Università degli Studi di Napoli "Parthenope"
Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Corso di Topografia e Idrografia

Lezione 12

Rilievo topografico con tecniche satellitari
Il posizionamento assoluto

Claudio Parente

Premessa

Il sistema GNSS (Global Navigation Satellite System) può essere utilizzato sia per scopi navigazionali che per il rilievo topografico e idrografico.

Le generalità sul GNSS ed in particolare sul GPS sono stati già oggetto del corso di laurea triennale, in particolare del corso di Cartografia numerica e GIS (lezione 12).

Pertanto in questo corso vengono trattati: il posizionamento assoluto, relativo, differenziale, con particolare attenzione all'utilizzo di tali tecniche per la determinazione delle coordinate dei punti oggetto del rilievo.

Misure topografiche e geodetiche - 1

Senza addentrarsi in questa fase in dettagli, basti sapere che, adottando opportune tecniche di posizionamento e post-processamento dei dati, è possibile raggiungere una precisione nel posizionamento utile ai fini topografici o geodetici.

Misure topografiche:

- produzione cartografica (inquadramento di rilievi topografici o misure di dettaglio)
- catasto (PREGEO 9, catasto strade)
- fotogrammetria (misura di punti di appoggio, fotogrammetria diretta)
- lidar
- monitoraggio (infrastrutture, movimenti franosi, movimenti di faglia)

Il segmento spaziale - 10

Una curiosità:

- Raggio orbitale satellitare: 26570 km
  - altezza satelliti 20200 km
  - raggio terrestre 6370 km
- Periodo orbitale ~ 12 h
- Velocità del satellite 13912 km/h
  ~ 4 km/s
- Tempo di volo del segnale 0.067 s
- Spostamento del satellite 260 m

Segmento di utilizzo - 2

In modo sintetico, i differenti tipi di ricevitori sono classificati in base alla parte di segnale che riescono ad utilizzare.

Sono divisi in tre categorie:

- ricevitori capaci di effettuare misure di codice
- ricevitori a singola frequenza
- ricevitori a doppia frequenza

Capiremo meglio in seguito le implicazioni di queste affermazioni.

Ricevitori di codice

Sono caratterizzati da:

- capacità di acquisire ed utilizzare unicamente il codice C/A
- piccole dimensioni
- impiego navigazionale
- capacità di effettuare posizionamento assoluto e differenziale di codice
- accuratezze nel posizionamento:
  - assoluto → ± 10 m
  - differenziale → metrica

Ricevitori singola frequenza

Sono caratterizzati da:

- capacità di acquisire ed utilizzare sia il codice C/A che la portante L1
- possibilità di memorizzare i dati in una memoria interna
- capacità di effettuare posizionamento assoluto, relativo e differenziale
- capacità di effettuare posizionamento statico o cinematico anche di precisione su basi limitate a 15-20 km
- Nota: non si realizzano ricevitori solo L2.

Ricevitori doppia frequenza

Sono caratterizzati da:

- capacità di acquisire ed utilizzare tutte le parti del segnale (codice C/A, portanti L1 ed L2)
- possibilità di memorizzare i dati in una memoria interna
- capacità di effettuare posizionamento assoluto, relativo e differenziale sia di codice che di fase
- posizionamento di precisione statico o cinematico senza limiti di lunghezza delle basi

La modulazione ed il GPS

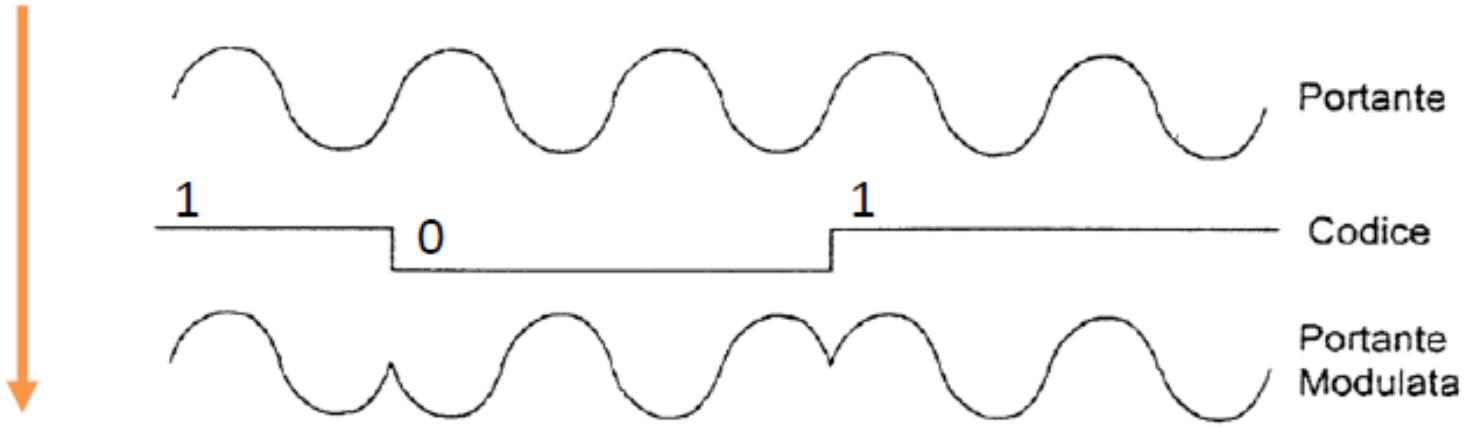
Le informazioni che i satelliti GPS inviano verso i ricevitori contengono una miriade di informazioni non descrivibili tramite un fenomeno continuo; è quindi necessario l'utilizzo di messaggi digitali - chiamati anche codici.

esistono diverse tecniche per la modulazione di messaggi digitali su onde piane: modulazione d'ampiezza, di frequenza e di fase.

Il GPS utilizza la modulazione binaria di fase (BPSK – Binary Phase Shift Keying). Il termine aggiuntivo "binario" indica che il messaggio da inviare può assumere unicamente i valori 1 e 0; in altri termine viene trasmesso un codice binario.

BPSK - 1

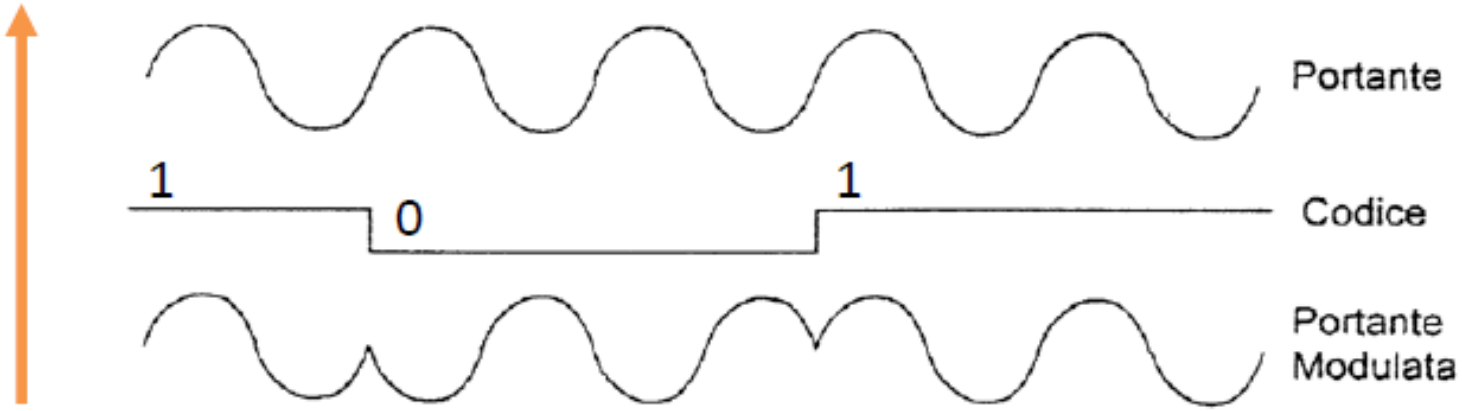
Nella BPSK ogni transizione del codice (passaggio da 0 a 1 o viceversa) provoca una variazione nella fase della portante di π.



