
Il Tasso Interno di Rendimento (TIR)

Operazioni eque

Se è:

$$W(t; x) = 0$$

l'operazione finanziaria x si dice *equa*, al tempo t , conformemente alla legge esponenziale adottata. L'equità caratterizza quindi un'operazione di scambio “in equilibrio”, nella quale il valore delle somme incassate è uguale al valore delle somme pagate.

Affinchè l'operazione x sia equa è necessario che almeno uno degli importi componenti x_k abbia segno diverso dagli altri.

Proprietà funzionali della legge esponenziale

Proprietà invariante

Se un'operazione finanziaria è equa all'istante t secondo una assegnata legge esponenziale, lo è in qualsiasi altro istante.

Proprietà additiva

Se due operazioni finanziarie sono eque in un medesimo istante, conformemente a una stessa legge esponenziale, anche l'operazione finanziaria somma è equa allo stesso istante, secondo la stessa legge esponenziale.

Proprietà di uniformità nel tempo

Se un'operazione finanziaria è equa all'istante t secondo una assegnata legge esponenziale, l'operazione avente tutte le scadenze traslate di un intervallo di lunghezza τ è equa nell'istante $t + \tau$ conformemente alla stessa legge.

Scindibilità

La proprietà invariantiva e la proprietà additiva possono essere riunite per definire la:

Proprietà di scindibilità

La somma di due operazioni eque in due istanti diversi secondo una medesima legge esponenziale, è un'operazione equa, secondo la stessa legge, in un qualsiasi istante.

Scindibilità

La proprietà di scindibilità equivale alla seguente proprietà dei fattori di sconto:

- comunque assegnati gli istanti di tempo t_0, t_1 e t_2 tali che $t_0 \leq t_1 \leq t_2$, si ha:

$$v(t_0, t_2) = v(t_0, t_1) v(t_1, t_2)$$

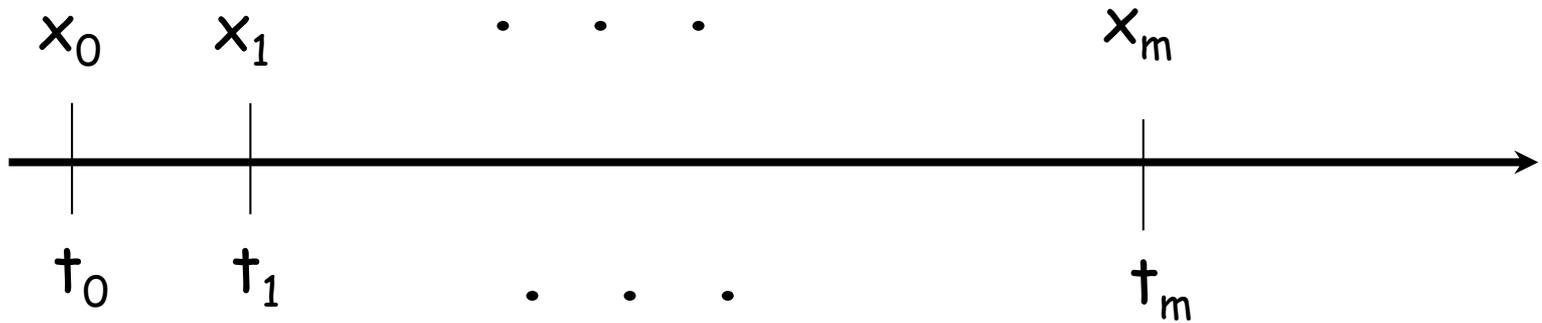
- comunque assegnati gli istanti di tempo t e $t' = t + \tau$, con $\tau \geq 0$, si ha:

$$v(t, t') = v(\tau)$$

In una legge uniforme il fattore di sconto dipende solamente dalla lunghezza dell'intervallo di attualizzazione e non dall'istante iniziale dell'intervallo.

