Università degli Studi di Napoli "Parthenope"
Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Corso di Topografia e Idrografia

Lezione 10

MISURA DEI DISLIVELLI

Claudio Parente

QUOTE e DISLIVELLI

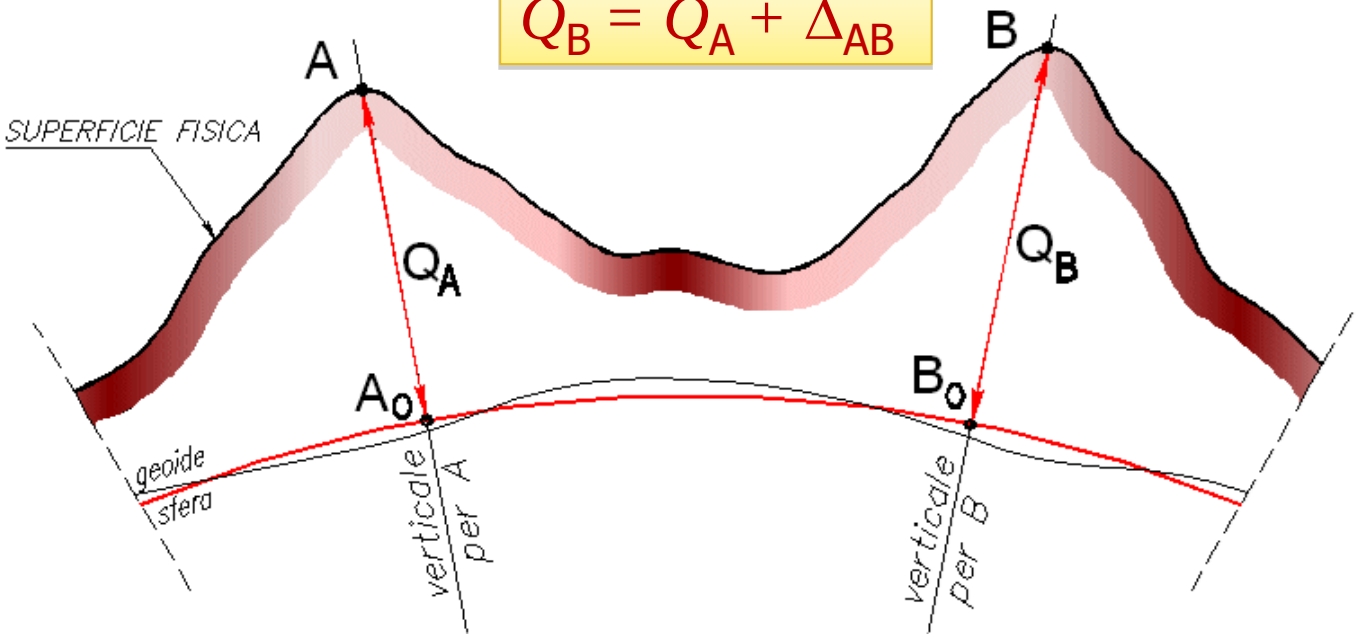
- La **quota** (ortometrica) di un punto P sulla superficie terrestre è la distanza del punto P dal Geoide, misurata lungo la **linea di forza** della gravità. Essa può essere approssimata con un **segmento rettilineo** misurato lungo la **verticale**.

- Il **dislivello** tra due punti A e B sul terreno è la **differenza** della quota del secondo punto rispetto alla quota del primo; dunque:

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A \qquad \Delta_{BA} = Q_A - Q_B \qquad \Delta_{BA} = -\Delta_{AB}$$

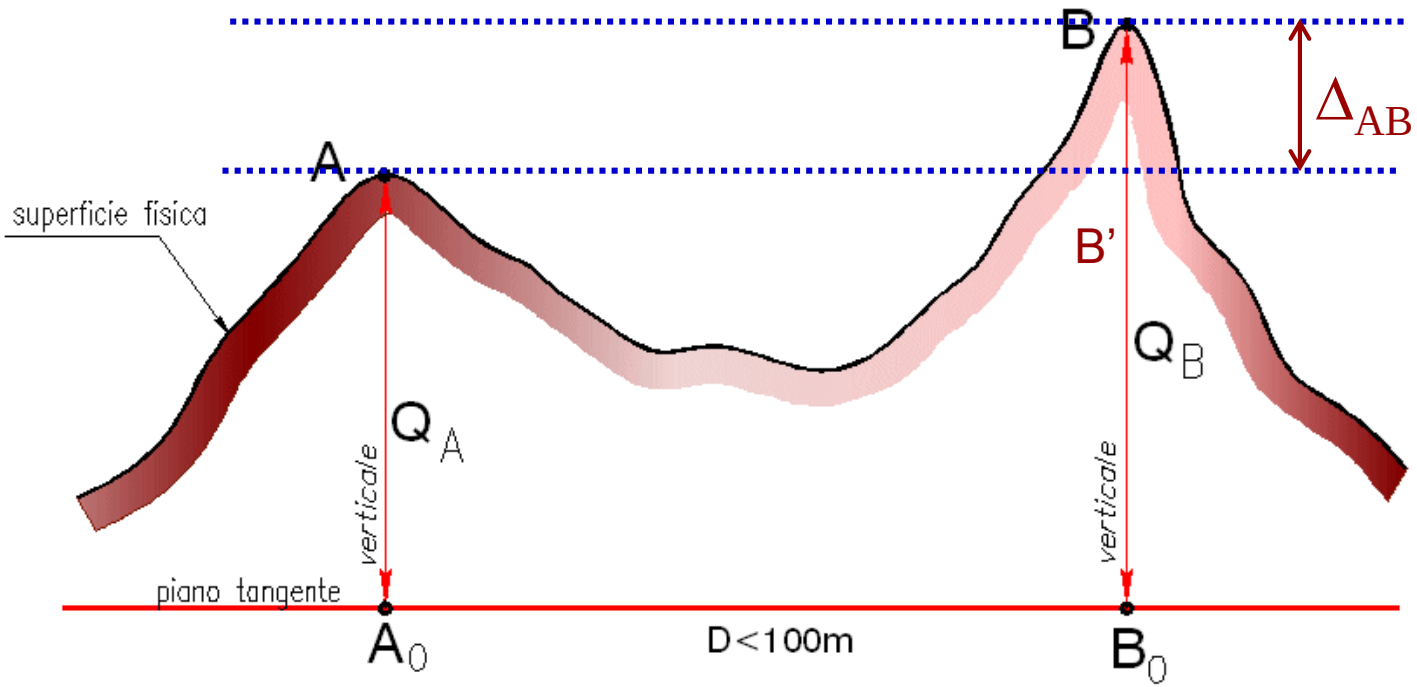
Nella pratica, il **dislivello** tra due punti viene **misurato** con operazioni dette **livellazioni**. Esso viene poi usato per calcolare la quota incognita di un punto:

$$Q_B = Q_A + \Delta_{AB}$$



QUOTE e DISLIVELLI

- Quando la **distanza** tra i punti A e B è piccola (approssimativamente 100 m per precisioni al millimetro) è lecito adottare come superficie di riferimento il **piano**.
- In questo caso si ha una notevole semplificazione: le **verticali** per A e B sono **parallele** e il **dislivello** Δ_{AB} coincide con la distanza tra piani orizzontali e paralleli passanti per A e per B, dunque è rappresentato dal segmento rettilineo verticale BB'.



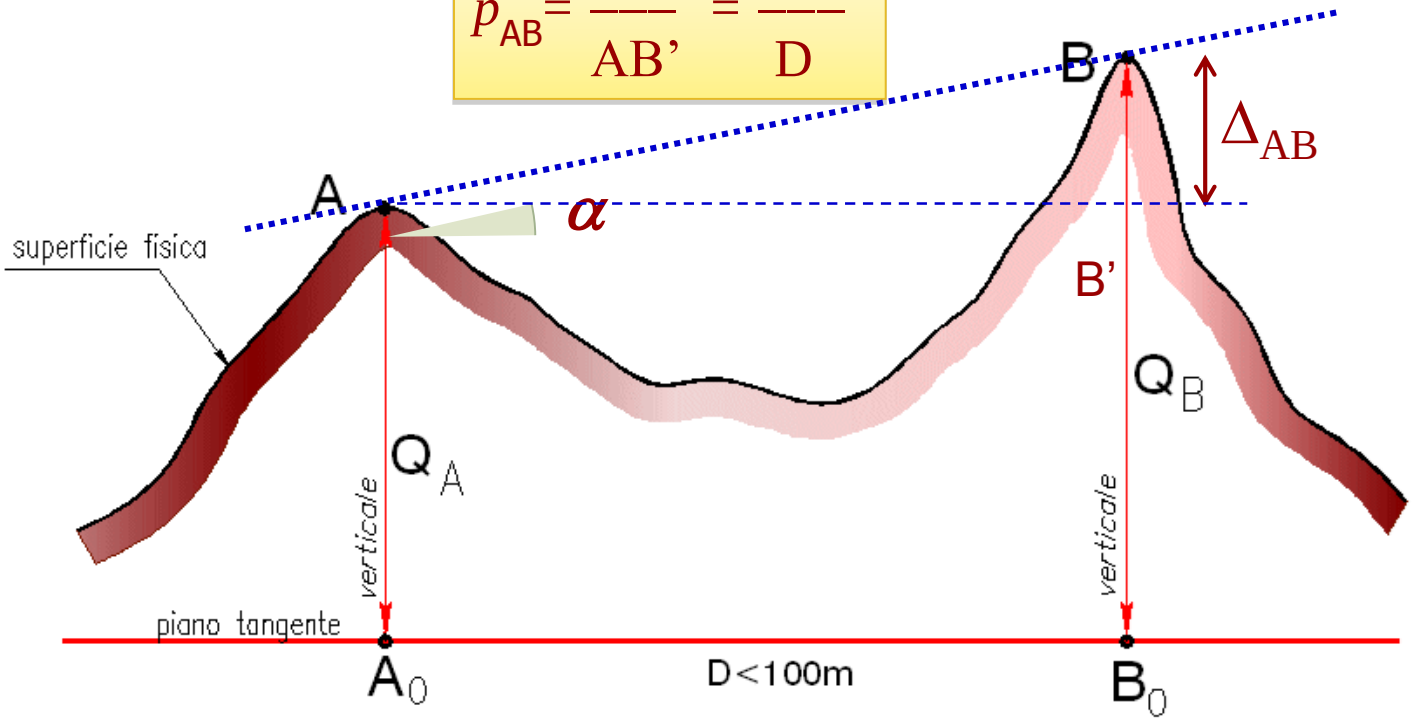
PENDENZA

Immaginiamo una linea retta che congiunga i punti A e B sul terreno:

- Si definisce **pendenza** di questa retta la **tangente dell'angolo** α che questa retta forma con l'orizzontale: $p_{AB} = \mathrm{tg}\alpha$

- Considerando il triangolo retto ABB' la **pendenza** della retta AB può essere ridefinita con una forma più utile e conveniente:

$$p_{AB} = \frac{\Delta_{AB}}{AB'} = \frac{\Delta_{AB}}{D}$$



teodolite

livello

Stazione totale

CLASSIFICAZIONE DELLE LIVELLAZIONI

- Le procedure operative attraverso le quali si **misura** (perlopiù in modo indiretto) il **dislivello** fra due punti vengono dette **livellazioni**.
- Le misure effettuate durante **livellazioni** possono essere realizzate con i **teodoliti** o con strumenti appositamente concepiti: i **livelli**.
- Le **livellazioni** possono essere **classificate** in due grandi famiglie in relazione al fatto che, per la misura del dislivello tra due punti, richiedano, oppure non richiedano la conoscenza della **distanza** D tra gli stessi punti.

