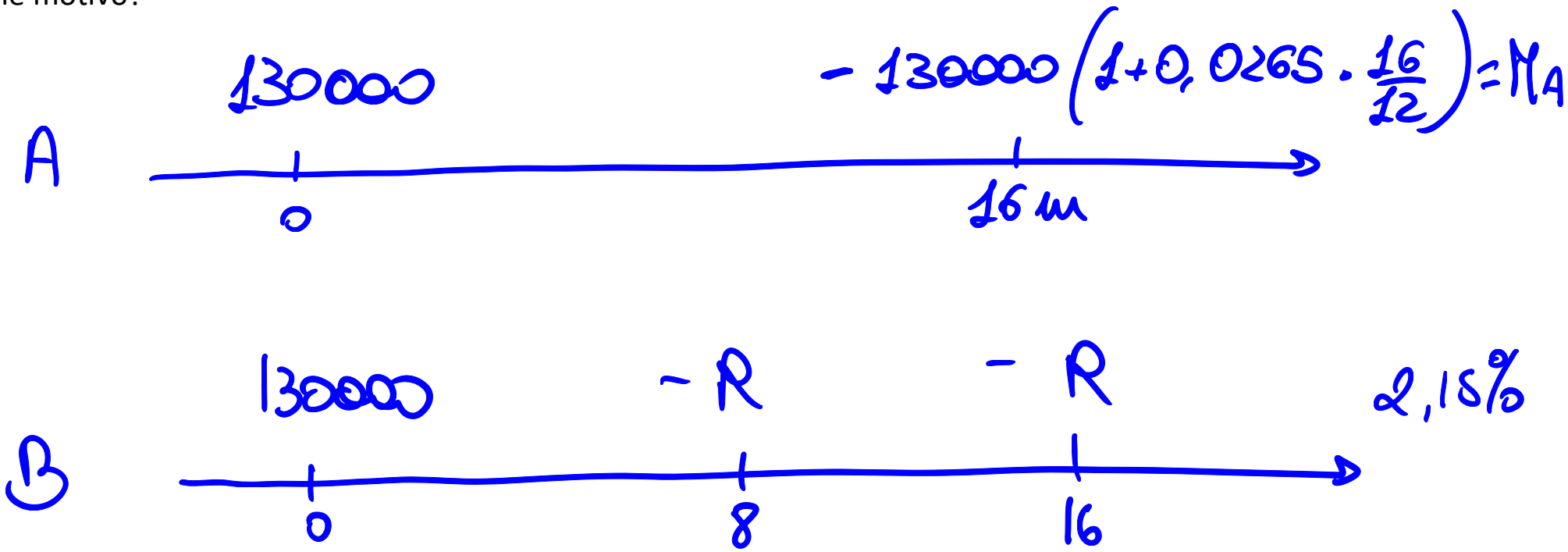
il titolo quota alla pari $\Rightarrow$ il TIR è uguale al tasso cedolare

$$i^* = J = \frac{I}{C} = \frac{7}{112} = 6.25\%$$

TIR_ES10

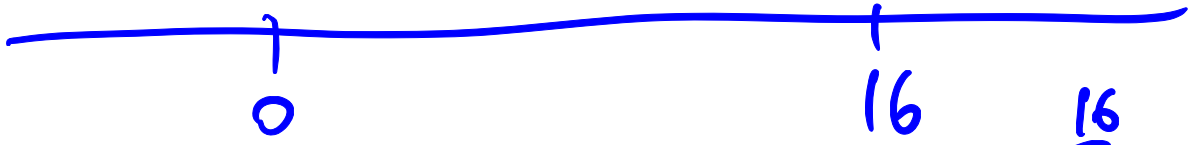
Una Banca riceve un'identica richiesta di finanziamento da due imprese con lo stesso merito creditizio, di importo pari a S = 130 000 euro. La prima impresa (A) propone di rimborsare il finanziamento in un'unica soluzione, dopo 16 mesi, al tasso annuo lineare del 2,65%. La seconda impresa (B) propone di rimborsare il finanziamento in due rate uguali, pagabili dopo 8 e 16 mesi, calcolate con una legge esponenziale di tasso annuo 2,15%. Si determinino i tassi interni di rendimento delle due operazioni, esprimendoli in forma percentuale e su base annua, e la rata che l'impresa B propone di pagare.