Definizione

Data l'operazione finanziaria $\underline{x/t}$:

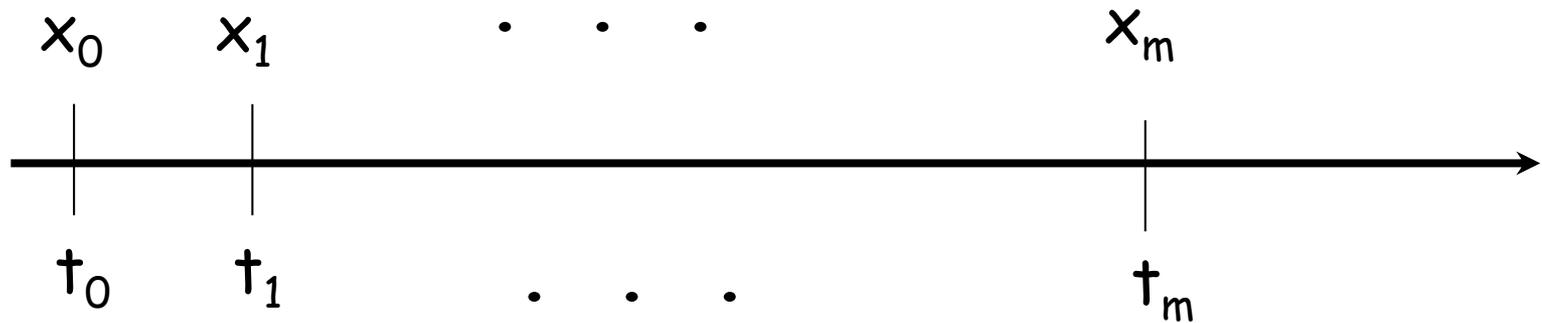


L'operazione è equa se:

$$x_0 + \sum_{k=1}^m x_k (1 + i)^{-(t_k - t_0)} = 0$$

Definizione

Data l'operazione finanziaria $\underline{x/t}$:



Tasso Interno di Rendimento (TIR): tasso di interesse della legge esponenziale conformemente alla quale l'operazione risulta equa.

Il TIR è soluzione dell'equazione:

$$\sum_{k=0}^m x_k (1 + i^*)^{-(t_k - t_0)} = 0$$

Semplifichiamo

$$\sum_{k=0}^m x_k (1 + i^*)^{-(t_k - t_0)} = 0$$

Poniamo $t_0=0$

$$\sum_{k=0}^m x_k (1 + i^*)^{-t_k} = 0$$

Se assumiamo pagamenti periodici (ad esempio, annuali) $t_k=k$

$$\sum_{k=0}^m x_k (1 + i^*)^{-k} = 0$$

Semplificazioni

sostituiamo $v = 1/(1+i)$

$$(1 + i^*)^{-k} = v^k$$

abbiamo l'equazione algebrica di grado m nell'incognita v :

$$\sum_{k=0}^m x_k (1 + i^*)^{-k} = \sum_{k=0}^m x_k v^k = 0$$

Significatività

La soluzione che cerchiamo rappresenta un fattore di sconto.
Affinché la soluzione dell'eq. del T.I.R. abbia significato finanziario deve risultare $0 < v < 1$ cioè:

- la soluzione dell'equazione deve essere unica;
- la soluzione deve essere un numero reale positivo;
- la soluzione deve essere minore di 1.

Teorema fondamentale dell'algebra

Sia:

$$p_m(v) = \sum_{k=0}^m x_k v^k$$

$r_i, i=1, \dots, h$: radici del polinomio $p_m(v)$, in generale numeri complessi
 n_i : molteplicità di r_i

Si ha che:

$$\sum_{k=0}^m x_k v^k = x_m (v - r_1)^{n_1} (v - r_2)^{n_2} \dots (v - r_h)^{n_h}$$

$$n_1 + n_2 \dots + n_h = m$$

Esistenza e unicità

Teorema di Cartesio

Sia N il numero delle variazioni nella successione dei segni dei coefficienti di $p_m(v)$, e sia h il numero delle sue radici positive. Allora $N - h$ è un numero pari positivo o nullo.

$N=0 \rightarrow h=0$: non esistono radici positive

$N=1 \rightarrow h=1$: esiste una sola radice positiva

Corollario

Condizione sufficiente affinché l'equazione $p_m(v)=0$ ammetta un'unica soluzione positiva è che gli importi del flusso \underline{x} cambino segno una sola volta.

Significatività finanziaria

$$v = \frac{1}{1+i}$$

$$i = \frac{1}{v} - 1$$

Il corollario al teorema di Cartesio garantisce che la soluzione sia unica e che sia un un numero reale positivo.