NB - Insieme al metodo di modulazione deve esistere anche quello di demodulazione; il ricevente deve riuscire ad interpretare il segnale in modo da poter risalire al messaggio originario.

BPSK - 2

Per demodulare un segnale ottenuto con BPSK è sufficiente modularlo una seconda volta con lo stesso codice:



Modulando due volte la BPSK con lo stesso codice, il risultato è la portante pura o, in altri termini, la seconda modulazione elimina la prima.

BPSK - 3

Una caratteristica importante della BPSK è che può essere reiterata in modo da modulare più codici sulla stessa portante.

Nel caso di due codici:

1. si modula il primo codice;
2. si modula il secondo codice sul risultato della prima modulazione.

Queste due caratteristiche - la capacità di demodulazione e quella di modulare più codici sulla stessa portante - sono due caratteristiche fondamentali alla base del posizionamento GPS.

Il segnale GPS

Alcuni punti chiave:

- il GPS utilizza la BSPK per inviare messaggi
- i satelliti generano onde piane e le modulano per inviare verso terra le informazioni necessarie ai ricevitori per il posizionamento
- gli orologi atomici di bordo vengono sfruttati per generare onde piane di una prefissate frequenza

Nel GPS esiste quindi una frequenza fondamentale pari a $f_0 = 10.23\ Mhz$

Le portanti - 1

Abbiamo detto che con il termine portante si indica l'onda piana utilizzata per modulare un segnale.

In realtà il GPS non utilizza un'unica onda piana ma due differenti onde ottenute a partire dalla frequenza fondamentale.

Da f_0 vengono generate due frequenze:

1. $f_1 = 154 \cdot f_0 = 1.575420\ Ghz$
2. $f_2 = 120 \cdot f_0 = 1.227600\ Ghz$

I satelliti emettono quindi un segnale complesso caratterizzato dalla presenza di due onde piane portanti dette L_1 e L_2, aventi frequenze f_1 e f_2.

Le portanti - 2

Alle frequenze f_1 e f_2 corrispondono le due lunghezze d'onda:

1. $\lambda_1 = \frac{c}{f_1} \cong 19\ cm$
2. $\lambda_2 = \frac{c}{f_2} \cong 24\ cm$

Su queste due portanti vengono modulati tre differenti codici binari:

- codice C/A
- codice P
- codice D

I codici C/A, P e D

I codici C/A e P sono sequenze pseudo-casuali di 0 ed 1 (quindi non contengono vere e proprie informazioni) la cui unica funzione è permettere di effettuare il posizionamento (vedremo più aventi come):

- C/A - coarse acquisition (acquisizione grezza)
- P - precision (precisione)

Perché due?

Hanno caratteristiche (frequenza e lunghezza d'onda) diverse e permettono di effettuare il posizionamento con diversi livelli di accuratezza: il codice C/A è accessibile a tutti mentre il codice P è accessibile ai soli utenti qualificati.

Il codice D è invece un codice binario che contiene tutte le informazioni alfanumeriche necessarie ai ricevitori per effettuare il posizionamento.

Il codice C/A - 1

Il codice C/A è disponibile per tutta l'utenza civile ed è caratterizzato da:

$$f^*_{C/A} = 1.023\ Mbps \qquad \lambda^*_{C/A} = \frac{c}{f^*_{C/A}} \cong 293.05\ m \qquad t^*_{C/A} = \frac{1}{f^*_{C/A}} \cong 1\ ms$$

Si ricorda che ne caso di segnali digitali, i numeri precedenti devono essere pensati come:

- frequenza - numero di bit trasmessi nell'unità di tempo - nel nostro caso vengono trasmessi 1023000 bit in un secondo
- lunghezza d'onda - lunghezza nello spazio di un singolo bit

Il codice C/A è costituito da una sequenza di 1023 bit per cui è utile considerare anche la *code length*, cioè la lunghezza nello spazio dell'intero codice:

$$\Lambda^*_{C/A} \cong 1023 \cdot \lambda^*_{C/A} \cong 299.79\ Km$$

Il codice C/A - 2

Fissata la lunghezza del codice C/A, 1023 bit, ne esistono molti diversi; nel caso del GPS ne vengono utilizzati 36 diversi e ogni satellite ha un suo proprio codice C/A.

Il codice C/A ha le seguenti caratteristiche utili ai fini del posizionamento:

1. codici C/A differenti hanno bassa correlazione tra loro - è facile e rapido per un ricevitore GPS determinare da quale satellite proviene il segnale captato
2. i codici C/A hanno bassa correlazione con loro copie sfasate; questa particolarità è utile (come vedremo) per effettuare il posizionamento GPS

Il codice P

Il codice P è il codice originariamente pensato per le applicazioni militari e può essere caratterizzato da:

- frequenza $f_P^* = 10.23\ Mbps$
- lunghezza d'onda $\lambda_P^* \cong 29.31\ m$

Il codice P è noto e documentato, per cui è disponibile all'utenza civile, ma normalmente viene criptato con un codice riservato W (attivo dal 1994 con il termine *anti-spoofing*). Perché viene nascosto? Vedremo nella parte relativa agli errori che esso permette un posizionamento più accurato (da qui il nome).

Il codice D

Il codice D, o messaggio navigazionale, ha lo scopo di fornire ai ricevitori una lunga serie di informazioni necessarie per effettuare il posizionamento.

E' un codice a bassa frequenza:

- frequenza $f_D^* = 50\ bps$
- lunghezza d'onda $\lambda_P^* \cong 5996\ Km$

Le informazione principali trasmesse sono:

- l'almanacco dei satelliti, cioè un modello semplificato che permette di prevedere la posizione approssimativa di tutti i satelliti (utile per il *planning*)
- informazioni sullo stato di salute
- le effemeridi predette
- una stima dello sfasamento degli orologi di bordo del satellite

Posizionamento satellitare assoluto

Equazione del posizionamento satellitare - 1

Il posizionamento si fonda sulla relazione che lega:

- la posizione x_i dell'i-esimo punto incognito
- la posizione x^j del j-esimo satellite
- il vettore posizione r_i^j del satellite rispetto al punto