Per motivi di bilancio, la Banca può scegliere di finanziare una sola delle due imprese. Quale sceglierà, e per quale motivo?



$$M_A = 130\,000\left(1+0{,}0265\cdot\frac{16}{12}\right) = 134\,593{,}33\,€$$

per calcolare il TIR



$$130\,000 - 134\,593{,}33\left(1+i_A^*\right)^{-\frac{16}{12}} = 0$$

$$130\,000 = 134\,593{,}33\left(1+i_A^*\right)^{-16/12}$$

$$\frac{130\,000}{134\,593{,}33} = \left(1+i_A^*\right)^{-\frac{16}{12}} \Rightarrow \left(\frac{130000}{134593{,}33}\right)^{-\frac{12}{16}} = 1+i_A^*$$

$$i_A^* = \left(\frac{134593{,}33}{130\,000}\right)^{\frac{12}{16}} - 1$$

Il TIR dell'operazione B è proprio 2,15%

Per calcolare la rata R:

$$130\,000 = R\left(1+0{,}0215\right)^{-\frac{8}{12}} + R\left(1+0{,}0215\right)^{-\frac{16}{12}}$$

$$130\,000 = R\left[1.0215^{-\frac{8}{12}} + 1.0215^{-\frac{16}{12}}\right]$$

$$R = \frac{130\,000}{1.0215^{-\frac{8}{12}} + 1.0215^{-\frac{16}{12}}}$$

Per la Banca è un'operazione di investimento e sceglierà l'operazione con TIR maggiore

TIR_ES11

Sia dato un contratto finanziario caratterizzato da un flusso di pagamenti $x = \{50, 38, -100\}$ euro, esigibili ai tempi $t = \{0, 1, 2\}$ anni. Calcolarne il tasso interno di rendimento i ed esprimerlo in forma percentuale e su base annua.

Determinare inoltre l'importo Δx_0 che bisogna sommare al primo pagamento per ottenere un contratto con tasso interno di rendimento del 8%.

TIR_ES12

Calcolare il tasso interno di rendimento i del contratto finanziario:

x/t = {−85, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 93}/{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4}

essendo il tempo espresso in anni. Calcolare quindi il valore residuo del contratto nell'istante t* = 0.75 anni in base alla legge esponenziale individuata da i .

$$93 = C + I = C + 8 \Rightarrow C = 93 - 8 = 85$$

il Titolo quota alla pari => il TIR è uguale al tasso cedolare

$$i^*_{1/2} = \frac{I}{C} = \frac{8}{85} = 9.4118\%$$ è semestrale

$$i^* = (1 + 0.94118)^2 - 1 = 19.7093\%$$

TIR_ES13

Si consideri il contratto finanziario $x/t = \{x_0,25,31\}/\{0,1,2\}$ essendo il tempo espresso in semestri. Determinare l'importo x_0 tale che il tasso interno di rendimento del contratto risulti non inferiore al 9% (annuo).

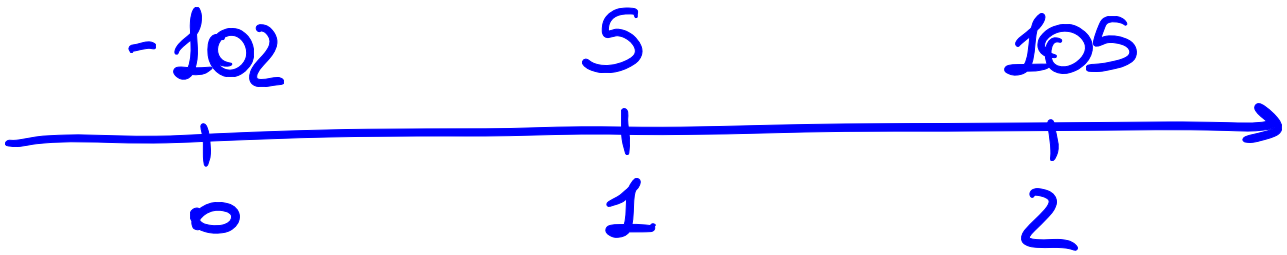
TIR_ES14

Si consideri il contratto finanziario $x/t = \{-55, 10, 50\}/\{0, 0.5, t_2\}$ essendo il tempo espresso in anni. Determinare t_2 in modo che il contratto abbia un tasso interno di rendimento $i = 9\%$.