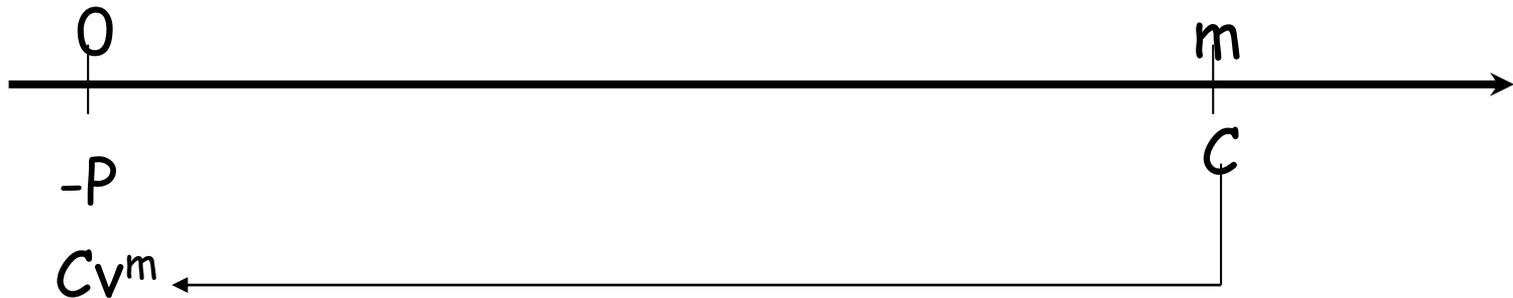
Vediamo quali sono le condizione che assicurano che sia $v < 1$