LIVELLAZIONI a VISUALE LIBERA
(richiedono la distanza D)

- **livellazione ecclimetrica**
- **livellazione tacheometrica**
- **livellazione trigonometrica**
- **livellazione clisimetrica**

Pro: l'uso del **teodolite** ne consente la misura contestualmente alle altre attività planimetriche.
Contro: scarsa precisione.

LIVELLAZIONI a VISUALE OBBLIGATA
(NON richiedono la distanza D)

- **livellazione geometrica**
- **livellazione per coltellazione**

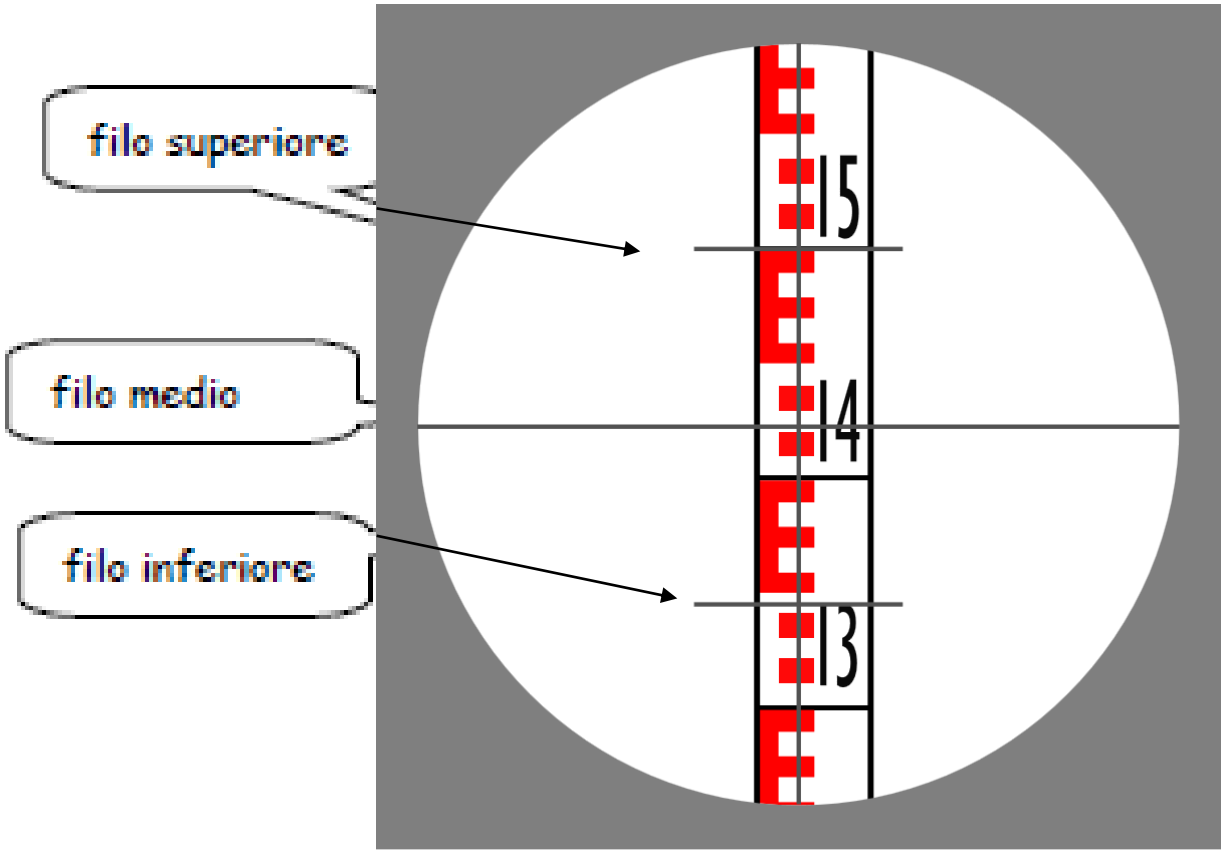
Pro: buona precisione
Contro: l'uso di **strumenti dedicati** ne richiede la misura in sessioni separate dalle altre attività di misura (angoli e distanze).

MISURA DEI DISLIVELLI:
LE LIVELLAZIONI
A VISUALE OBBLIGATA

LIVELLAZIONI GEOMETRICHE

- Le **livellazioni geometriche** si eseguono utilizzando uno strumento appositamente concepito per queste operazioni: il **livello**.
- Con esso si realizza unicamente, ma con **precisione**, un asse di collimazione **orizzontale**.
- Con l'uso di questo strumento non è necessario conoscere o misurare la **distanza** tra i due punti, né misurare **angoli** o **altezze strumentali**, ma occorre unicamente effettuare le **letture al filo medio** del reticolo sulla stadia verticale (**battute**).
- Questo comporta procedure operative molto **semplici** e **rapide** (in quanto non è necessario fare stazione su un determinato punto) e in grado di fornire la misura dei dislivelli con **grande precisione** (ordine del mm/100 m e anche inferiori).

Linea di mira
(orizzontale)



Filo superiore: m 1,500

Filo medio: m 1,422

Filo inferiore: m 1,344

Controllo:
m (1,500+1,344)/2 = m1,422

LIVELLI

I livelli sono strumenti a cannocchiale orizzontale, con i quali si realizza una **linea di mira orizzontale.**

Vengono utilizzati per misurare dislivelli con la tecnica della **livellazione geometrica (a visuale orizzontale).**

La misura del dislivello avviene effettuando con il livello letture su una **stadia** (livellazione geometrica da un estremo) o una **coppia di stadie (livellazione geometrica** dal mezzo).

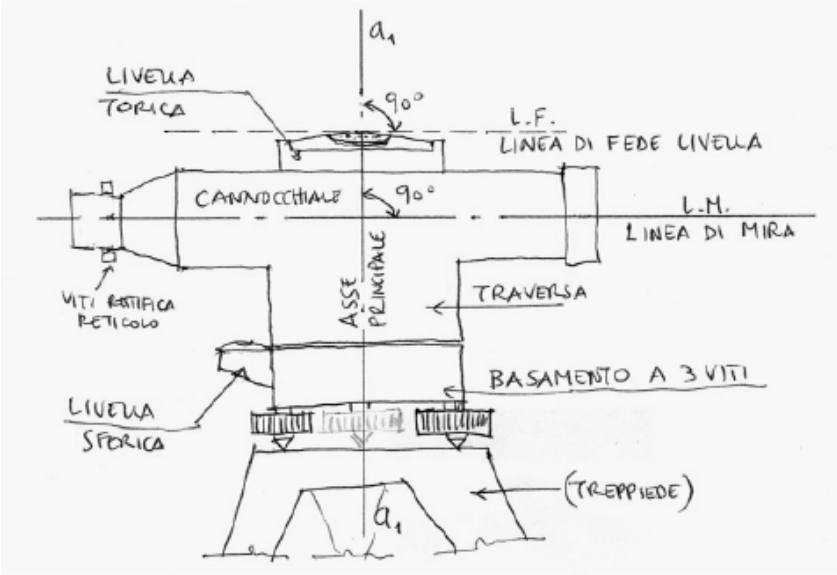
Tipi di livelli:

- **LIVELLI MANUALI (orizzontalità della linea di mira ottenuta** manualmente). Quelli principali utilizzati ancora oggi sono riconducibili a due sottocategorie: livelli a cannocchiale fisso **senza vite di elevazione e con vite di elevazione.**

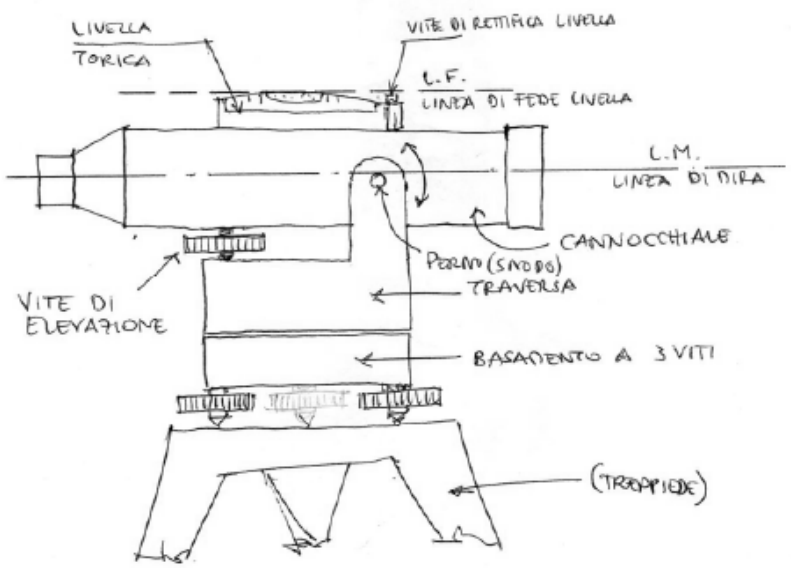
-AUTOLIVELLI (orizzontalità ottenuta in maniera automatica);

- **LIVELLI DIGITALI (orizzontalità e lettura alla stadia ottenute in** maniera automatica).