TIR_ES15

In t = 0 sul mercato è presente un titolo x ={-102, 5, 105} sullo scadenzario t={0, 1, 2} anni.

1) Senza fare calcoli dire se il TIR dell'operazione sarà minore o maggiore del 5%;
2) determinare il TIR di x;
3) qual è il valore dell'operazione al tempo 2 al tasso di interesse uguale al TIR?
4) qual è il prezzo P che deve avere il titolo affinché il TIR di x sia uguale al 3%?
5) quale deve essere la cedola I affinché il prezzo del titolo sia uguale a 100 e il TIR sia uguale al 4%?



1) $P = 102$ $C = 100$ $P > C$ il titolo quota sopra la pari $\Rightarrow$ il TIR sarà minore del tasso cedolare

2) eq. del TIR $-102 + 5v^* + 105v^{*2} = 0$

$$v^*_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 105 \cdot 102}}{210} = \begin{cases} -1.01 \\ 0.9621 \end{cases}$$

$$i^* = \frac{1}{0.9621} - 1 = 3.9405\% \quad (< 5\%)$$

3) L'operazione è equa $\Rightarrow$ il suo valore è uguale a zero. Per la proprietà invariantiva è equa in qualunque istante, quindi anche $t=2$ $\Rightarrow$ il valore in $t=2$ è uguale a 0

4) $$P = 5(1+0.03)^{-1} + 105(1+0.03)^{-2} = 103.83€$$

5) Il titolo quota alla pari $\rightarrow$ $J = i^*$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $J = 4\%$ $\Rightarrow$ $I = 4\% \, 100 = 4€$

TIR_ES16

Il signor Rossi chiede in prestito a Banca Verde 10 000 euro, da restituirsi dopo un anno e 3 mesi con un interesse di 840 euro. Si calcolino il tasso di interesse periodale j e il tasso interno di rendimento i* in base annua dell'operazione.

Banca Blu è disponibile a prestare la stessa somma per lo stesso periodo e applica un tasso di interesse annuo semplice del 7.1%. Calcolare il tasso di interesse periodale j_B e il tasso interno di rendimento i^*_B in base annua dell'operazione proposta da Banca Blu.

Quale banca sceglierà il sig. Rossi, e perché?

$C = 10000 \in \qquad I = 840 \in \qquad \tau = 1 + \frac{3}{12} = 1.25$

$$j = \frac{I}{C} = \frac{840}{10000} = 8.4\%$$

il TIR è il tasso equivalente al periodale

$$i^* = (1 + 0.084)^{1/1.25} - 1 = 6.6654\%$$

Potevamo calcolare il TIR anche risolvendo l'eq.

$$10000 - 10840\,(1+i^*)^{-1.25} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10000}{10840} = (1+i^*)^{-1.25} \Rightarrow 1+i^* = \left(\frac{10000}{10840}\right)^{-\frac{1}{1.25}}$$

$$\Rightarrow i^* = \left(\frac{10840}{10000}\right)^{\frac{1}{1.25}} - 1 = (1.084)^{\frac{1}{1.25}} - 1$$

Il montante di 10000€ al tasso $i = 7.1\%$ semplice è

$$M = 10000\,(1+0.071)^{1.25} = 10887.50$$

il TIR i_B^* è soluzione dell'equazione:

$$10\,000 - 10887.50\left(1+i_B^*\right)^{-1.25} = 0$$

$$10000 = 10887.80\left(1+i_B^*\right)^{-1.25}$$

$$\frac{10000}{10887.5} = \left(1+i_B^*\right)^{-1.25} \Rightarrow 1+i_B^* = \left(\frac{10000}{10887.5}\right)^{-\frac{1}{1.25}}$$

$$\Rightarrow i_B^* = \left(\frac{10887.80}{10000}\right)^{\frac{1}{1.25}} - 1 = 7.0391$$

Per il sig. Rossi è un'operazione di finanziamento e sceglierà quindi quella con TIR più basso, cioè la banca Verde

TIR_ES17

Una banca propone in prestito 15 000 euro a un imprenditore, da restituirsi dopo T anni con un interesse di 5 000 euro. Si determini T, sapendo che il tasso annuo composto del prestito è i = 4%.

Un'altra banca propone in prestito la stessa somma per T' anni, al tasso annuo semplice i' = 5%. Determinare T' in modo che l'importo che l'imprenditore dovrà restituire sarà lo stesso del prestito proposto dalla prima banca.