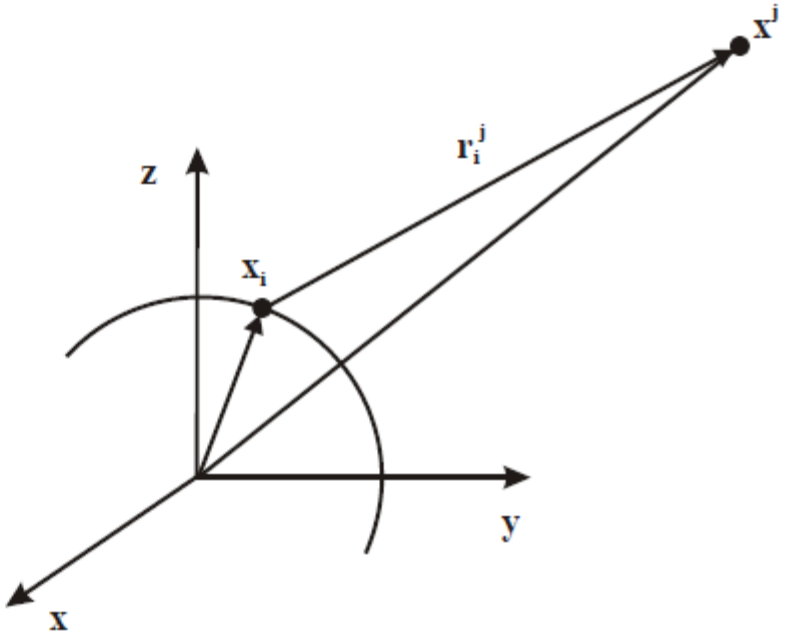
In particolare l'immagine mostra come:

$$x_i + r_i^j = x^j \qquad (1)$$

da cui si ricava che:

$$r_i^j = x^j - x_i \qquad (2)$$

NB - Sono relazioni vettoriali!



Il concetto di tempo di volo

Come viene misurato il *range* (la distanza satellite-ricevitore)?

Il GPS è un sistema passivo per cui non può esserci nessun tipo di interazione tra i due elementi - satellite e ricevitore. Non è quindi ipotizzabile l'utilizzo di sistemi basati su di comunicazione in andata e ritorno.

Quello che in realtà è misurato è il tempo necessario ai segnali elettromagnetici, emessi dai satelliti e captati dai ricevitori, per percorrere tale distanza.
Il passaggio tra tale tempo e il ***range*** è "banale" ($distanza = tempo \cdot velocità$).

Il tempo, definito tempo di volo, viene determinato utilizzando:

- i codici - codice C/A (utenza civile) o codice P (utenza militare)
- le fasi - portanti L_1 ed L_2

Le misure di codice - 1

Vediamo anzitutto come misurare il tempo di volo tramite misure di codice.

Per semplificare la trattazione, facciamo un'ipotesi iniziale: l'orologio sul satellite e l'orologio nel ricevitore sono perfettamente sincroni tra di loro e con il tempo GPS (scandito alla Mater station).

Vedremo in seguito che tale ipotesi - NON VERA - dovrà essere rimossa.

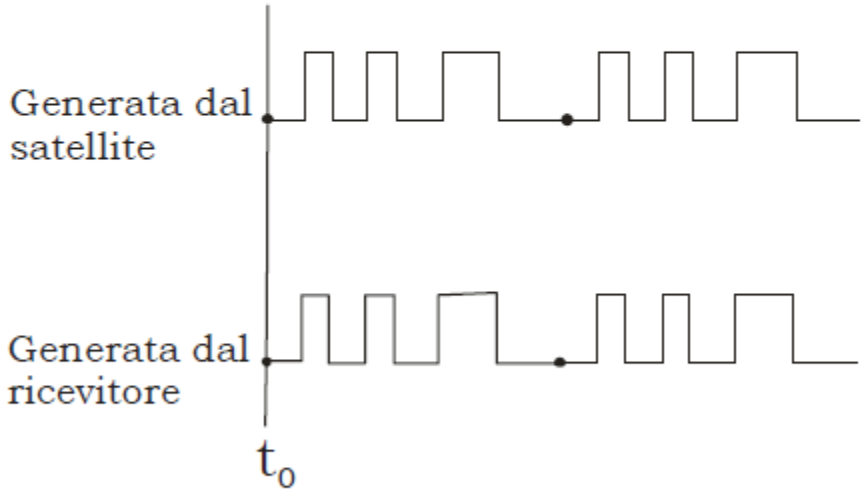
Al momento, sotto questa ipotesi, è corretto affermare che satellite e ricevitore sono in grado di generare in modo perfettamente sincrono due copie dello stesso codice.

NB - Ricordo che i codici sono noti sia ai satelliti che ai ricevitori.

Le misure di codice - 2

Supponiamo che al tempo t_0:

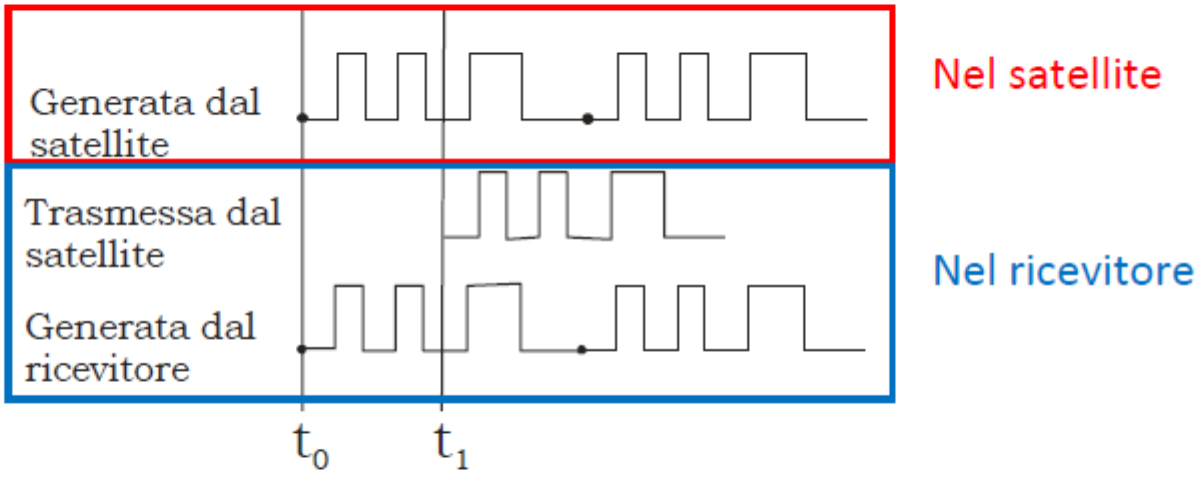
- il satellite generi un codice
- il ricevitore generi a sua volta il medesimo codice



Il satellite, oltre a generare il codice, lo invia anche verso Terra e quindi verso il ricevitore.