LIVELLI MANUALI

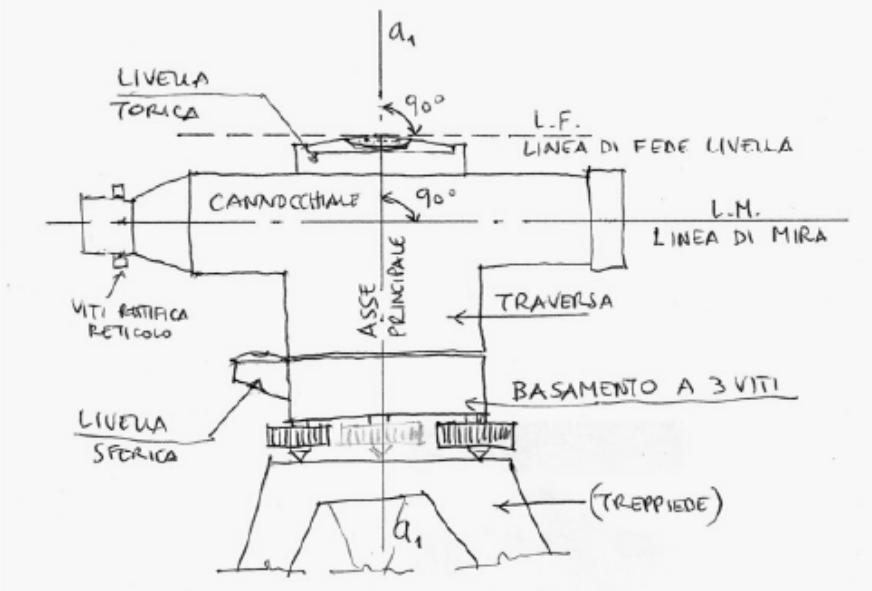


Livello senza vite di elevazione



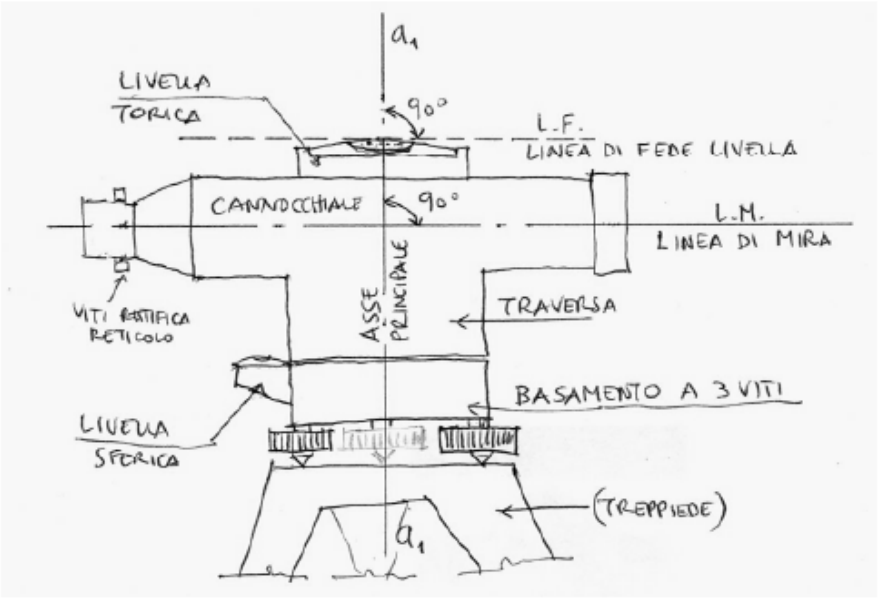
Livello con vite di elevazione

Livello senza vite di elevazione



Sono composti da:
- un **basamento con 3 viti calanti, simile a quello** del teodolite;
- una parte superiore girevole detta **traversa (che in sostanza è un'alidada semplificata) alla quale è collegato** rigidamente il **cannocchiale.**

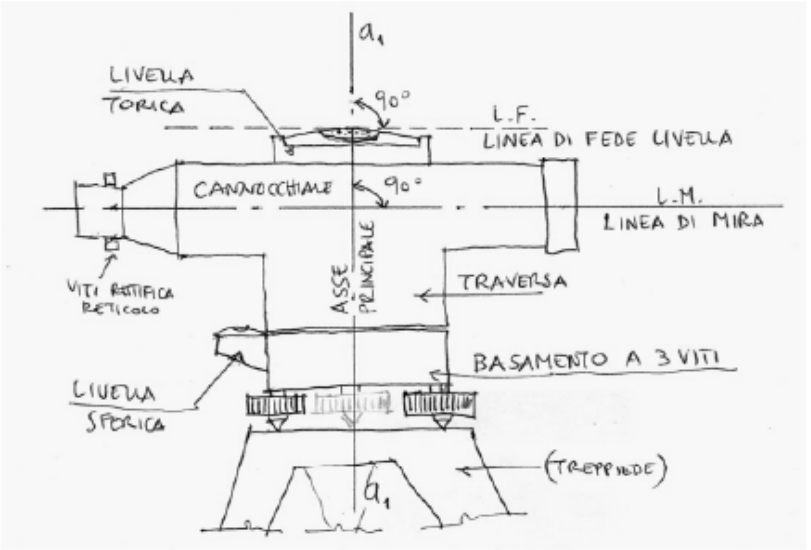
La traversa e il cannocchiale sono un pezzo unico, essendo connessi rigidamente senza articolazioni.



Questo tipo di livello è il più semplice costruttivamente e viene utilizzato prevalentemente in misure di cantiere senza grandi requisiti di precisione.

Alcuni livelli di questo tipo hanno anche un **cerchio graduato azimutale, osservabile direttamente o attraverso un microscopio, da utilizzare per** l'esecuzione di semplici rilievi e tracciamenti all'interno di piccoli cantieri.

L'asse di rotazione della traversa viene detto **asse principale, in modo** analogo a quello del teodolite.



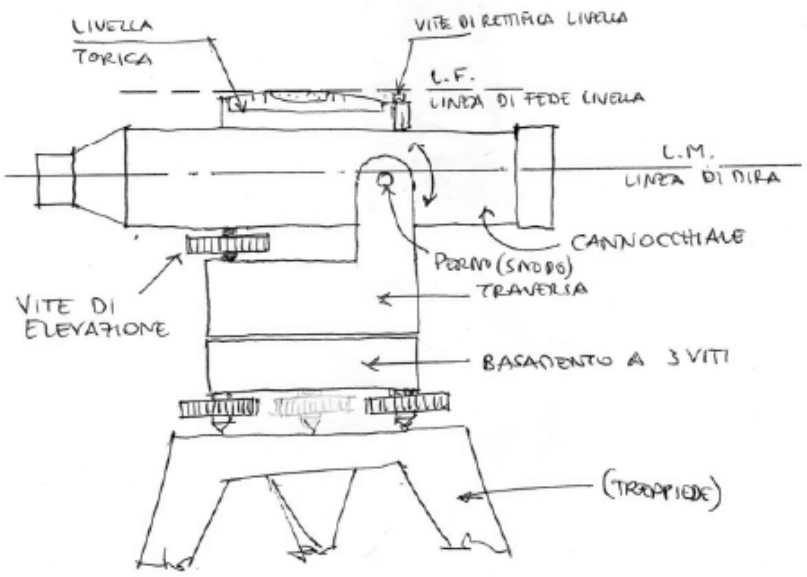
Condizioni di esattezza:

-l'asse principale deve essere verticale;

-la **linea di mira (asse di collimazione) deve essere perpendicolare all'asse principale,** in modo tale da risultare orizzontale quando l'asse principale è stato verticalizzato;

- la linea di fede della livella torica deve essere perpendicolare all'asse principale, per poterlo verticalizzare (come nel teodolite).

Livello con vite di elevazione



E' composto da 3 parti principali:
- **basamento con 3 viti calanti,**
- parte superiore girevole detta **traversa,**
- **un cannocchiale collegato alla** traversa mediante un perno che gli consente piccole rotazioni verso l'alto o verso il basso che si ottengono ruotando una apposita vite di manovra detta **vite di elevazione**.

A differenza del tipo senza vite di elevazione, il cannocchiale e la traversa non sono rigidamente connessi ma sono due elementi distinti.

Le **condizioni di esattezza (o di rettifica) per un livello con vite di** elevazione si riducono a **una sola:**

- l' **asse di collimazione deve essere parallelo alla linea di fede della livella,** in modo tale da risultare orizzontale quando la livella è centrata.

AUTOLIVELLI

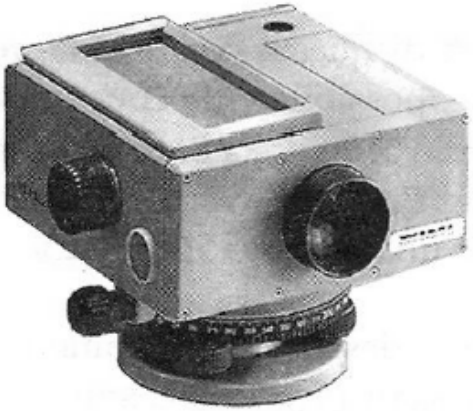
Autolivello Topcon
da cantiere

Zeiss Ni1 First Order Autolevel
with 10mm Parallel Micrometer

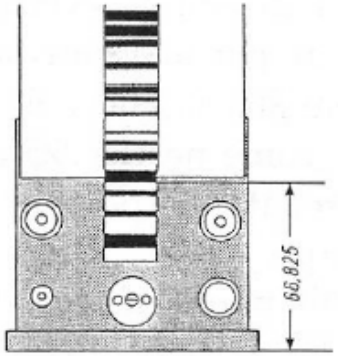
Sono composti anch'essi dalle solite 3 parti principali: un **basamento a 3** viti calanti, una parte superiore girevole detta **traversa e un cannocchiale** collegato alla traversa, apparentemente in modo rigido come nel livello monoblocco, ma in realtà dotato all'interno di un sistema ottico-meccanico di compensazione che dispone **automaticamente orizzontale la linea di mira, da cui il nome di autolivello.**

LIVELLI DIGITALI

Livello digitale
Leica NA 3000



stadia in fiberglass con graduazione a codice



stadia di precisione con graduazione a codice su nastro di invar

Sono la più recente generazione di livelli (anni 1990 circa).
Oltre ad essere autolivellanti, hanno un sistema di lettura automatica della stadia.
La **stadia riporta su un lato una graduazione codificata costituita da una** serie di barre trasversali nere e bianche di diversa ampiezza, che seguono una sequenza prestabilita corrispondente a una sequenza binaria (0011010100001100 1....), in modo analogo ai codici a barre utilizzati nel commercio. Ogni modello di livello digitale funziona quindi solo con la propria stadia codificata.

Livelli digitali

Occorre soltanto collimare la stadia a codice a barre, mettere a fuoco e premere un tasto

CLASSIFICAZIONE DELLE LIVELLAZIONI GEOMETRICHE

- L'uso del livello si basa sul **parallelismo delle verticali** passanti per gli estremi del dislivello da misurare. Pertanto, in questo ambito, viene adottato come superficie di riferimento il **piano tangente** (trascurando gli effetti della curvatura terrestre e della rifrazione atmosferica).
- Ciò è ammissibile per distanze livello-stadia SEMPRE **inferiori a 100 m**.

CLASSIFICAZIONE

In relazione al **numero di stazioni** del livello:

- **semplici** (se il dislivello viene misurato con una sola stazione: D < 100/200 m);
- **composte** (se il dislivello viene misurato con più stazioni: D > 100/200 m).