Si indichi infine a quale delle due banche si rivolgerà l'imprenditore.

TIR_ES18

Nel mercato secondario dei titoli di Stato, il BTP con vita residua un anno e cedola semestrale del 4% nominale annuo quota 98.3 per ogni 100 euro di nominale. Il Bund (titolo di Stato della Repubblica Federale Tedesca analogo al BTP) con stessa vita residua e cedola semestrale del 2% nominale annuo quota 100:5 per ogni 100 euro di nominale.

Si calcolino i tassi interni di rendimento dei due titoli e lo spread fra i due, esprimendo i tassi in forma percentuale e in base annua e lo spread in punti base (cfr. 100 p.b. = 1%).

TIR_ES19

Un investitore acquista un portafoglio di titoli di Stato del valore complessivo di 29 000 euro; dopo 6 mesi vende metà del portafoglio ricavando 15 000 euro; e dopo altri 6 mesi liquida la parte rimanente portafoglio ricavando 15 200 euro.

Si calcoli il tasso interno di rendimento dell'operazione finanziaria complessiva (investimento iniziale e flussi di cassa successivi), esprimendolo in forma percentuale e su base annua.

TIR_ES20

L'amministratore delegato di un'azienda prevede di avere i seguenti movimenti finanziari legati alla attività aziendale: un'entrata immediata di 100 000 euro, un'uscita di 60 000 euro fra sei mesi e un'ulteriore uscita di 51 000 euro alla fine dell'anno. Si calcoli il tasso interno i* di rendimento dell'attività dell'azienda e lo si esprima in forma percentuale e in base annua. Alla fine del quarto mese, l'amministratore delegato viene a sapere che avrà un'entrata aggiuntiva imprevista di 2400 euro e può pertanto programmare ulteriore uscita U8 alla fine dell'ottavo mese. Si determini l'importo di tale ulteriore uscita, in modo che non cambi il tasso interno di rendimento dell'attività aziendale così modificata.

DA SISTEMARE

ESERCIZIO

Sia dato un titolo a cedola fissa x di valore nominale 100 euro, vita a scadenza 7 anni, cedola annuale e quotato alla pari. Sapendo che il T.I.R. di x è uguale a 12.73%, calcolare la cedola C del titolo e il valore attuale rispetto a tale tasso.

ESERCIZIO

Sia dato il flusso di importi monetari $x = \{x_0, x_1, x_2\}$, esigibili secondo lo scadenzario $t = \{0,1,2\}$, ove:

$x = \{-45,-40,100\}$

Calcolare il T.I.R. i^* dell'operazione finanziaria x/t. Determinare inoltre l'importo Δx_0 che bisogna sommare ad x_0 affinché il T.I.R. dell'operazione $\{\Delta x_0 + x_0, x_1, x_2\} / t$ risulti uguale al 12%.

ESERCIZIO

Si consideri un mercato in cui sono presenti al tempo t0 = 0 i seguenti titoli:

- un titolo x = {7, 2.5, 3, 87} / t al prezzo di 90 euro,
- un titolo y = {0, 4.5, 4, 32} / t al prezzo di 22 euro,

ove t = {1, 2, 3, 4} anni.

Si determini il tasso interno di rendimento i del titolo z composto dalla somma del titolo x con il titolo y. Si determini inoltre il valore attuale di z secondo la legge esponenziale individuata dal t.i.r. i.

ESERCIZIO

Una banca propone ad un imprenditore un finanziamento di S0 = 100 000 euro, da restituirsi in un'unica soluzione dopo T = 4 anni, con gli interessi calcolati al tasso annuo lineare del 9.5%. L'impresa obietta che il tasso è superiore al massimo previsto dalla normativa vigente, che prevede che il tasso di interesse annuo composto per questo tipo di finanziamenti non possa superare il 9% annuo. Si calcoli il tasso di interesse annuo composto i* del finanziamento proposto e si determini se l'impresa ha ragione, motivando la risposta.

Indipendentemente dall'esito della verifica precedente, le due parti non riescono a mettersi d'accordo sulle condizioni del finanziamento, che vengono allora modificate come segue: stesso importo, stessa durata, ma interessi calcolati in modo composto al tasso massimo previsto dalla normativa. In riferimento a questa nuova proposta, si calcoli l'interesse I che l'impresa dovrà corrispondere alla scadenza.