TIR di un titolo a cedola nulla

P: prezzo di acquisto

C: valore facciale

m: scadenza

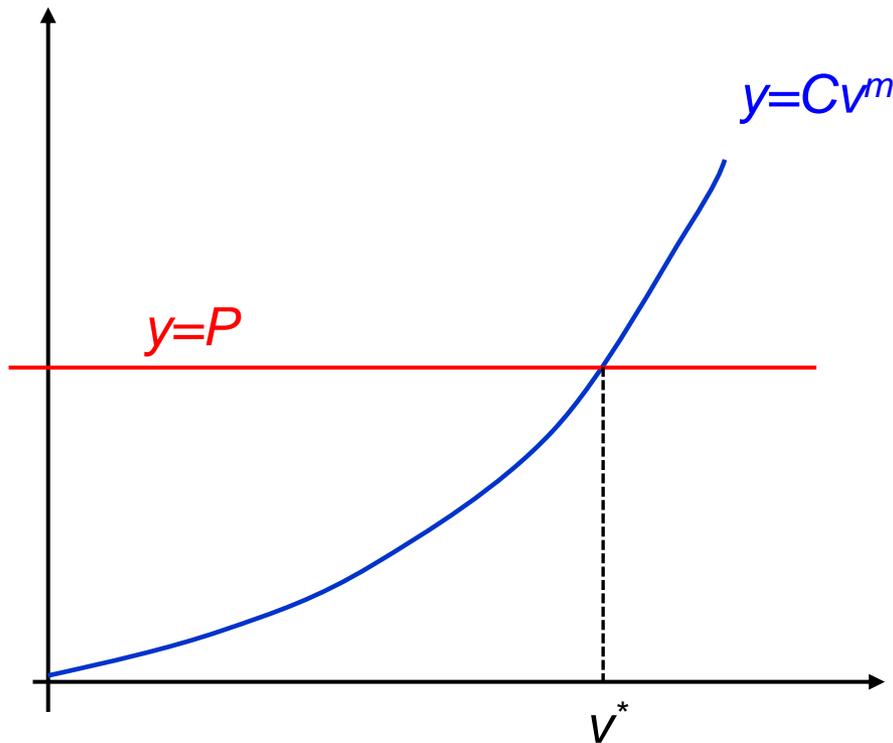


$$\sum_{k=0}^m x_k v^k = 0 \Leftrightarrow -P + Cv^m = 0$$

TIR di un titolo a cedola nulla

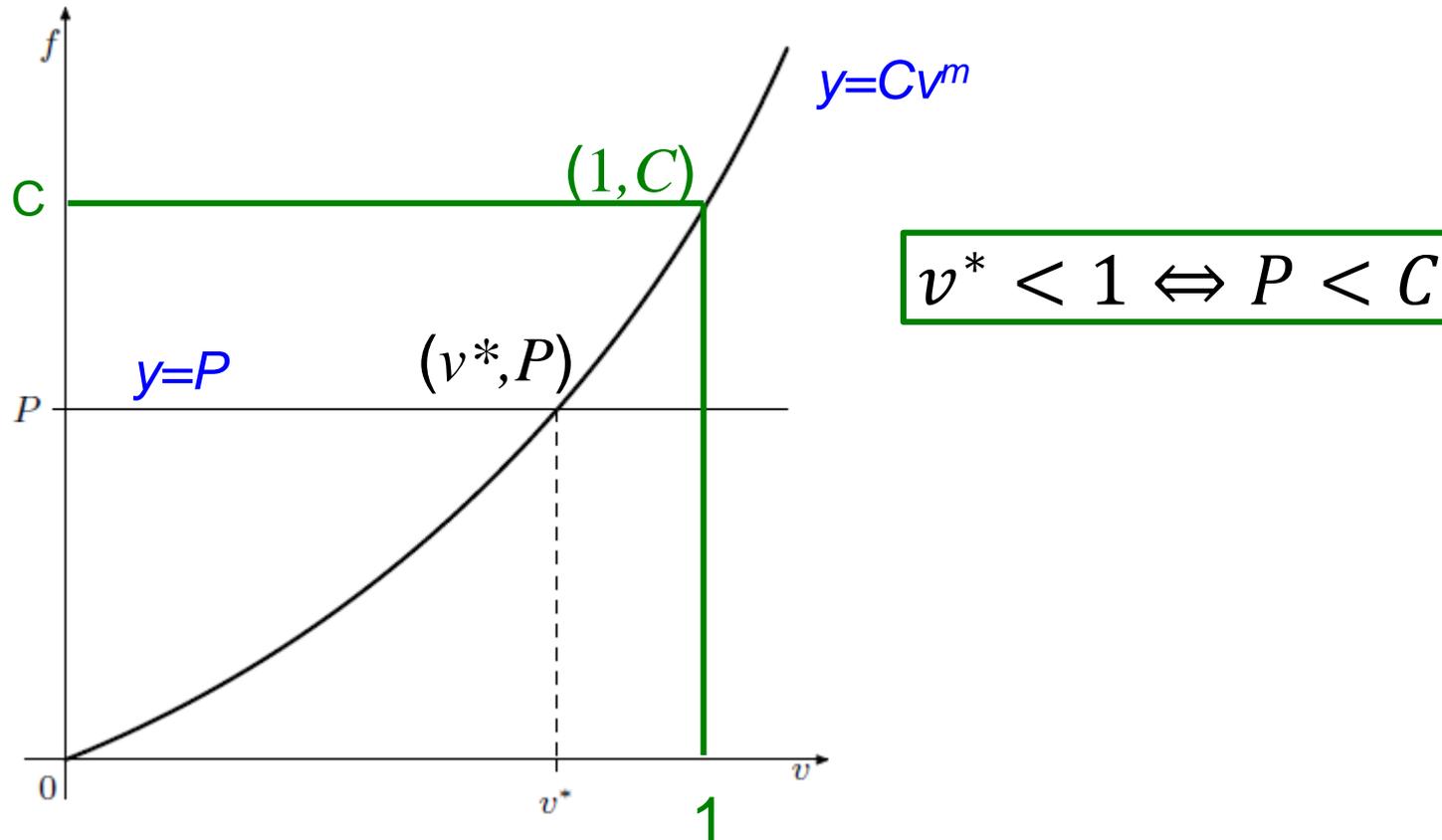
$$f(v) = -P + Cv^m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = P \\ y = Cv^m \end{cases}$$

Graficamente:



Significatività finanziaria

$$i^* > 0 \Leftrightarrow 0 < v^* < 1$$

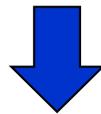


TIR di un'operazione di investimento

Acquisto in 0 al prezzo P di un flusso \underline{x} di m pagamenti:

$$P = \sum_{k=1}^m x_k v^k$$

$$f(v) = \sum_{k=1}^m x_k v^k$$



$$\sum_{k=0}^m x_k v^k = 0 \Leftrightarrow f(v) = P$$

TIR di un'operazione di investimento

$$f(v) = x_1 v + x_2 v^2 + \dots + x_m v^m$$

Derivando:

$$f'(v) = \underbrace{x_1}_{\geq 0} + \underbrace{2x_2 v}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{mx_m v^{m-1}}_{> 0} \quad \Rightarrow \quad f \text{ monotona strettamente crescente}$$