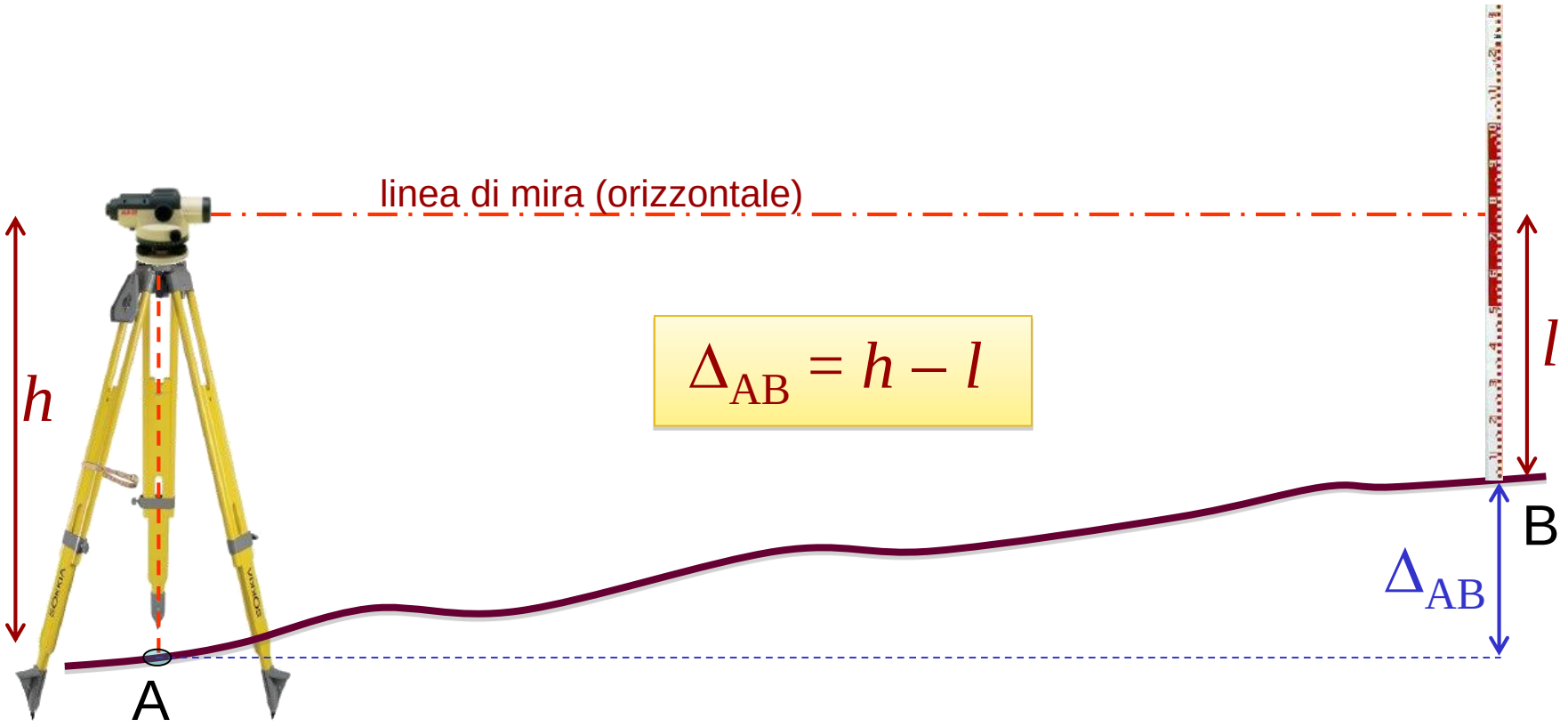
In relazione alla **collocazione** del livello:

- **da un estremo** (valenza solo introduttiva e didattica, **mai usata nella pratica**);
- **in prossimità di un estremo** (usata quando le precisioni non sono spinte);
- **dal mezzo** (la più efficiente, usata quando le precisioni sono stringenti).

LIVELLAZIONE GEOM. DA UN ESTREMO

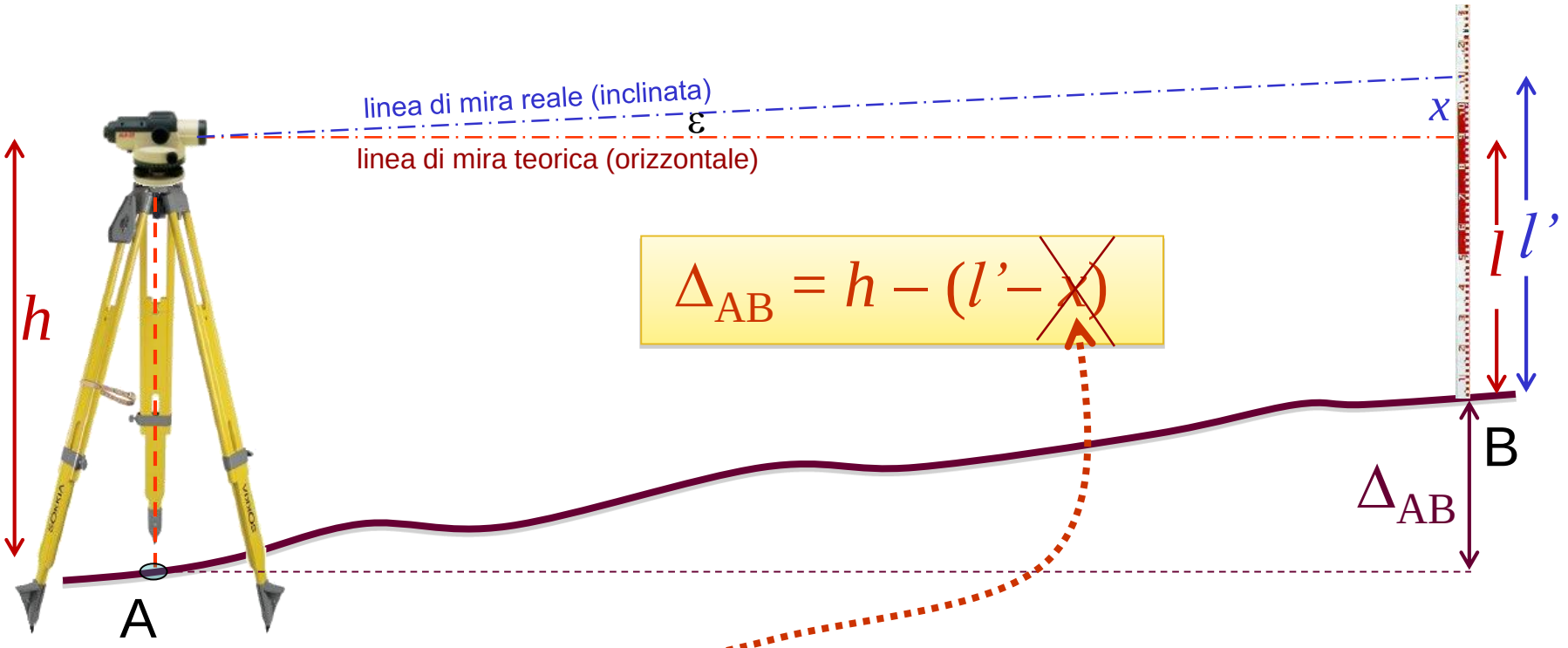
- La livellazione geometrica da un estremo si effettua con il **livello** collocato su un **estremo** e la **stadia verticale** sul **secondo** estremo del dislivello. Questo verrebbe dalla linea di mira e dalla misura precaria dell'**altezza strumentale.**

- Essa di fatto **non viene mai impiegata**, per svariate ragioni, nella pratica operativa, ma possiede interesse solo in ambito teorico e didattico. A testimonianza di ciò **nessun** livello è provvisto di **piombino ottico** per consentire la messa in stazione su un punto prestabilito (come richiesto da questo metodo).



LIVELLAZIONE GEOM. DA UN ESTREMO

- In realtà la linea di mira del livello **non può** essere **perfettamente orizzontale**, a causa degli errori di rettifica del livello e dei suoi dispositivi.
- La linea di mira sarà allora **inclinata** (verso l'alto o verso il basso), anche se di **piccolissime** entità ε, causando l'errata **lettura alla stadia** l' al posto della lettura corretta l, con l'errore x ($l = l' - x$).



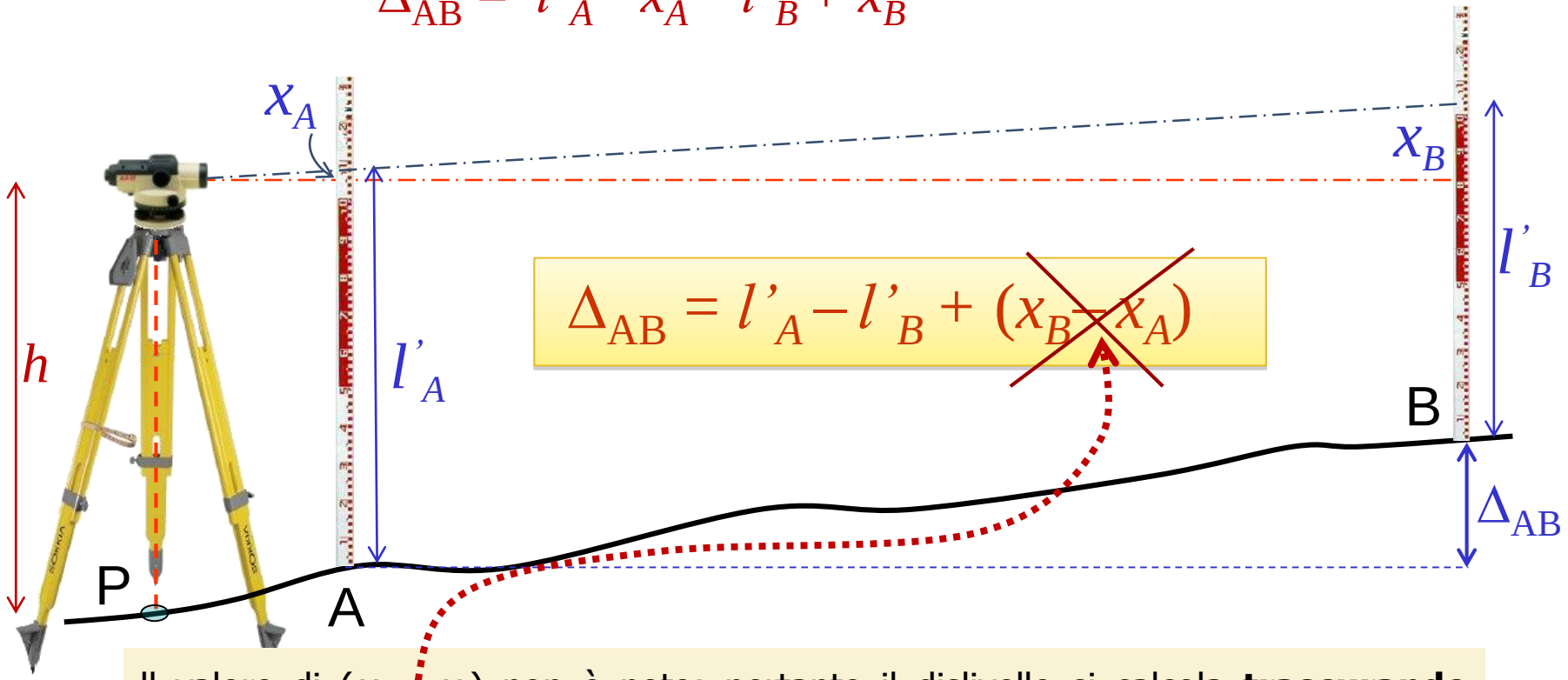
Il valore di x non è noto (non si conosce l'inclinazione dell'asse di mira); pertanto il dislivello si calcola **trascurando** questa quantità e utilizzando la lettura errata l', dunque commettendo un **errore** nella misura del dislivello (che si aggiunge all'incertezza nella misura dell'**altezza strumentale** h).