Le misure di codice - 3

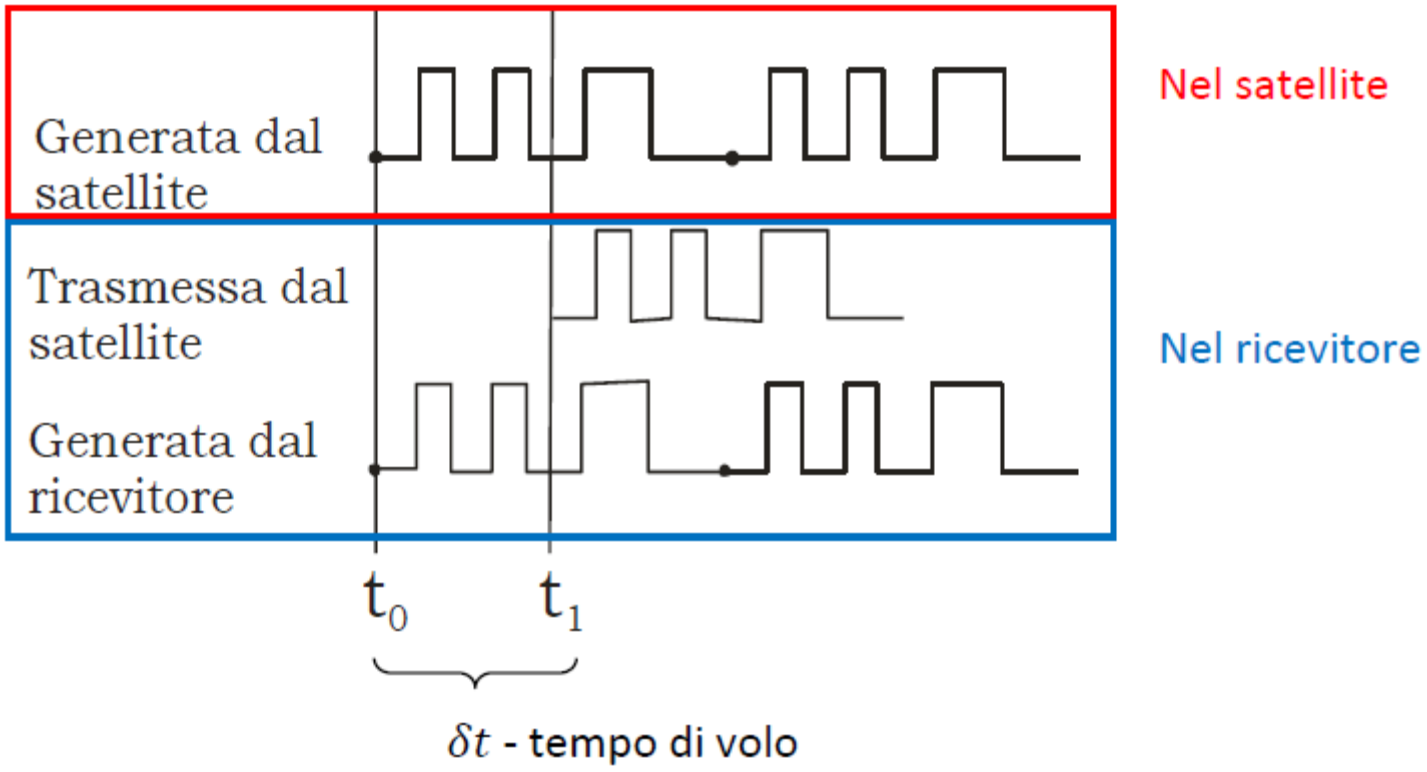
Ad un certo istante t_1 il codice generato dal satellite sarà captato dal ricevitore.



Il segnale che arriva al ricevitore è sfasato poiché ha impiegato un certo tempo per percorrere la distanza satellite-ricevitore.

Misurare la sfasatura tra i due segnali presenti nel ricevitore equivale a determinare il tempo di volo δt.

Le misure di codice - 4



Le misure di codice - 5

Quello descritto è proprio il meccanismo usato dal GPS per determinare le distanze satellite-ricevitore facendo uso dei codici.

La misura dello sfasamento viene effettuata spostando sull'asse dei tempi la copia del segnale captata fino a quando questa coincide con la copia generata localmente dal ricevitore.

La traslazione necessaria ad allineare il codice generato con quello ricevuto coincide con il tempo di volo δt.

L'importanza dell'affermazione riportata nella parte relativa ai segnali, "codici C/A hanno bassa correlazione con loro copie sfasate", trova ora il suo significato: il ricevitore deve riuscire a correlare il segnale ricevuto con quello locale senza ambiguità.

Concetto di epoca

Quante volte viene effettuata la misura del tempo di volo δt?

Una sola volta? In generale NO.

La maggior parte delle tecniche di posizionamento GPS sono basate su una grande ridondanza, dunque la misura della distanza satellite-ricevitore viene rideterminata in continuo e memorizzata ad intervalli predefiniti detti *epoche*.

Epoca: intervallo fra due misure di *range*.

Tipicamente, per le applicazioni topografiche, si fissano epoche tra 1 e 30 secondi.

I ricevitori moderni arrivano a misurare fino a un decimo di secondo (settaggio solitamente non usato per misure di tipo topografico ma piuttosto per il tracciamento di veicoli in movimento).

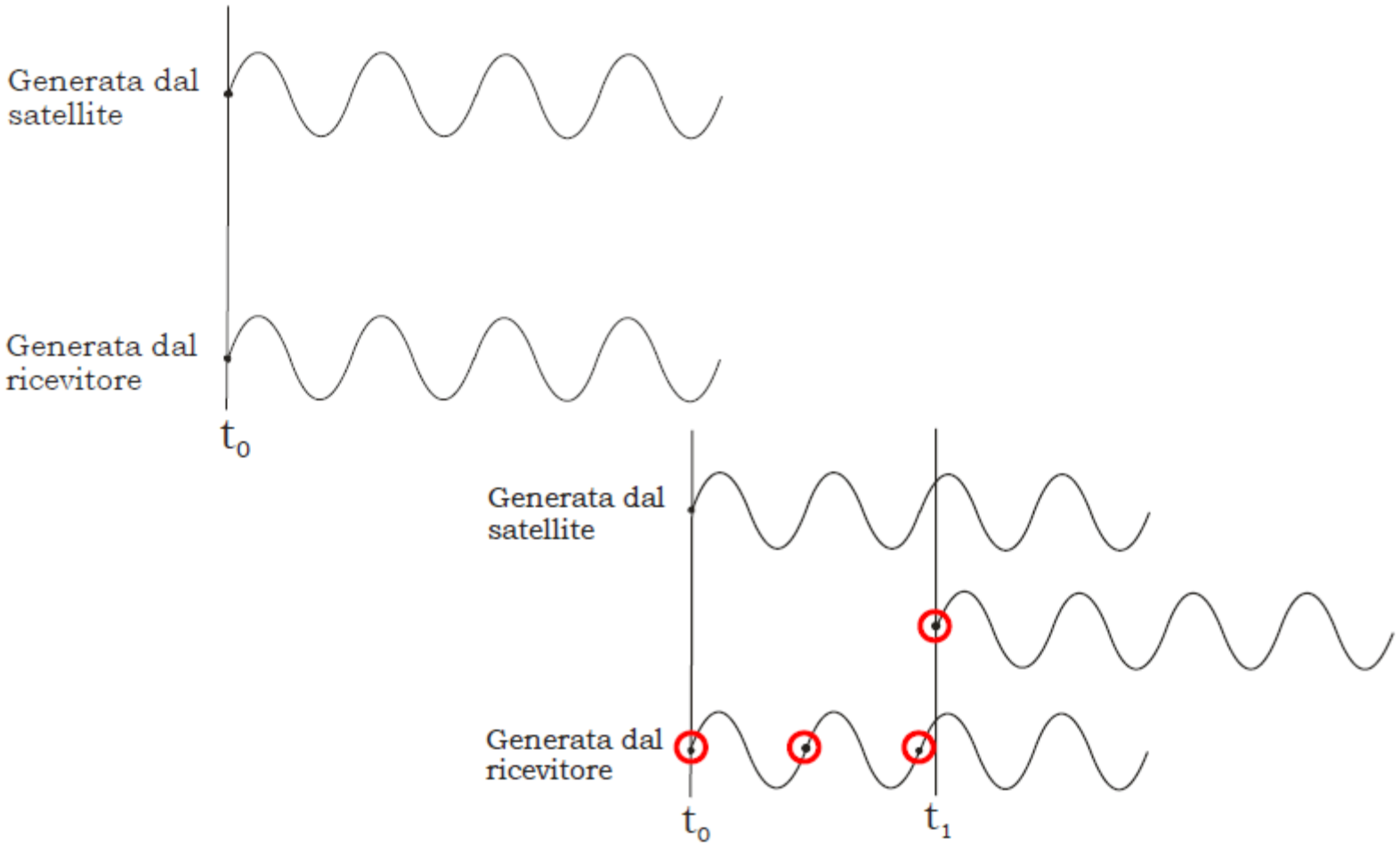
Le misure di fase - 1

La determinazione del tempo di volo utilizzando la componente portante viene indicata con il termine misura di fase.