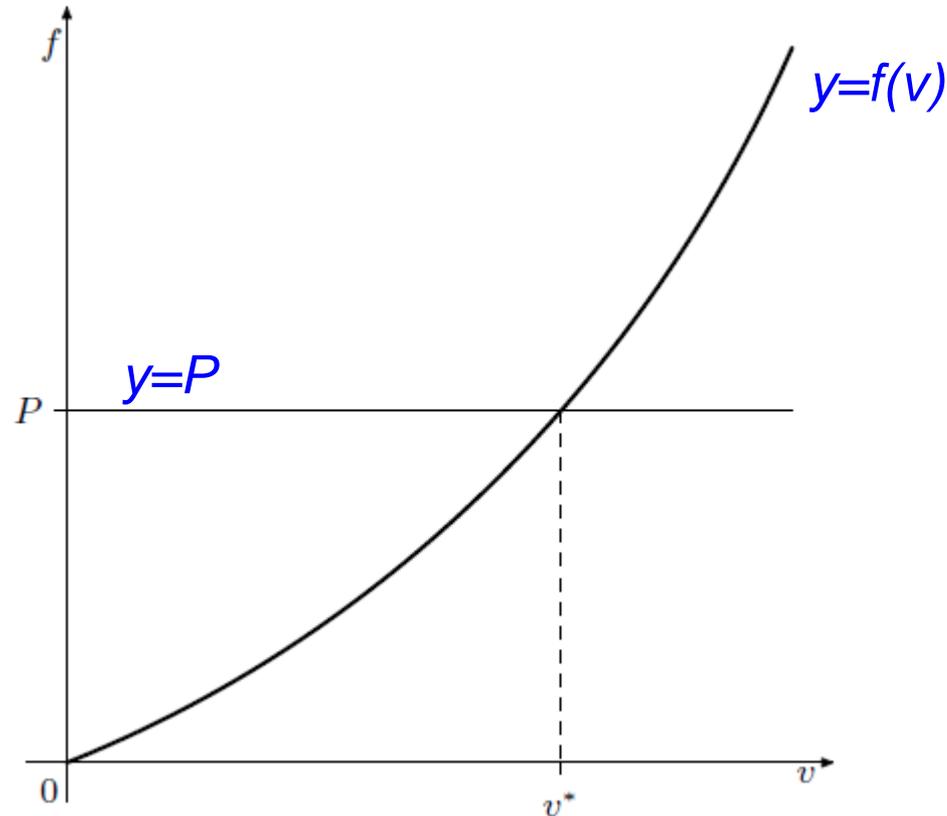
Derivando ancora:

$$f''(v) = \underbrace{2x_2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{m(m-1)x_m v^{m-2}}_{> 0} \quad \Rightarrow \quad f \text{ strettamente convessa}$$