LIV. GEOM. IN PROSSIMITÀ DI UN ESTREMO

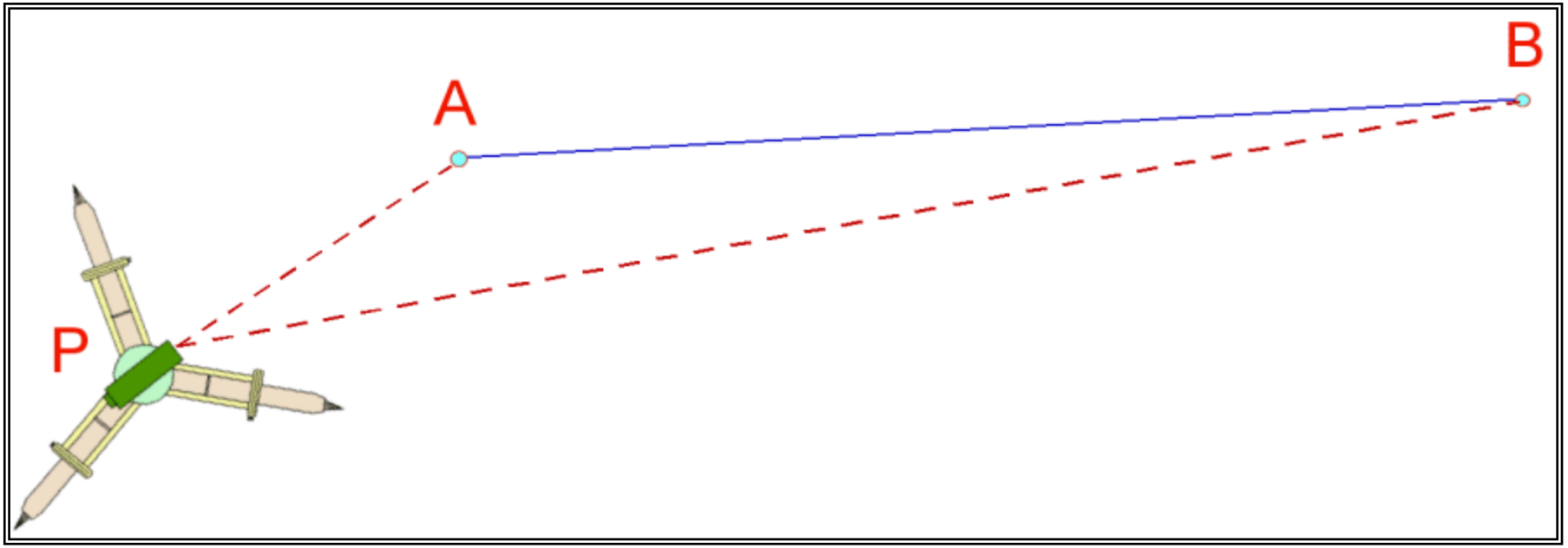
In questo metodo il livello **non viene collocato** su uno dei due estremi A e B, ma viene posto su un altro **punto generico** P **scelto a piacere** (dunque non segnalato) più **vicino** a uno dei due estremi (rispetto all'altro), in generale **fuori** dall'allineamento AB.

$$\Delta_{PA} = h - l'_A + x_A \qquad \Delta_{PB} = h - l'_B + x_B$$

$$\Delta_{AB} = l'_A - x_A - l'_B + x_B$$



Il valore di $(x_B - x_A)$ non è noto; pertanto il dislivello si calcola **trascurando** questa quantità commettendo un **errore** nella misura del dislivello, tuttavia **non è più presente** l'incertezza dovuta nella misura dell'**altezza strumentale** *h*


A
B
P

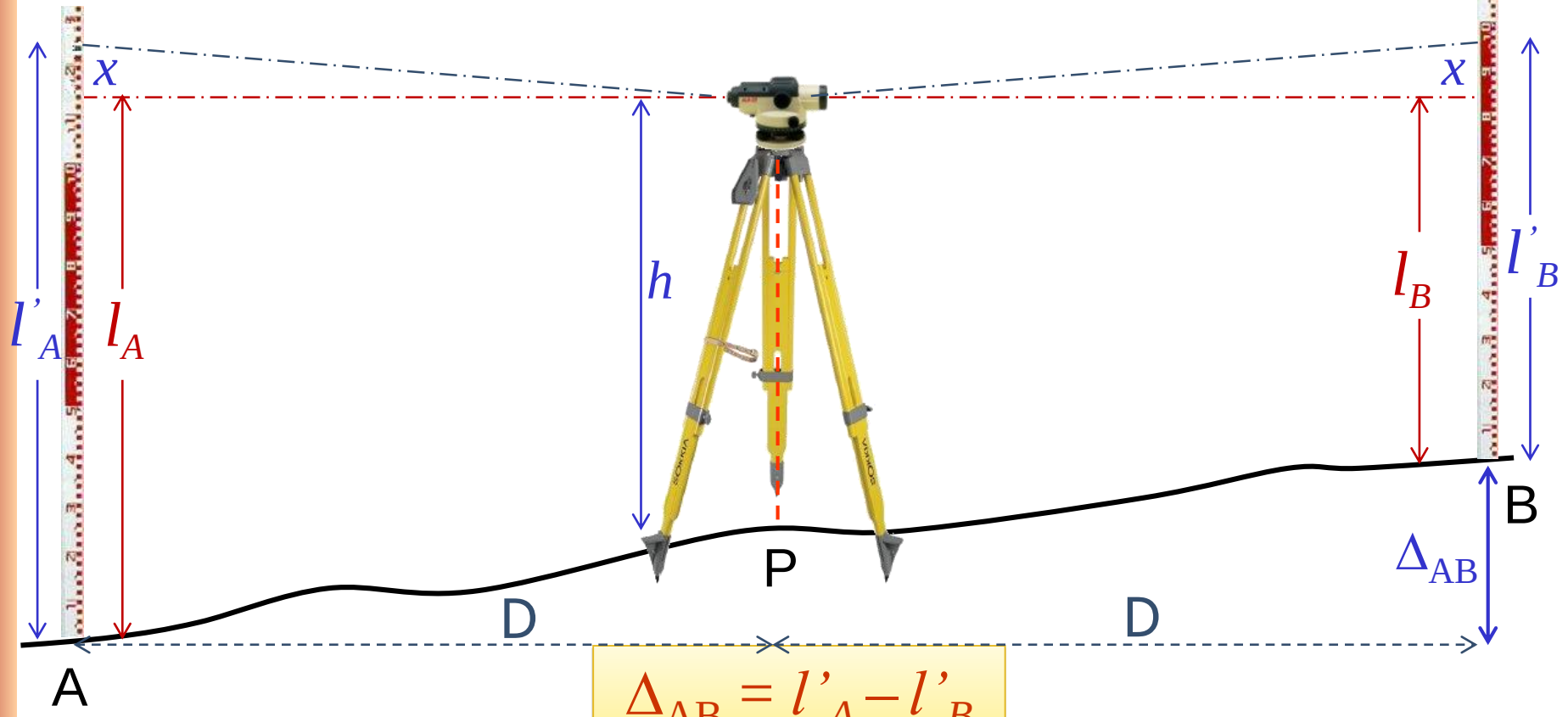
LIVELLAZIONE GEOMETRICA DAL MEZZO

In questo metodo il livello **viene collocato** su un **punto generico** P **scelto a piacere**, ma **approssimativamente <u>equidistante</u>** dagli estremi A e B, in generale **fuori** dall'allineamento AB. Così viene **annullato** l'errore causato dall'imperfetta orizzontalità della linea di mira (infatti, essendo $PA \cong PB$, dovrà anche essere $x_A = x_B = x$).