La tecnica che sta alla base di questa misura è la medesima vista per i codici.

Tuttavia per il fatto che le onde elettromagnetiche hanno comportamenti periodici, l'utilizzo dell'onda portante è più complesso.

Le misure di fase - 2



Ambiguità di fase - 1

L'incertezza nella determinazione del punto in cui allineare le portanti viene chiamata ambiguità di fase.

Diversi algoritmi di calcolo sono stati definiti per risolvere questo problema; tali tecniche non sono oggetto del corso tuttavia alcune brevi considerazioni:

- tali tecniche si basano sostanzialmente sull'osservazione e la registrazione del segnale del satellite per un certo periodo di tempo
- prima di poter determinare il tempo di volo utilizzando le misure di fase è quindi necessario aspettare qualche minuto → questo periodo di tempo viene definito inizializzazione del rilievo

Ambiguità di fase - 2

Perché vengono utilizzate le misure di fase se sono così complesse e non forniscono una soluzione in breve tempo?

Vedremo più avanti che le caratteristiche delle portanti permettono, una volta risolto il problema delle ambiguità, di determinare il tempo di volo, e quindi la distanza satellite-ricevitore, con un livello di precisione superiore a quella ottenibile da misure di codice.

I ricevitori topografici-geodetici si basano su misure di fase mentre i ricevitori a basso costo unicamente su misure di codice.

Determinazione della range - 1

Quello descritto è il meccanismo usato dal GPS per determinare il tempo di volo Δt_i^j.

La stima della distanza è una facile deduzione una volta fatta un'ipotesi sulla velocità di propagazione del segnale ($distanza = tempo \cdot velocità$); tale velocità viene posta, in prima approssimazione uguale alla velocità della luce c.

In forma analitica:

$$r_i^j = \Delta t_i^j \cdot c$$

dove $c = 2.998 \cdot 10^8 m/s$

Determinazione della range - 2

Osservando l'espressione appena scritta:

$$r_i^j = \Delta t_i^j \cdot c$$

possiamo osservare che:

- il segnale non viaggia alla velocità della luce poiché l'atmosfera non è vuota
- il tempo di volo misurato non coincide con il tempo di volo vero

Queste considerazioni e la presenza di altre fonti di errore fa si che in realtà quello che si riesce a misurare è una distanza approssimata che nella terminologia GPS viene indicato con il termine *pseudo-range*.

E' corretto affermare che lo *pseudo-range* rappresenta una stima del *range*:

$$\hat{r}_i^j = p_i^j$$

Stima (Approssimazione)

Posizionamento con misure di *range*

E' possibile effettuare posizionamento GPS con misure di ***range***? SI

L'espressione del posizionamento da utilizzare sarà quindi:

$$\hat{r}_i^j = \Delta t_i^j \cdot c = \left\| x^j - x_i \right\| \quad j = 1,2,\dots,s \qquad (5)$$

Qual è la qualità (accuratezza) con cui vengono determinate le coordinate x_i del vertice stazionato?

In questa espressione semplificata, l'ipotesi di sincronizzazioni degli orologi, soprattutto in riferimento a quelli presenti all'interno dei ricevitori, rappresenta il limite più evidente.

Sincronia degli orologi dei ricevitori - 1

Non è infrequente che l'orologio del ricevitore presenti scostamenti rispetto al tempo GPS anche di 1 msec.

Tale scostamento, moltiplicato per la velocità della luce, corrisponde ad un errore nel calcolo della distanza satellite-ricevitore pari a 300 Km.

Utilizzare l'espressione (5), così come la vedete scritta, comporta introdurre errori anche di 300 Km, nella misura del *range* verso qualsiasi satellite osservato.

Sincronia degli orologi dei ricevitori - 2

Come posso migliorare la misura di *range*?

Occorre modificare l'espressione (5)
introducendo come termine incognito anche lo sfasamento dell'orologio del ricevitore.

Le incognite finali del nostro posizionamento saranno pertanto quattro:

- la posizione tridimensionale del punto da rilevare (3 incognite)
- lo sfasamento dell'orologio del ricevitore rispetto al tempo GPS (1 incognita)

Per poter arrivare ad una soluzione è necessario osservare il segnale di almeno 4 satelliti!

Equazione di pseudo-range

$$\hat{r}_i^j = \Delta t_i^j \cdot c = \left\| x^j - x_i \right\| \quad j = 1,2,\dots,s$$

Ora dobbiamo modificare l'espressione analitica in modo che compaiano espressamente i termini legati allo sfasamento temporale degli orologi dei ricevitori.

Modellizzazione degli errori d'orologio - 1

Consideriamo:

- i tempi misurati in cui il segnale viene emesso e captato, τ^j e τ_i
- i tempi veri in cui il segnale viene emesso e captato, t^j e t_i

Precisamente:

- τ^j: istante in cui un segnale lascia il satellite j, misurato dall'orologio del satellite
- t^j: istante vero in cui un segnale lascia il satellite j, misurato dall'orologio GPS (tempo GPS vero)
- τ_i : istante in cui un segnale raggiunge il ricevitore i, misurato dall'orologio del ricevitore
- t_i: istante vero in cui un segnale raggiunge il ricevitore i, misurato dall'orologio GPS (tempo GPS vero)

Modellizzazione degli errori d'orologio - 2

Introduciamo allora i termini d'errore:

$$\tau^j + \delta\tau^j = t^j$$

$$\tau_i + \delta\tau_i = t_i$$

Il tempo di volo misurato (istante di ricezione – istante di emissione) sarà:

$$\Delta\tau_i^j = \tau_i - \tau^j$$

mentre il tempo di volo vero sarà:

$$\Delta t_i^j = t_i - t^j$$

Sostituendo:

$$\Delta t_i^j = \tau_i + \delta\tau_i - \left(\tau^j + \delta\tau^j\right) = \tau_i - \tau^j + \delta\tau_i - \delta\tau^j = \Delta\tau_i^j + \delta\tau_i - \delta\tau^j$$

Nuova equazione

$$\hat{r}_i^j = \Delta t_i^j \cdot c \quad j = 1,2,\dots,s$$

$$\begin{aligned}\hat{r}_i^j = \Delta t_i^j \cdot c &= \left(\Delta\tau_i^j + \delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c \\ &= \Delta\tau_i^j \cdot c + \left(\delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c \\ &= p_i^j + \left(\delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c\end{aligned}$$

Chi ci fornisce i termini di errore $\delta\tau_i$ e $\delta\tau^j$ relativi agli sfasamenti degli orologi sui satelliti e nei ricevitori?