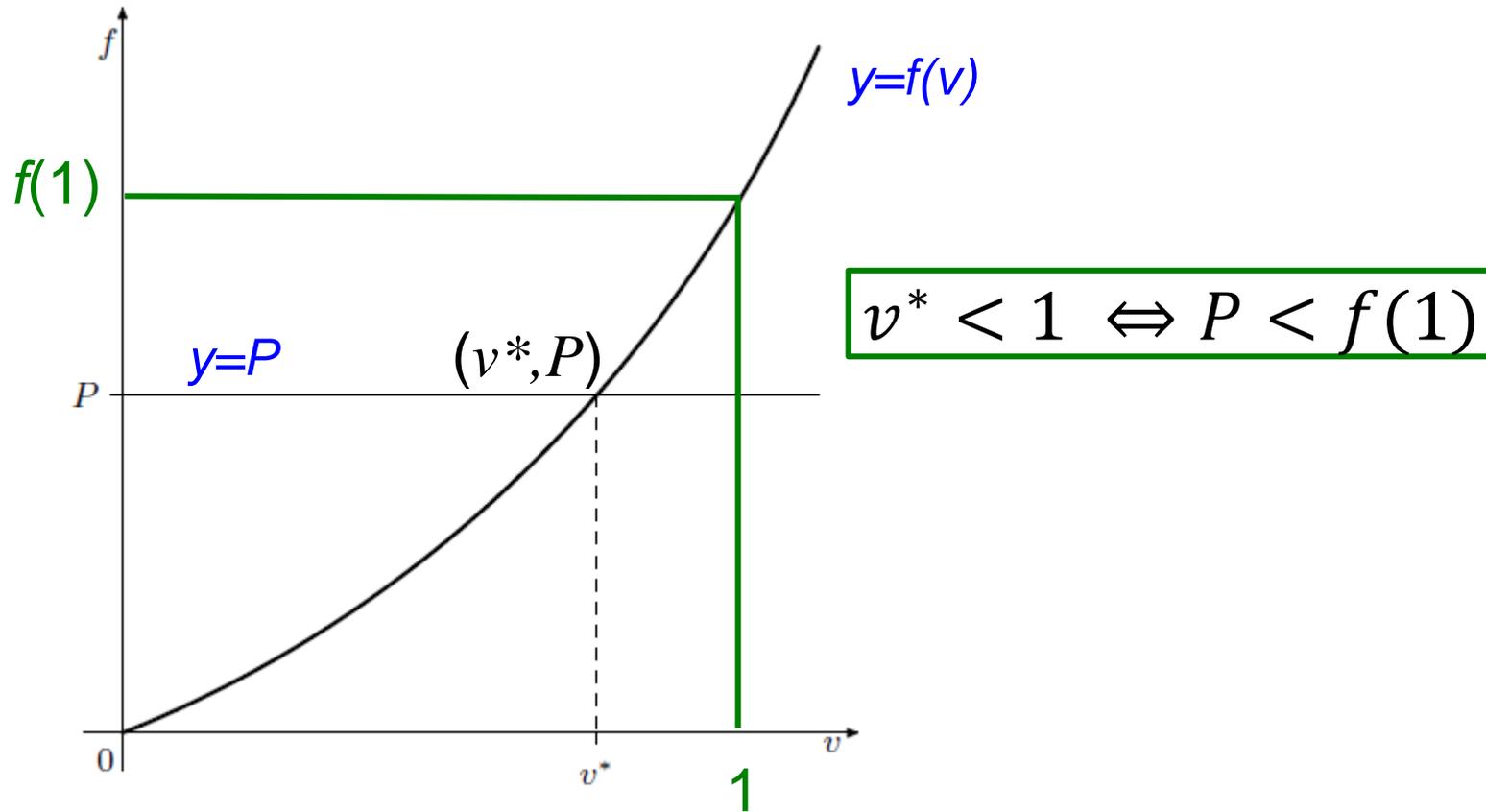
TIR di un'operazione di investimento

$$f(v) = P \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(v) \\ y = P \end{cases}$$

Graficamente:



Significatività finanziaria



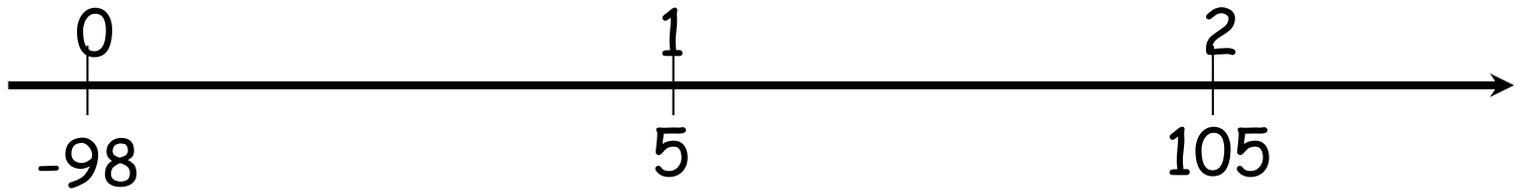
$$f(v) = x_1 v + x_2 v^2 + \dots + x_m v^m$$

$$f(1) = x_1 + x_2 + \dots + x_m$$

La somma degli incassi futuri deve essere maggiore del prezzo di acquisto

Esempio

Acquisto in 0 al prezzo $P=98$ del coupon bond con valore facciale $C=100$, durata $m=2$ anni, cedola annua $I=5$ euro.