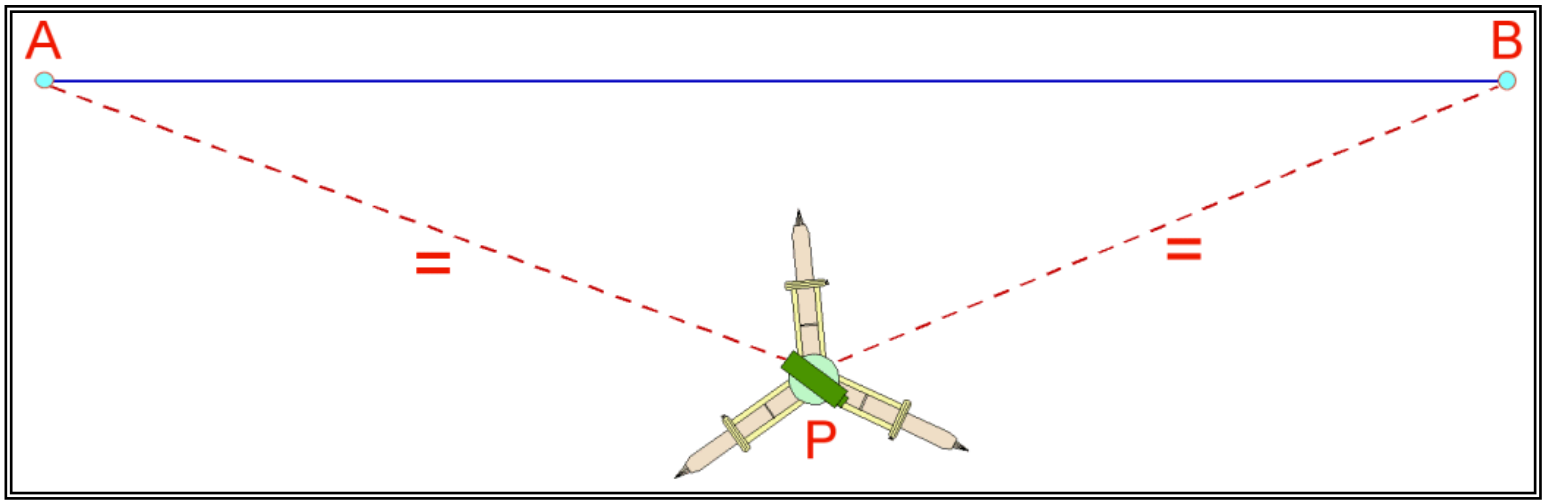
$$\Delta_{PA} = h - l'_A + x$$

$$\Delta_{PB} = h - l'_B + x$$

$$\Delta_{AB} = l'_A - x + - l'_B + x$$



$$\Delta_{AB} = l'_A - l'_B$$


A
B
=
=
P

LIVELLAZIONE GEOMETRICA DAL MEZZO

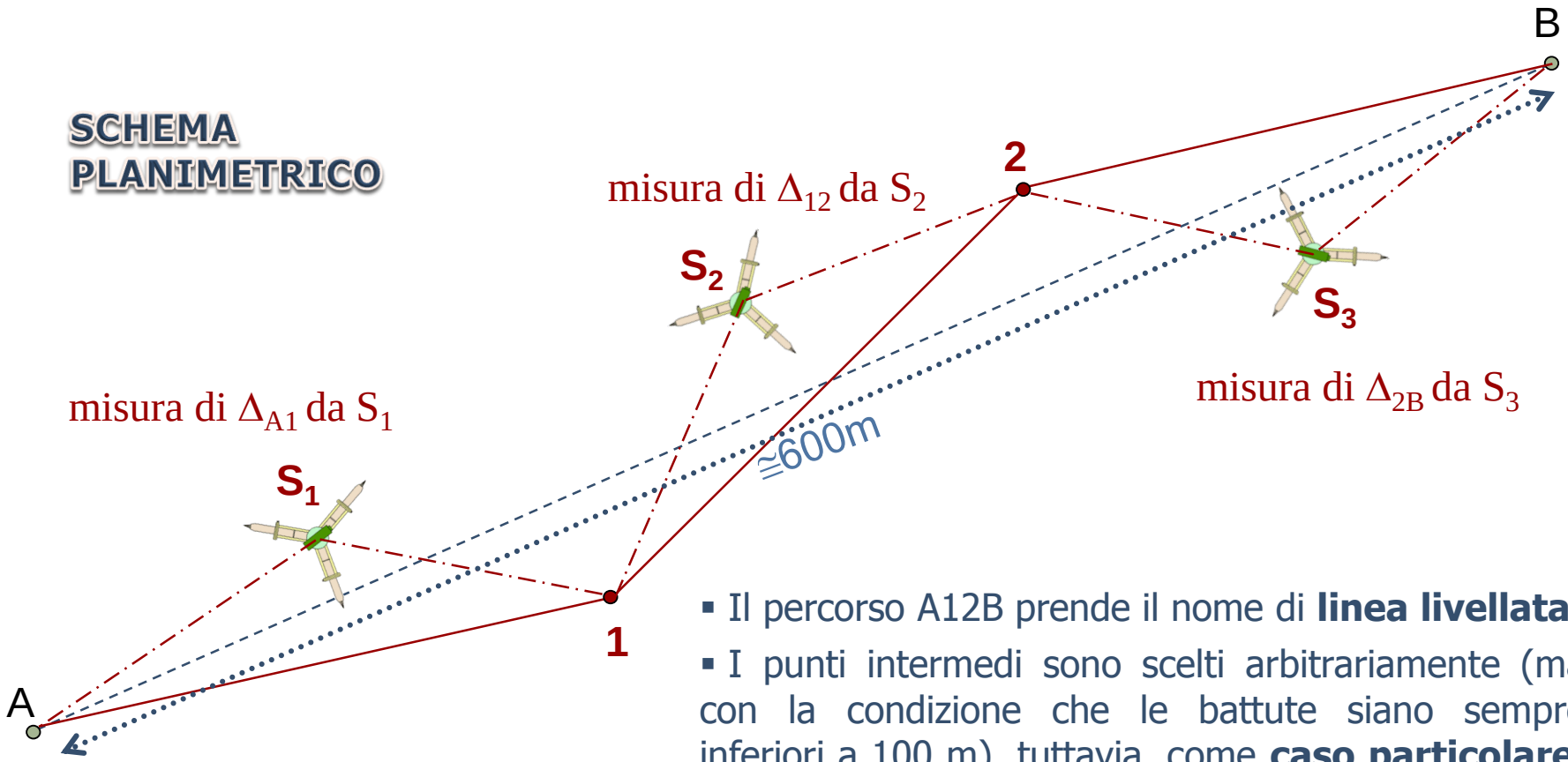
- Nella livellazione geometrica dal mezzo, il dislivello viene misurato con la **differenza** tra la lettura al **filo medio** sulla stadia posta sul primo estremo A (**battuta indietro** o **controbattuta**) e quella analoga eseguita sul secondo estremo B (**battuta in avanti** o **battuta**).
- Essa consente di ottenere precisioni variabili da qualche **millimetro** fino a qualche **decimo di millimetro** (in relazione alla strumentazione usata).
- Essa, inoltre, è anche la livellazione più **rapida** da eseguire.

I VANTAGGI DELLA LIVELLAZIONE GEOM. DAL MEZZO

1. Non occorre misurare l'**altezza strumentale** (dunque si prescinde dalle incertezze della sua misura).
2. Si annullano gli **errori di orizzontalità** della linea di mira, della **curvatura terrestre** e della **rifrazione atmosferica** (per effetto della equidistanza dei punti estremi da quello di stazione).
3. La **distanza** fra i due estremi può raggiungere circa 200 m (100+100), cioè il doppio di quella consentita dalla livellazione da un estremo.
4. È possibile determinare dislivelli paragonabili alla **lunghezza della stadia**.
5. Non è necessario far **stazione** su un punto definito, ma è possibile usarne uno arbitrario.

LIVELLAZIONE COMPOSTA DAL MEZZO

- La **livellazione geometrica composta dal mezzo** viene usata quando si deve misurare il dislivello tra due punti A e B distanti più di 200 m.
- Si suddivide la distanza complessiva tra i due estremi in **tratte parziali** (**non necessariamente allineate**), di lunghezza minore di 200m. In esse si misurano i dislivelli parziali con una successione di **livellazioni semplici dal mezzo**, che poi saranno **sommati** algebricamente.



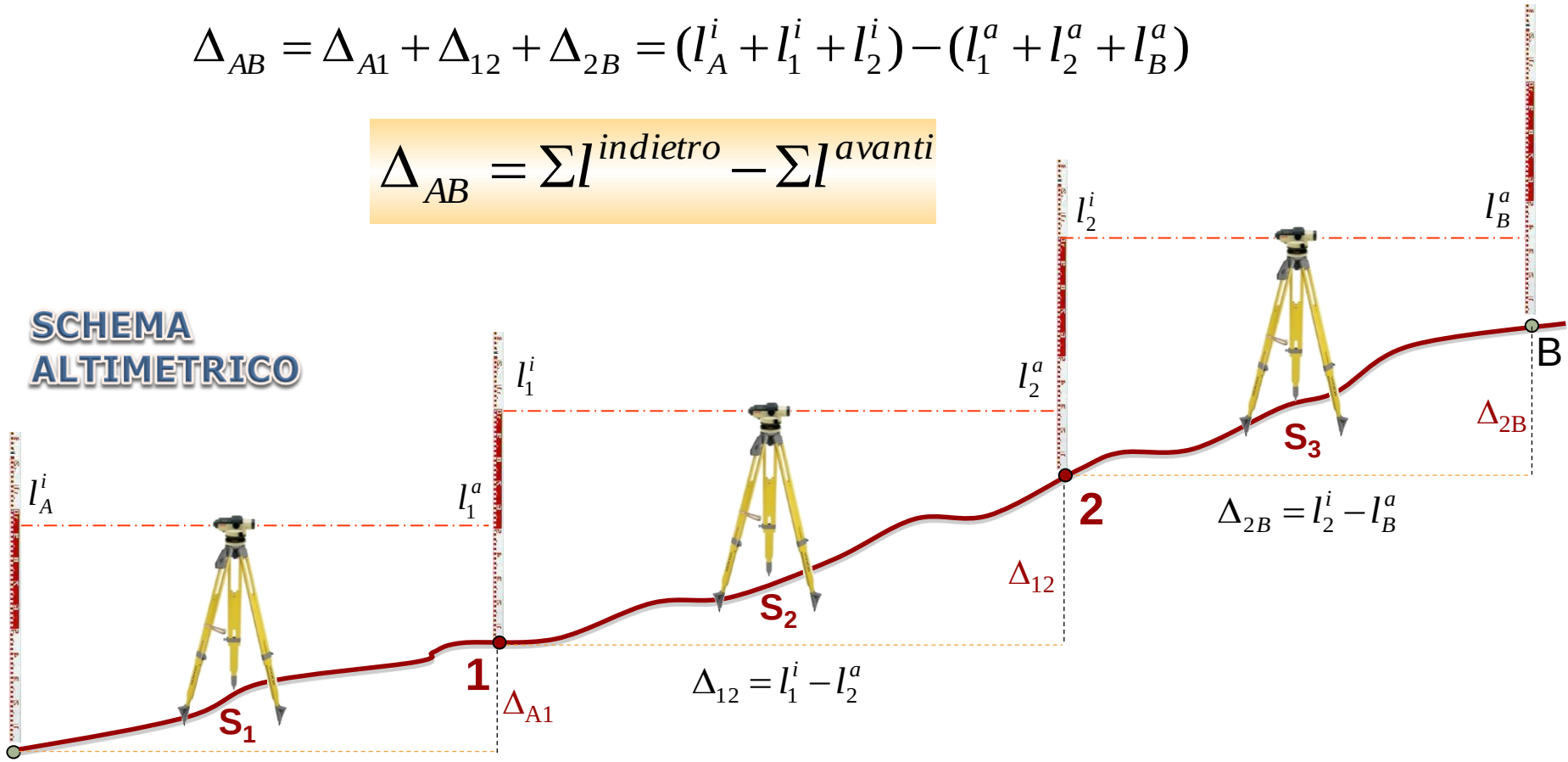
- Il percorso A12B prende il nome di **linea livellata**.
- I punti intermedi sono scelti arbitrariamente (ma con la condizione che le battute siano sempre inferiori a 100 m), tuttavia, come **caso particolare**, essi potrebbero essere scelti sull'allineamento AB.

LIVELLAZIONE COMPOSTA DAL MEZZO

Percorrendo la linea livellata da *A* verso *B*, collocando il livello nei punti S_1, S_2, S_3 scelti in modo arbitrario (ma equidistanti dagli estremi della tratta), si misurano i **dislivelli parziali** relativi ai diversi tratti:

$$\Delta_{AB} = \Delta_{A1} + \Delta_{12} + \Delta_{2B} = (l_A^i + l_1^i + l_2^i) - (l_1^a + l_2^a + l_B^a)$$

$$\Delta_{AB} = \Sigma l^{indietro} - \Sigma l^{avanti}$$



- le letture al f.m. all'indietro l^i sono dette **controbattute**.
- le letture al f.m. in avanti l^a sono dette **battute**.
- Sui **punti intermedi** sono eseguite **sia** letture in **avanti**, **sia** all'**indietro**; mentre sugli **estremi** solo in avanti oppure solo all'indietro.

REGISTRO DELLA LIVELLAZIONE COMPOSTA

Le letture alla stadia della livellazione composta vengono raccolte in un opportuno **registro** di campagna sul quale si riconoscono essenzialmente due colonne, una per le *battute*, l'altra per le *controbattute* :

Staz.	Punto battuto	Letture f.m. stadia	
		indietro	avanti
S_1	**A** **1**	2,215	1,015
S_2	**1** **2**	1,986	0,874
S_3	**2** **3**	2,124	1,414
S_4	**3** **B**	1,819	0,616
	$\sum l$ indietro	**8,144**	
	$\sum l$ avanti		**3,919**
	Dislivello	Δ_{AB} = 8,144 - 3,919 = + 4,225	

Punto battuto	Letture f.m. stadia	
	indietro	avanti
A	2,215	---
1	1,986	1,015
2	2,124	0,874
3	1,819	1,414
B	---	0,616
$\sum$	**8,144**	**3,919**
Δ	Δ_{AB} = 8,144 - 3,919 = + 4,225	