- il termine $\delta\tau^j$ (piccolo) è stimato dal segmento di controllo e fornito agli utenti finali all'interno del messaggio navigazionale D
- il termine $\delta\tau_i$ deve essere considerato come un incognita del problema al pari delle coordinate del vertice stazionato

Modellizzazione degli errori dovuti alla velocità di propagazione - 1

La velocità di propagazione media è minore di c poiché il segnale emesso dai satelliti non viaggia nel vuoto ma all'interno dell'atmosfera. Poiché la velocità reale è minore rispetto a quella teorica, introducendo il valore c, si avrà che la distanza satellite-ricevitore misurata è maggiore rispetto a quella reale.

Per tenere conto di questa fonte di errore devono essere introdotti dei fattori correttivi che migliorano la stima della distanza satellite-ricevitore; tra tutti gli strati atmosferici quelli più importanti, perché influenzano maggiormente il segnale, sono la ionosfera e la troposfera.

Vengono quindi introdotti due nuovi fattori legati al ritardo che il segnale subisce attraversando questi due strati.

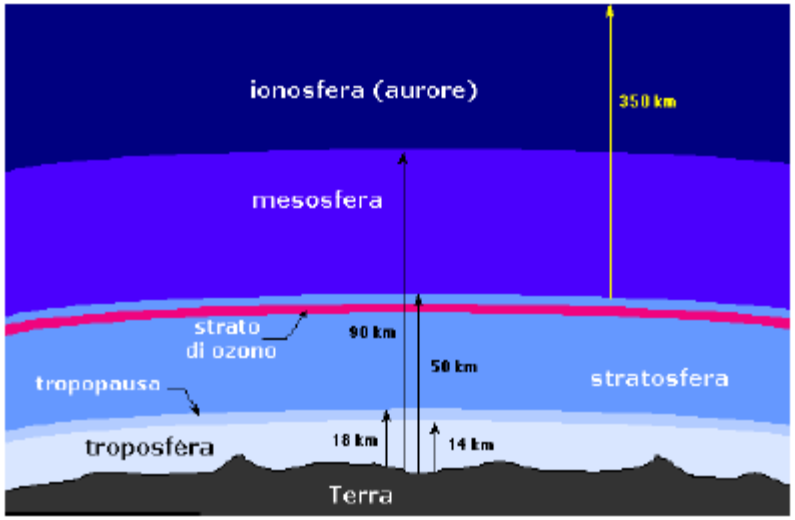
La nuova equazione sarà:

$$\hat{r}_i^j = p_i^j + \left(\delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c - I_i^j - T_i^j$$

Modellizzazione degli errori dovuti alla velocità di propagazione - 2

Ionosfera: parte alta dell'atmosfera

Troposfera: parte bassa



I meccanismi fisici che determinano il ritardo nei due strati sono differenti e, conseguentemente, le strategie per eliminare tali errori sono diverse; ciò spiega come mai si introducano i due termini separatamente.

In linea di principio I_i^j e T_i^j sono diversi per ogni satellite e per ogni ricevitore, in quanto dipendono dalle condizioni chimico-fisiche della parte di atmosfera attraversata.

Esamineremo meglio in seguito queste due fonti di errore.

Sintesi sulle stime del *range*

Prima equazione approssimata:

$$\hat{r}_i^j = p_i^j \qquad j = 1,2,\dots,s$$

Tenendo conto del fattore orologi:

$$\hat{r}_i^j = p_i^j + \left(\delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c \qquad j = 1,2,\dots,s$$

Tenendo conto del ritardo iono-troposferico:

$$\hat{r}_i^j = p_i^j + \left(\delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c - I_i^j - T_i^j \qquad j = 1,2,\dots,s$$

Equazione di *pseudo-range* con i codici

La soluzione del posizionamento GPS viene ottenuta utilizzando come stima del *range* l'ultima equazione riportata denominata anche come equazione di *pseudo-range*

$$r_i^j = \left\| \vec{x}^j - \vec{x}_i \right\| \qquad j = 1,2,\dots,s$$

$$p_i^j + \left(\delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c - I_i^j - T_i^j = \left\| \vec{x}^j - \vec{x}_i \right\| \qquad j = 1,2,\dots,s$$

Da cui:

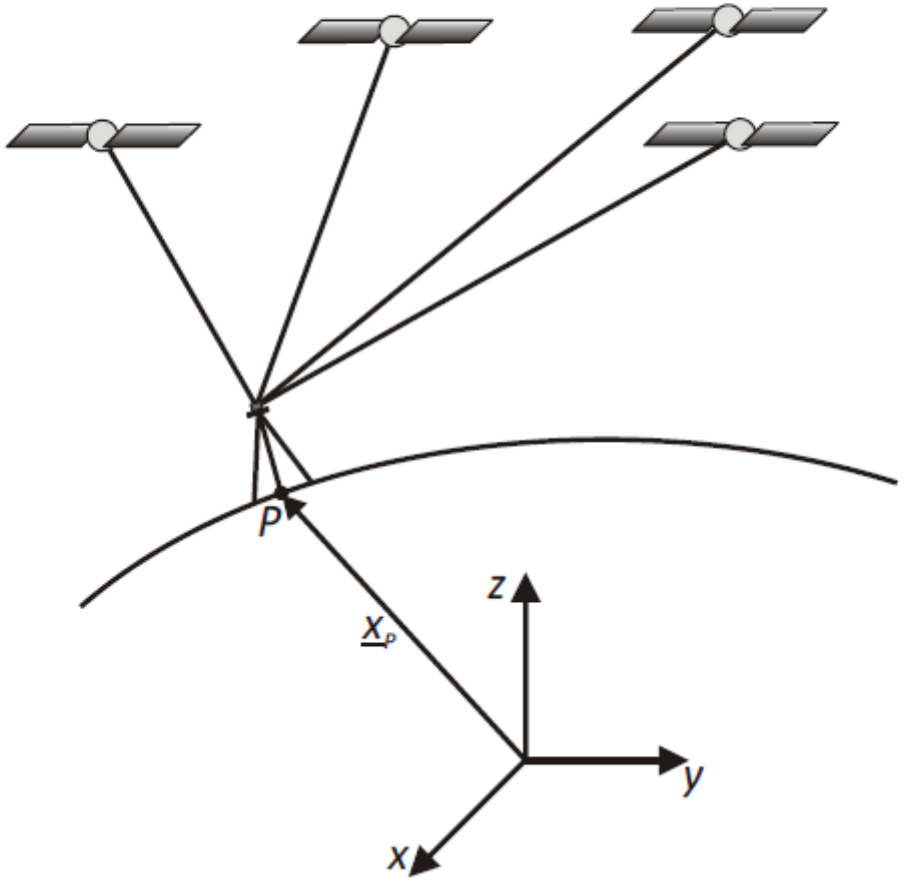
$$p_i^j = \left\| \vec{x}^j - \vec{x}_i \right\| - \left(\delta\tau_i - \delta\tau^j\right) \cdot c + I_i^j + T_i^j \qquad j = 1,2,\dots,s$$

o anche:

$$p_i^j = \left\| \vec{x}^j - \vec{x}_i \right\| + \left(\delta\tau^j - \delta\tau_i\right) \cdot c + I_i^j + T_i^j \qquad j = 1,2,\dots,s$$

Soluzione navigazionale - 1

E' la modalità dei navigatori per le auto e per l'escursionismo.