$$P < C + 2I$$

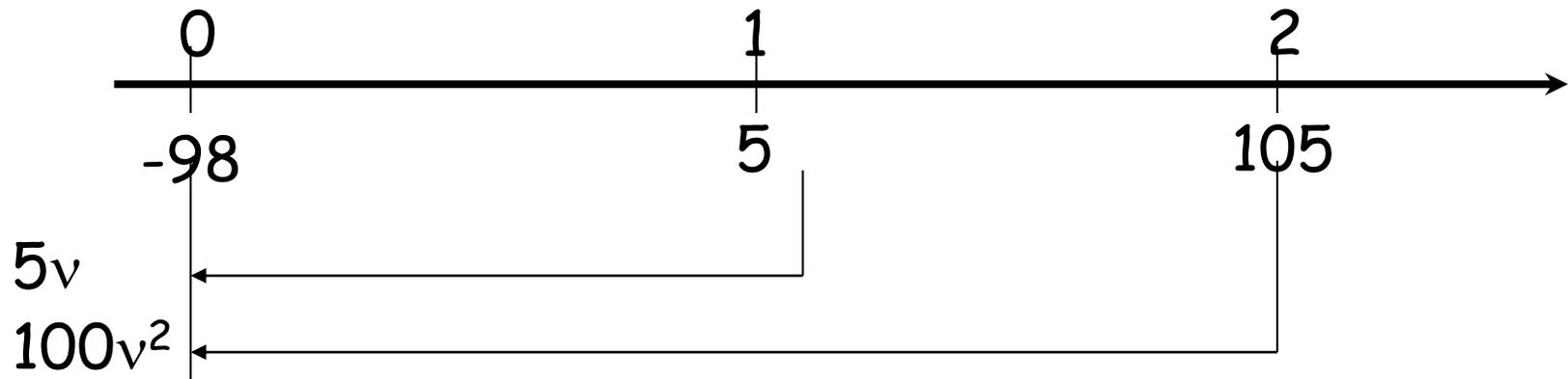
$$98 < 100 + 2 \cdot 5 = 110$$



esistenza e unicità del tir

Esempio

Acquisto in 0 al prezzo $P=98$ del coupon bond con valore facciale $C=100$, durata $m=2$ anni, cedola $I=5$ euro.



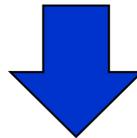
$$-98 + 5v + 105v^2 = 0 \Leftrightarrow 105v^2 + 5v - 98 = 0$$

Esempio

$$105v^2 + 5v - 98 = 0$$

$v_1 \cong -0.990195$  non significativa dal punto di vista finanziario

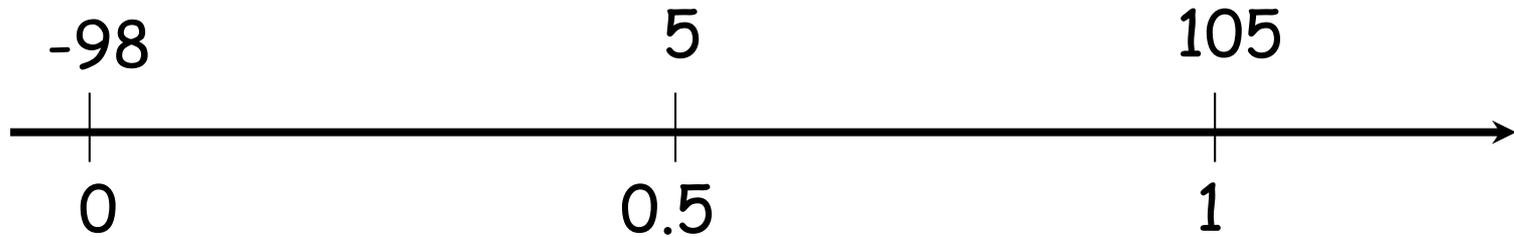
$v_2 \cong 0.942576$  $v^* = v_2$



$$i^* = \frac{1}{v^*} - 1 \cong 0.060923 = 6.0923\%$$

Esempio

Acquisto in 0 al prezzo $P=98$ del coupon bond con valore facciale $C=100$, che paga cedole di importo $I=5$ euro alla date $t_1=0.5$ e $t_2=1$, essendo il tempo espresso in anni.



Equazione del TIR:

$$-98 + 5v^{1/2} + 105v^1 = 0$$

Esempio

$$-98 + 5v^{1/2} + 105v^1 = 0$$

Poniamo:

$$x = v^{1/2} \quad \Rightarrow \quad v = x^2$$

Con la sostituzione:

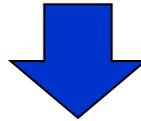
$$-98 + 5x + 105x^2 = 0$$

$$105x^2 + 5x - 98 = 0$$

Esempio

Risolvendo l'equazione otteniamo:

$$x^* \cong 0.94257561 \quad \text{su base semestrale}$$



$$i^* = \frac{1}{x^*} - 1 \cong 0.060922847 = 6.09285\%$$

su base semestrale

Il TIR su base annua è:

$$i_a^* = (1 + i^*)^2 - 1 \cong 0.125557 = 12.5557\%$$

Progressione geometrica

Una relazione algebrica fondamentale usata per valutare una rendita è la formula per il calcolo della somma di una successione geometrica finita.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