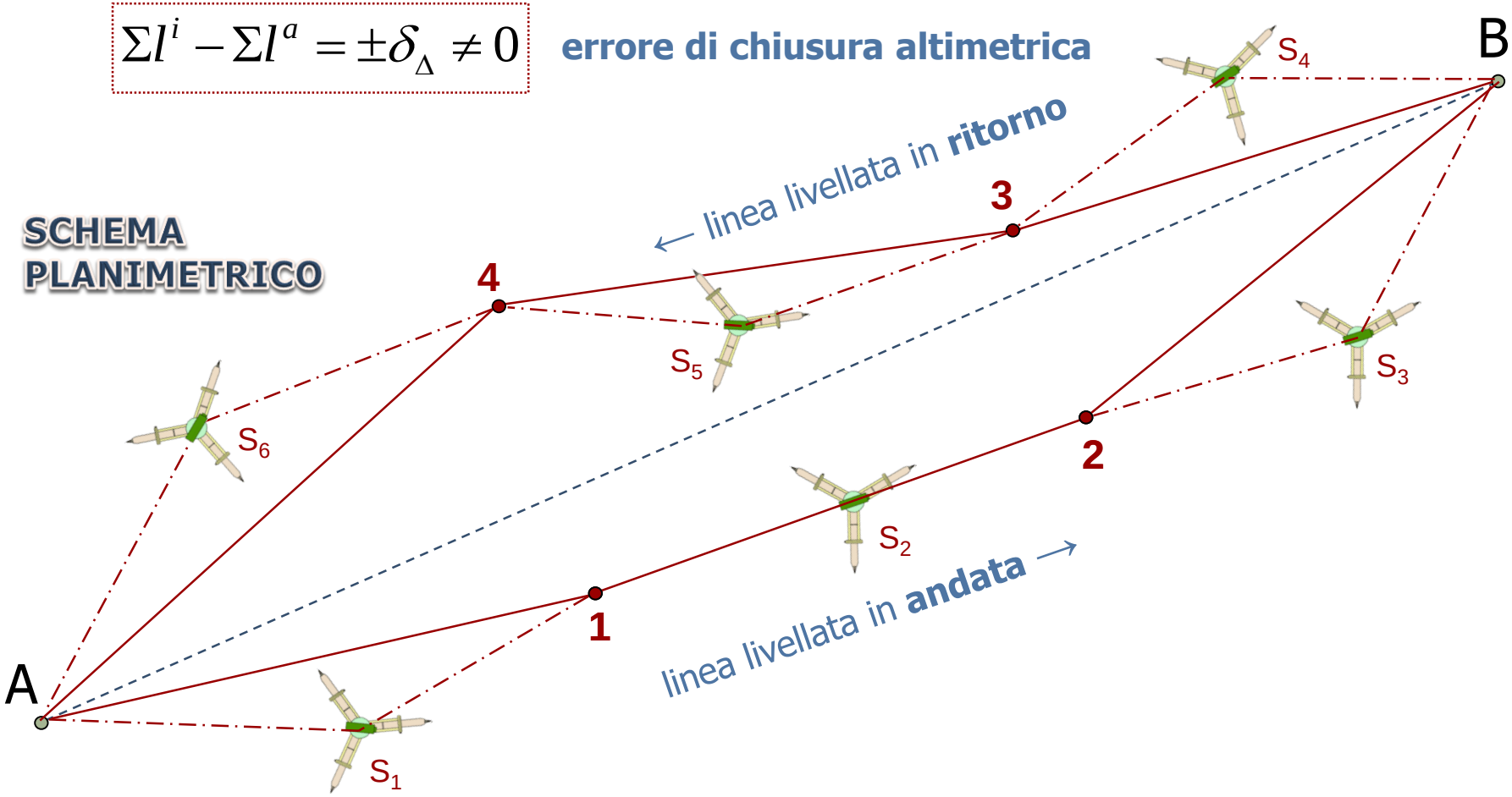
- i **dislivelli parziali** Δ_{A1}, Δ_{12}, ... possono (eventualmente) essere calcolati facendo la differenza tra la lettura all'indietro e quella in avanti del tratto considerato.
- Nel registro tali letture vanno individuate **diagonalmente**.

LIVELLAZIONE COMPOSTA CHIUSA

Quando gli estremi del dislivello **coincidono**, esso è nullo. Allora la **somma delle battute** (letture in avanti) dovrebbe essere **uguale** a quella delle **controbattute** (letture all'indietro). La presenza di errori impedisce il rispetto di questa condizione teorica.

$$\Delta_{AA} = \Sigma l^i - \Sigma l^a = 0 \Rightarrow \Sigma l^i = \Sigma l^a$$ condizione teorica

$$\Sigma l^i - \Sigma l^a = \pm \delta_\Delta \neq 0$$ **errore di chiusura altimetrica**



CONTROLLO E COMPENSAZIONE

- L'errore di chiusura altimetrica deve essere contenuto entro i limiti di **tolleranza** prevista per la misura.

$$|\delta_\Delta| \leq T_a$$

- La **tolleranza** per il controllo dell'errore di chiusura altimetrica, espressa in **millimetri**, è data da una formula in cui è presente l'**errore medio chilometrico** μ_k (caratteristico di ciascun livello, e **certificato** dalla Casa costruttrice), e dallo sviluppo L della linea livellata **espressa in km**.

$$T_a = 3\mu_K\sqrt{L}$$

in millimetri

- La compensazione altimetrica (empirica) inizia con il calcolo dell'**errore unitario** K_Δ (per m di linea livellata).

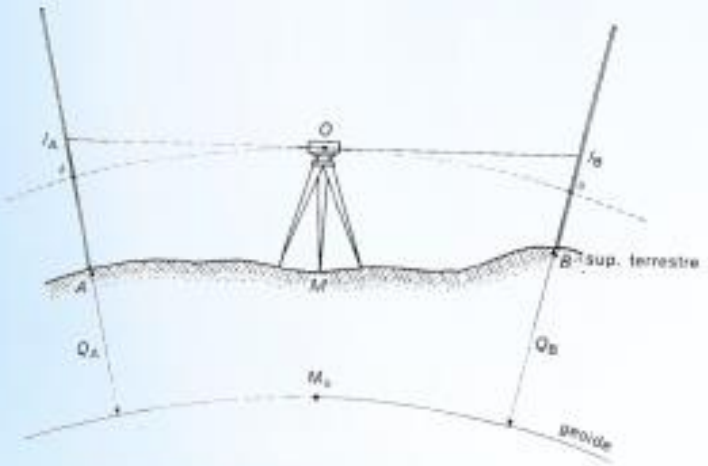
$$K_\Delta = -\frac{\pm\delta_\Delta}{L}$$

- Successivamente si correggono i singoli dislivelli parziali proporzionalmente alla **lunghezze** delle corrispondenti tratte, e invertendo il segno.

$$\Delta'_{A1} = \Delta_{A1} + K_\Delta \cdot A1$$
$$\Delta'_{12} = \Delta_{12} + K_\Delta \cdot 12$$
$$\Delta'_{23} = \Delta_{23} + K_\Delta \cdot 23$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Livellazione Geometrica dal Mezzo (1/4)

In generale la **livellazione geometrica** è un metodo di misura con il quale si stima il dislivello tra due punti utilizzando uno strumento (*livello*) a visuale orizzontale. La lettura delle altezze relative viene fatta sulle stadie che, a seconda della precisione richiesta, possono essere in *invar* (livellazione di precisione o di alta precisione) o in *legno*.



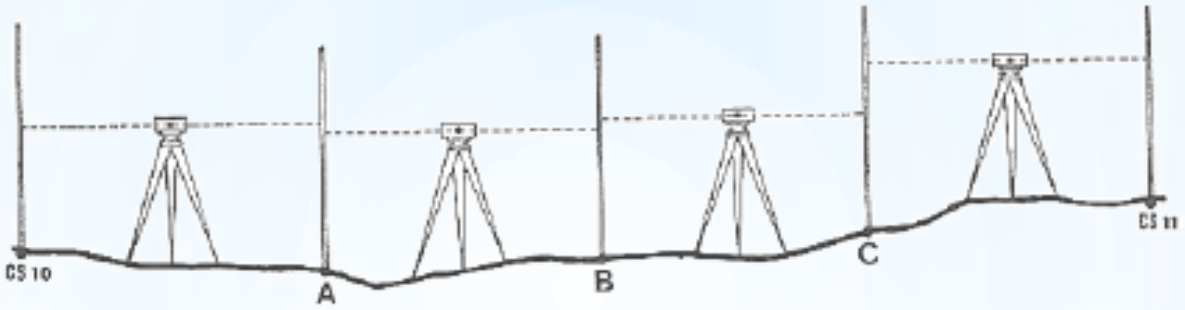
La **livellazione geometrica dal mezzo** si esegue ponendo il livello in posizione intermedia tra due stadie, poste tra loro ad una distanza massima di 100 m.
Il **dislivello** relativo ad una singola battuta di livellazione sarà dato dalla differenze fra le letture nelle posizione *avanti* l_A ed *indietro* l_B della stadia rispetto alla posizione del livello.

$$\Delta_{AB} = l_A - l_B$$

La condizione di **simmetria** consente di limitare al massimo l'influenza dei seguenti fattori:

- presenza di eventuali errori residui di orizzontalità della linea di mira;
- presenza di eventuali errori dovuti a spostamenti dell'asse di collimazione in seguito all'adattamento del sistema di messa a fuoco (che sono minimi quando la collimazione avviene su distanze simili);
- errori dovuti alla rifrazione atmosferica (che si dovrebbe presentare con effetti simmetrici nelle due letture).

Livellazione Geometrica dal Mezzo (2/4)

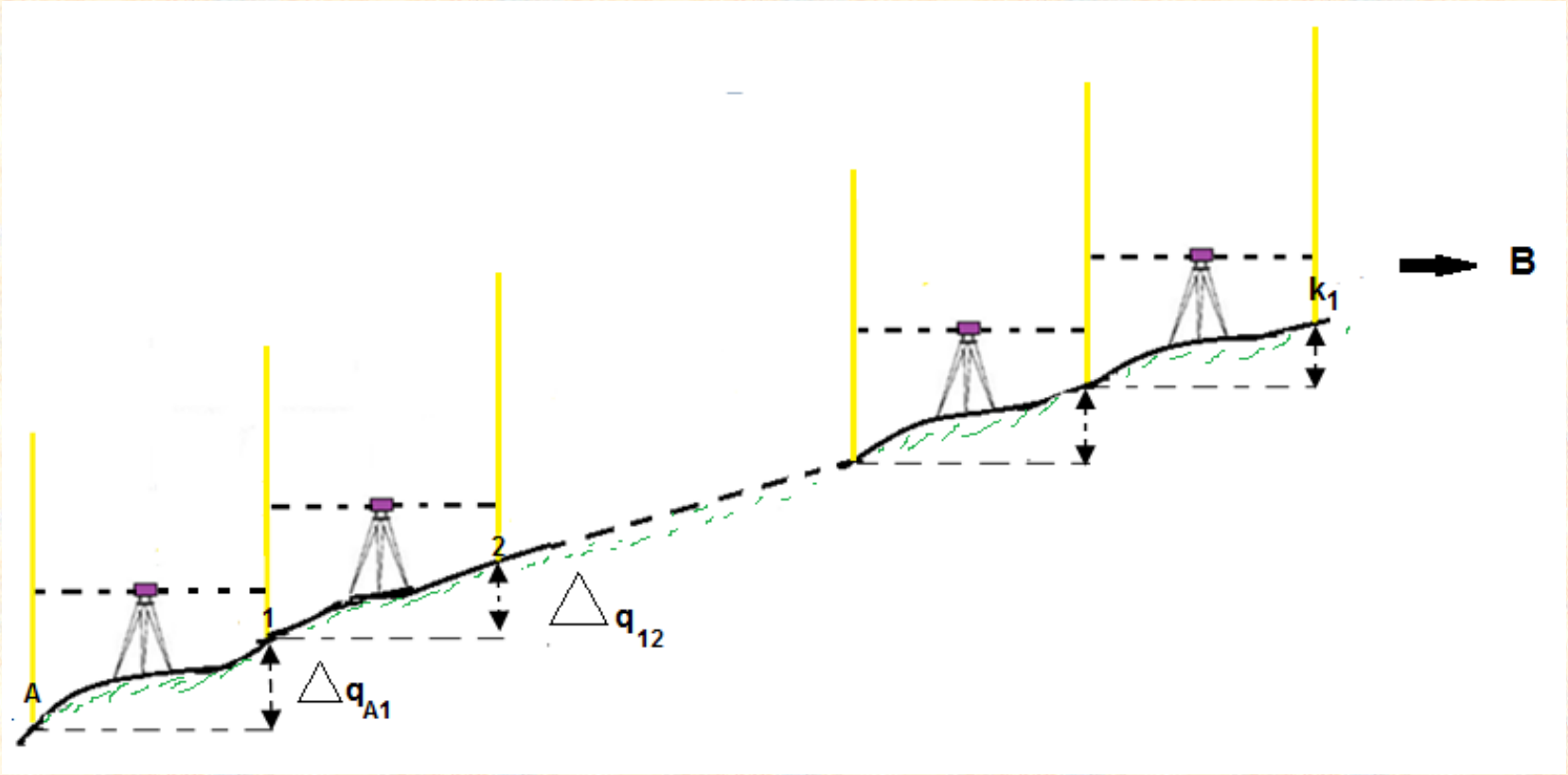


Se la misura del dislivello coinvolge punti molto distanti fra loro, il rilievo deve essere spezzato in un certo numero di singole battute (massimo 100 m) che si sviluppano lungo un percorso che congiunge i due punti (*linea di livellazione*). Il dislivello, in tal caso, sarà dato dalla differenza fra la sommatoria delle letture indietro e quella delle letture avanti.