Soluzione navigazionale - 2

Ripartiamo dalla equazione dello *pseudo-range*

$$p_i^j = \left\|\vec{x}^j - \vec{x}_i\right\| + \left(\delta\tau^j - \delta\tau_i\right) \cdot c + I_i^j + T_i^j \qquad j = 1,2,\dots,s$$

Quali sono i termini noti, incogniti e calcolati?

- p_i^j: distanza satellite-ricevitore - termine calcolato
- $\overrightarrow{x^j}$: posizione 3D del satellite - termine noto attraverso le effemeridi predette trasmesse all'interno del messaggio navigazionale D
- $\overrightarrow{x_i}$: posizione 3D del vertici stazionato - termine incognito
- $\delta\tau^j$: sfasamento dell'orologio del satellite - termine noto trasmesso all'interno del messaggio navigazionale D
- $\delta\tau_i$: sfasamento dell'orologio del ricevitore - termine incognito
- I_i^j : ritardo ionosferico - termine incognito
- T_i^j : ritardo troposferico - termine incognito

Soluzione navigazionale - 3

Per risolvere il problema dobbiamo effettuare una semplificazione trascurando i ritardi iono-troposferici: sappiamo che pagheremo un prezzo in termini di precisione delle coordinate determinate. In altri termini non correggendo l'equazione con i termini di troposfera e ionosfera peggioriamo la stima della distanza satellite-ricevitore introducendo conseguentemente un errore nella determinazione delle coordinate del punto stazionato.

Nel posizionamento navigazionale risolviamo quindi il sistema:

$$p_i^j = \left\|\vec{x}^j - \vec{x}_i\right\| + \left(\delta\tau^j - \delta\tau_i\right) \cdot c \qquad\qquad j = 1,2,\dots,s$$

le cui uniche incognite rimangono:

- $\overrightarrow{x_i}$: 3 incognite
- $\delta\tau_i$: 1 incognito

Come già indicato più volte sono necessari almeno 4 satelliti.

Soluzione navigazionale - 4

La soluzione navigazione è la soluzione più semplice ed ha grande interesse poiché:

- basta un ricevitore per effettuare un posizionamento
- il posizionamento è di tipo assoluto (coordinate tridimensionali nel sistema di riferimento adottato)
- bastano i dati di un'epoca - una sola misura di *pseudo-range* - per fare posizionamento

Errori nel posizionamento satellitare

La precisione del posizionamento GPS dipende strettamente dalla precisione con cui vengono determinate gli *pseudo-range* satellite-ricevitore.
Nel calcolo di questa distanza vengono però commessi degli errori che si ripercuotono direttamente sull'accuratezza finale delle coordinate del punto misurato.

In questa lezione entreremo più in dettaglio sulle sorgenti di errore, alcune delle quali sono già state introdotte (sfasamento degli orologi, ritardi iono-troposferici).

Errori di posizionamento

Gli errori che si possono commettere sono essenzialmente suddivisi in tre categorie:

- errori accidentali di misura
- errori sistematici o di modello
- errori vari di osservazione

Errori accidentali di misura - 1

Il tempo di volo si determina attraverso un procedimento di correlazione tra il segnale emesso dai satelliti e quello generato localmente dal ricevitore.

Tuttavia il correlatore interno presente nei ricevitori commette un errore nell'effettuare questa operazione; tale errore è strettamente legato alla lunghezza d'onda del segnale utilizzato.

L'errore é stimato pari all'1-2% della lunghezza d'onda del segnale utilizzato; le precisioni sono quindi diverse a seconda della diversa componente che si considera.

Errori accidentali di misura - 2

Ricordiamo che le lunghezze d'onda in gioco sono:

- codice C/A $\rightarrow$ $\cong 300\ m$
- codice P $\rightarrow$ $\cong 30\ m$
- portanti L1 - L2 $\rightarrow$ $19 - 24\ cm$

Gli errori sulla determinazione dello *pseudo-range* sono pertanto:

- codice C/A $\rightarrow$ $3 - 6\ m$
- codice P $\rightarrow$ $0.3 - 0.6\ m$
- portanti L1 - L2 $\rightarrow$ $0.002 - 0.004\ m$

E' una fonte di errore non eliminabile per cui, quando si vuole effettuare un posizionamento di precisione, occorre utilizzare la parte di segnale più favorevole (es. ricevitori a doppia frequenza per misure topografiche).

Errori sistematici

Gli errori sistematici sono usualmente divisi in tre sotto-categorie:

- errori sulle effemeridi
- errori degli orologi dei satelliti
- errori dovuti all'attraversamento dello strato ionosferico e troposferico

Errori sistematici - effemeridi

Presupposto fondamentale per il posizionamento GPS è la conoscenza della posizione dei satelliti.

Le effemeridi predette, inviate dai satelliti attraverso il codice D, forniscono in realtà dei parametri di posizionamento non corretti trasmettendo la posizione teorica delle traiettorie seguite e non quella vera.

E' possibile eliminare questa fonte di errore?

Sì, in due modi:

- tramite le effemeridi precise che forniscono la posizione reale del satelliti
- tramite tecniche di posizionamento relativo (elaborazione congiunta dei dati provenienti da due o più ricevitori) l'entità di tale errore può essere ridotta

Errori sistematici - sfasamento orologi

Le distanze sono determinate attraverso la misura del tempo di volo.

Una imperfetta sincronia fra gli orologi dei satelliti e dei ricevitori porta a rilevanti errori di calcolo dello *psuedo-range*.

Gli errori di sincronizzazione degli orologi dei ricevitori sono superati considerando tale elemento come un'incognita del problema.

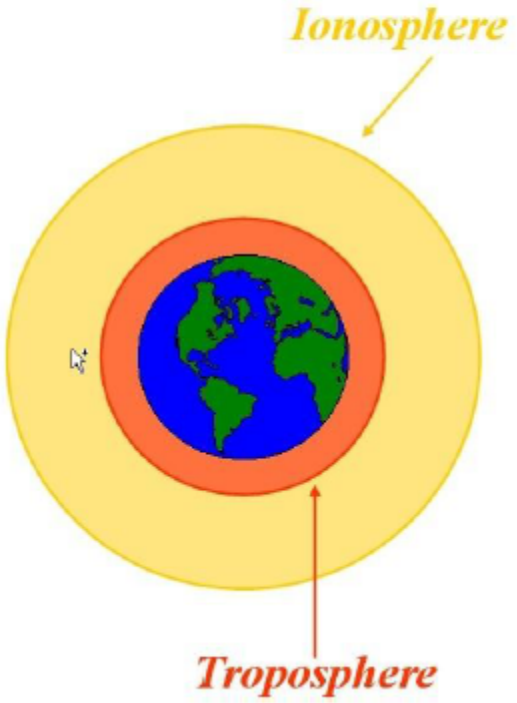
Gli errori di sincronizzazione degli orologi dei satelliti vengono "parzialmente" corretti attraverso il messaggio navigazionale D (correzione immediata).
Tramite tecniche di posizionamento relativo la loro entità può essere ulteriormente ridotta (correzione non immediata).

Errori sistematici - ritardo ionosferico e troposferico

La velocità di propagazione di un segnale è costante nel vuoto (e pari alla velocità della luce) ma, quando essa attraversa uno strato di particelle cariche di elettricità, tale velocità diminuisce.

Allo stesso modo il segnale GPS durante l'attraversamento dello strato ionosferico e troposferico subisce un rallentamento.