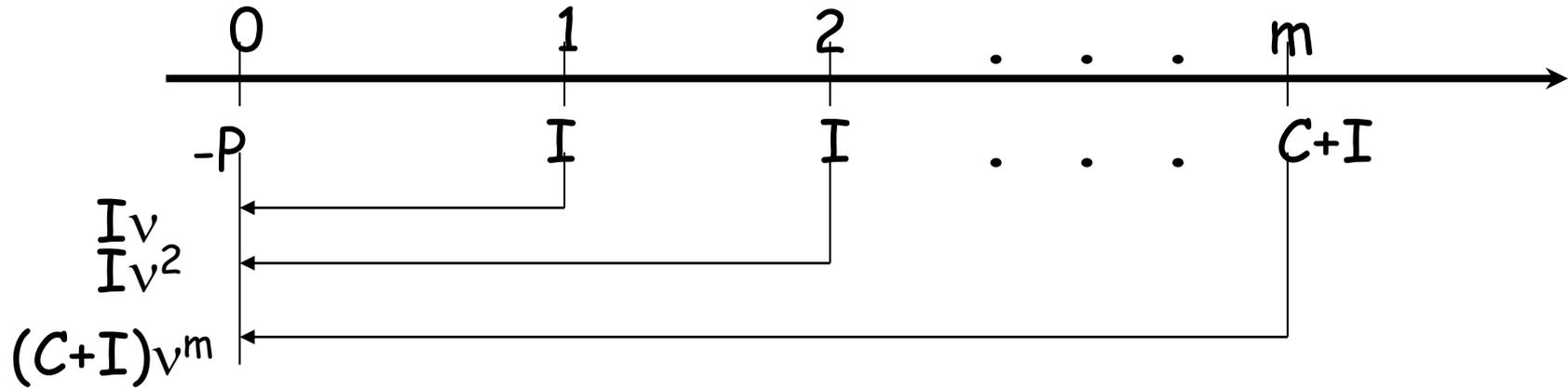
x: ragione della progressione

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$x + x^2 + \dots + x^n = x(1 + x + \dots + x^{n-1}) = x \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

TIR di un titolo a cedola fissa

Acquisto in 0 al prezzo P di un titolo a cedola fissa I , di durata m e valore facciale C :

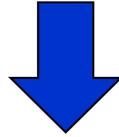


Equazione del TIR:

$$-P + \sum_{k=1}^m Iv^k + Cv^m = 0$$

TIR di un titolo a cedola fissa

$$-P + \sum_{k=1}^m Iv^k + Cv^m = 0$$



$$-P + Iv \frac{1 - v^m}{1 - v} + Cv^m = 0$$

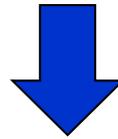
$$\Rightarrow Iv \frac{1 - v^m}{1 - v} = P - Cv^m$$

TIR di un titolo a cedola fissa

a) $P < C$:

$$P < C \Rightarrow P < C + mL$$

$$Iv \frac{1 - v^m}{1 - v} = P - Cv^m < C - Cv^m = C(1 - v^m)$$



$$Iv \frac{1 - v^m}{1 - v} < C(1 - v^m) \Rightarrow I \frac{v}{1 - v} < C \Rightarrow \frac{I}{C} \frac{v}{1 - v} < 1$$

$$\frac{v}{1 - v} = \frac{\frac{1}{1 + i}}{1 - \frac{1}{1 + i}} = \frac{1}{i}$$

$$\frac{I}{C} \frac{1}{i^*} < 1 \Rightarrow i^* > \frac{I}{C}$$

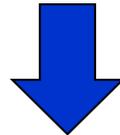
Se $P < C$ il T.I.R. è maggiore del tasso cedolare

TIR di un titolo a cedola fissa

b) $P=C$:

$$P = C \text{ e } C < C + ml \Rightarrow P < C + ml$$

$$Iv \frac{1 - v^m}{1 - v} = P - Cv^m = C - Cv^m = C(1 - v^m)$$



$$Iv \frac{1 - v^m}{1 - v} = C(1 - v^m) \Rightarrow I \frac{v}{1 - v} = C$$

$$\Rightarrow \frac{I}{C} \cdot \frac{1}{i^*} = 1 \Rightarrow i^* = \frac{I}{C}$$

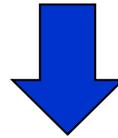
Se $P=C$ il T.I.R. è uguale
al tasso cedolare

TIR di un titolo a cedola fissa

c) $P > C$:

$$P < C + ml$$

$$Iv \frac{1 - v^m}{1 - v} = P - Cv^m > C - Cv^m = C(1 - v^m)$$



$$Iv \frac{1 - v^m}{1 - v} > C(1 - v^m) \Rightarrow I \frac{v}{1 - v} > C$$

$$\Rightarrow \frac{I}{C} \cdot \frac{1}{i^*} > 1 \Rightarrow i^* < \frac{I}{C}$$

Se $P > C$ il T.I.R. è minore
del tasso cedolare