L'utilizzo della velocità della luce nel calcolo dello *pseudo-range* non è pertanto corretto.



Errori sistematici - ritardo ionosferico

La ionosfera è la fascia compresa tra i 70 e i 1000 km circondante la superficie terrestre. I segnale proveniente dai satelliti (localizzati a 20200 km di altitudine) attraversano completamente questa parte dell'atmosfera che è costituita da uno strato di particelle cariche elettricamente.

Esiste un modello matematico per quantificare il ritardo ionosferico;

Questa caratteristica permette ai ricevitori a doppia frequenza di modellare meglio l'entità di questo errore e di eliminarla parzialmente; anche tecniche di posizionamento relativo permettono l'eliminazione di queste fonti di errore.

Errori sistematici - ritardo troposferico

Nel suo cammino verso il ricevitore, il segnale deve attraversare gli strati più o meno densi di vapori della troposfera, la parte più bassa dell'atmosfera.
Gli errori sono simili a quelli della ionosfera, anche se più difficili da determinare, e quindi da correggere

In letteratura esistono numerosi modelli matematici elaborati per correggere tale fenomeno; alcuni dei più utilizzati sono: Hopfield, Goad-Goodman, Saastamoinen, Black e Niell. Tali modelli vengono adottati durante la post-elaborazione di dati per cui non sono applicabili immediatamente.

Errori vari di osservazione

A questa voce fanno riferimento il multipath (percorso multiplo) e alcune fonti di errore come ad esempio la configurazione satellitare e le interferenze elettromagnetiche (presenza di ripetitori radio e telefonici, linee ad alta tensione, etc.).

Sono fenomeni locali e non possono essere eliminati.

La corretta scelta del posizionamento del ricevitore e della finestra temporale del rilievo sono di primaria importanza per non incorrere in questo tipo di inconveniente.

DOP - 1

Sono indicatori della qualità del rilievo. Così come il numero di satelliti varia nel tempo anche tali parametri di qualità variano. In generale questi due elementi (numero dei satelliti e parametri di qualità) sono correlati tra loro.

Con il termine generale DOP (*Dilution Of Precision*) si indica l'effetto che la geometria satellitare ha sulla qualità finale del rilievo.
E' un concetto noto anche nella topografia classica: la geometria del rilievo influisce sulla qualità finale dei punti misurati (es. punti allineati).

DOP - 3

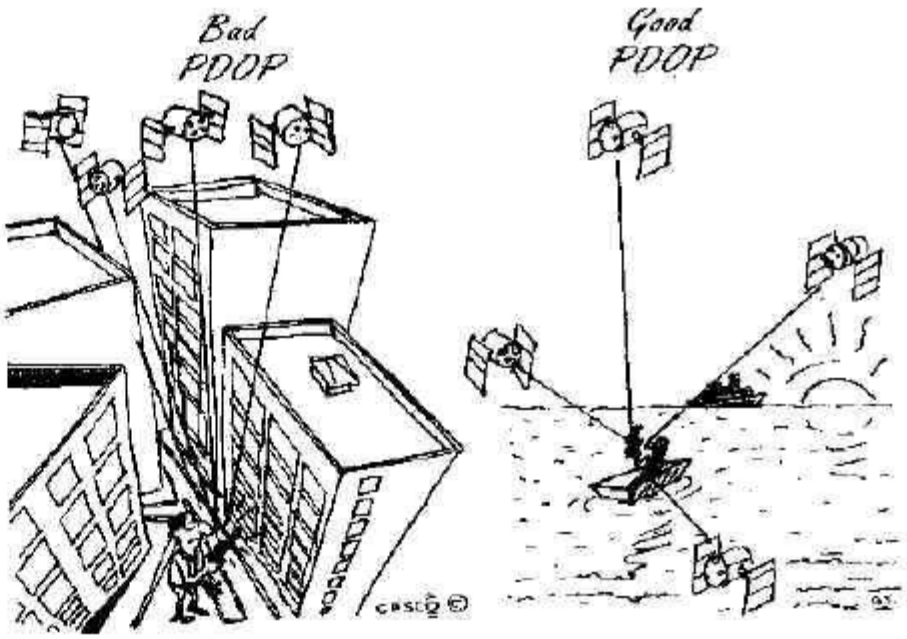
Esistono diversi parametri DOP:

- HDOP: horizontal DOP - parametro di qualità planimetrica
- VDOP: vertical DOP - parametro di qualità altimetrica
- PDOP: position DOP - l'insieme dei due parametri precedenti
- TDOP: temporal DOP - parametro di qualità del tempo
- GDOP: geometric DOP - l'insieme di PDOP e TDOP

Regole pratiche per PDOP

Il valore ideale è 1.

- $1 \leq PDOP \leq 4$ OTTIMO
- $4 < PDOP \leq 7$ DISCRETO
- $PDOP > 7$ PESSIMO



Budget degli errori

Ecco il budget degli errori commesso da un ricevitore a doppia frequenza:

Effetti del ritardo ionosferico	± 5 m
Errore nell'effemeride del satellite	± 2.5 m
Sfasamento nell'orologio del satellite	± 2 m
Effetti del multipath	± 1 m
Effetti del ritardo troposferico	± 0.5 m
Tutte le altre fonti d'errore	± 1 m
Totale	± 12 m

Per un ricevitore di codice va aggiunto l'errore commesso dal correlatore interno (3-6 m).

Rilievo con ricevitore di codice - 1

E' stato rilevato il punto con un ricevitore di codice Garmin 12XL.

Il punto è stato memorizzato 5 volte con le seguenti coordinate:

	Est	Nord
1	510674	5005601
2	510672	5005605
3	510671	5005602
4	510669	5005608
5	510673	5005608

Rilievo con ricevitore di codice - 2

Due considerazioni:

- il ricevitore utilizzato ha scopo navigazionale per cui non viene memorizza la componente altimetrica
- il limite di qualità dei ricevitori di codice è visibile anche nel fatto che essi solitamente memorizzano le coordinate dei punti con una approssimazione metrica

Rilievo con ricevitore di codice - 2

	Est	Nord
1	510674	5005601
2	510672	5005605
3	510671	5005602
4	510669	5005608
5	510673	5005608
media	510671.8	5005604.8
dev.st	1.924	3.271

Il vertice stazionato ha delle coordinate che con una percentuale del 68.27% saranno comprese tra:

Est: 510671.8 ± 1.9

Nord: 5005604.8 ± 3.3

Rilievo con ricevitore a doppia frequenza - 2

Qual è il significato di quelle coordinate?

Il vertice stazionato ha delle coordinate che con una percentuale del 68.27% saranno comprese tra:

Est:	510670.375	±	0.075
Nord:	5005601.842	±	0.101
Altezza ellissoidica:	128.904	±	0.229

Fino ora abbiamo solo indicazioni sulla precisione del rilievo; la strumentazione a doppia frequenza risulta (come ci si aspettava) più precisa rispetto a quella di codice.

Accuratezza delle misure

Ma quanto siamo lontani, o vicini, al valore vero?

Disponendo delle coordinate del punto ottenute con un metodo di rilievo avente qualità superiore è possibile valutare l'accuratezza.

	Est	Nord	h
coord. vere	510669.859	5005601.429	123.662
ric. di codice	510671.8	5005604.8	
	1.941	3.371	

	Est	Nord	h
coord. vere	510669.859	5005601.429	123.662
ric. di fase	510670.375	5005601.842	128.904
	0.516	0.413	5.242