$$\Delta_{CS_{10}-CS_{11}} = \sum l_i - \sum l_a$$

- La tecnica consente una precisione massima nella determinazione dei dislivelli anche inferiore ad 1mm/km da verificare attraverso i percorsi di andata e ritorno (*livellazione di alta precisione*);
- Nei punti intermedi la stadia viene appoggiata su una apposita piastra battuta sul terreno. Nel passaggio da una stazione alla successiva la stadia viene fatta ruotare delicatamente su se stessa in modo da evitare pressioni che ne provocherebbe l'affondamento provocando un errore nella lettura della battuta successiva.

“n” battute di livellazione formano la linea di livellazione.



Livellazione Geometrica dal Mezzo (3/4)

Le letture sono fatte con lo stesso strumento e nelle stesse condizioni

Errore Medio a Priori della Singola Battuta

$$\Delta_{AB} = l_i - l_a \Rightarrow \sigma_\Delta^2 = \sigma_i^2 + \sigma_a^2 = 2\sigma_l^2 \Leftrightarrow \sigma_\Delta = \sigma_l\sqrt{2}$$

Legge di propagazione della Varianza

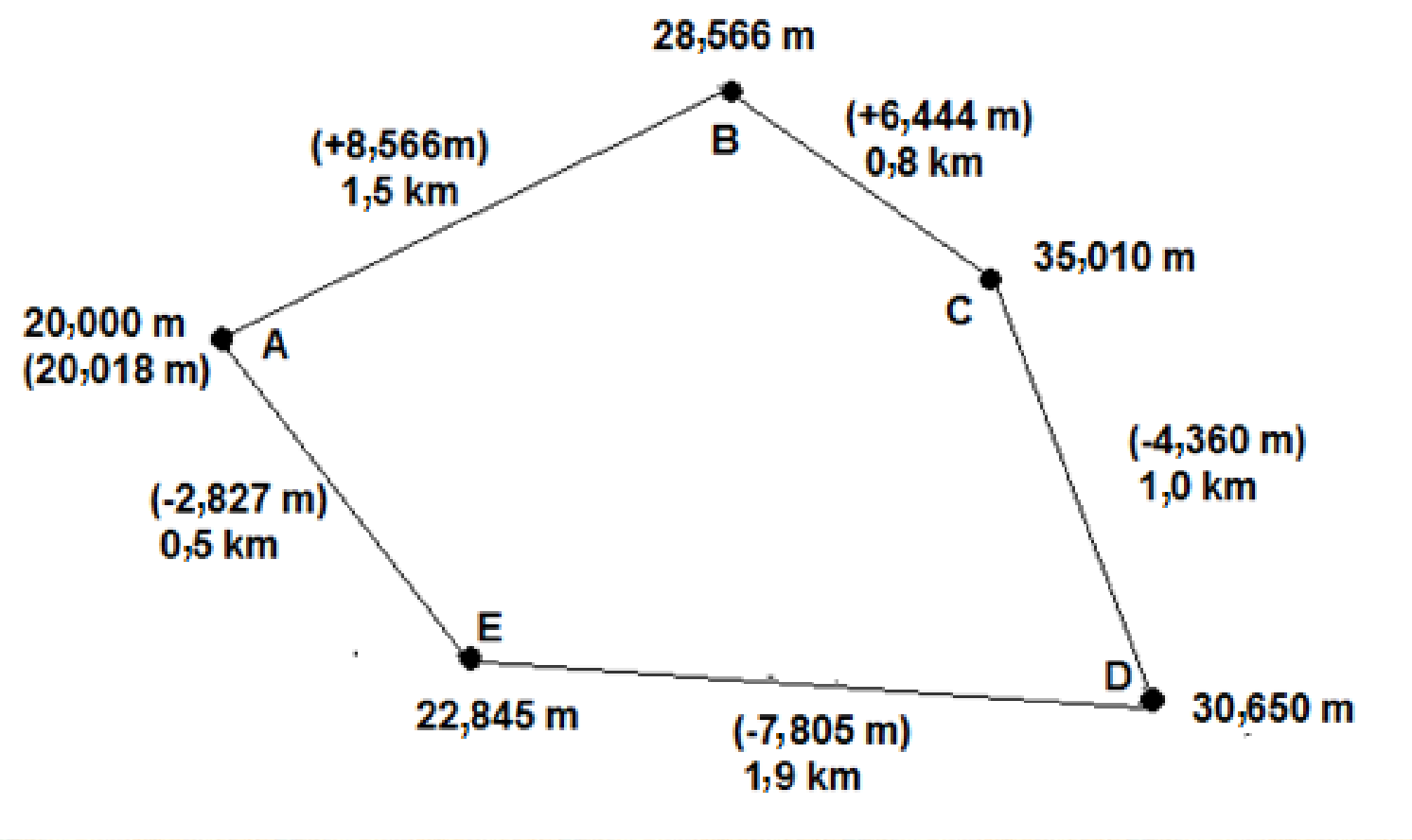
Dipende dalla strumentazione

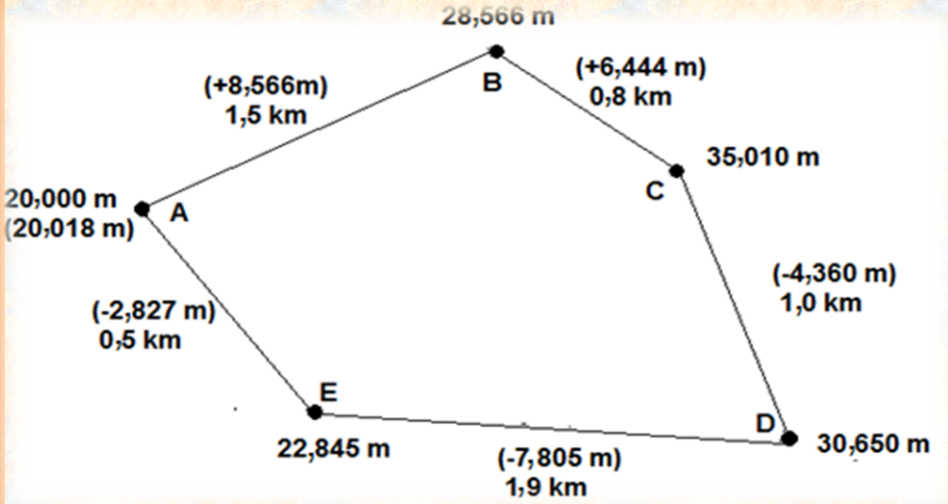
Errore Medio a Priori della Linea di Livellazione

$$\sigma_\Delta = \sigma_l\sqrt{2n} = \sigma_l\sqrt{\frac{D}{d}}$$

Se D è la lunghezza totale della linea di livellazione e $2d$ è la lunghezza della singola battuta, allora il numero totale di battute n può essere espresso come $n = D / (2d)$.

In Figura è rappresentato un circuito (loop) di livellazione con origine nel punto A. Sono anche indicati i punti intermedi e relativi valori delle quote determinate, compreso il valore del punto di chiusura coincidente con A





Esempio di compensazione con un errore pari a 18 mm e una distanza totale pari a 5,7 km

Correzione sulla quota di un estremo del singolo segmento:
(0,018 m /5700 m)* distanza espressa in metri

LATO	CORREZIONE (mm)
AB	-5
BC	-2
CD	-3
DE	-6
EA	-2

Punto	VALORE PRIMA DELLA COMPENSAZIONE (m)
A	20,000
B	28,566
C	35,010
D	30,650
E	22,845

Punto	VALORE COMPENSATO (m)
A	20,000
B	28,561
C	35,003
D	30,640
E	22,829

Errori possibili

- quali errori introdurremmo se utilizzassimo il piano tangente per grandezze estese?

- In altri termini, quali risultati darebbe la livellazione geometrica se si eseguisse, ad esempio dal mezzo, per distanze di alcune centinaia di metri tra i punti?

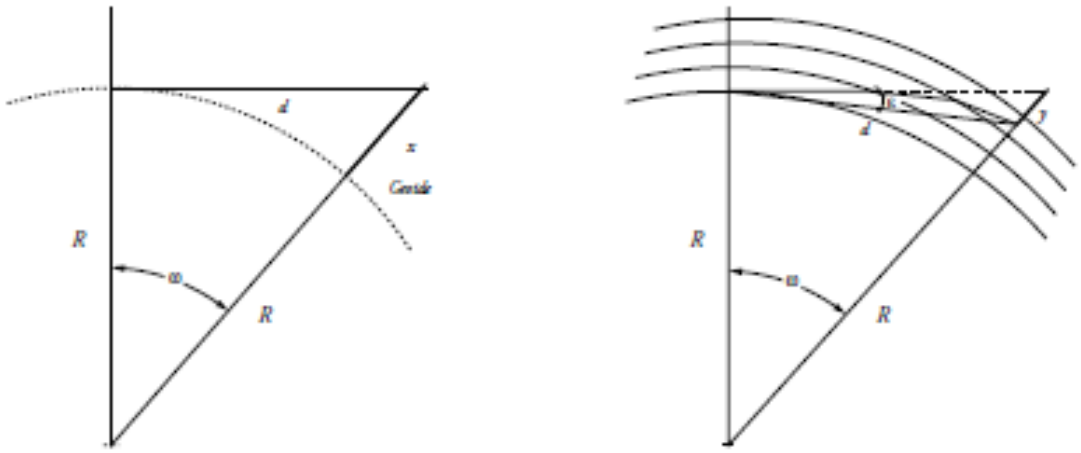


Fig. 10.3 – a. Errore di curvatura terrestre – b. Errore di rifrazione.

Osserviamo la figura 10.3a. Nell'ipotesi che, in un ambito limitato, geoide e sfera locale siano fra loro paralleli, l'errore di curvatura terrestre è dato da:

$$x = \frac{R}{\cos\omega} - R = R\left(\frac{1}{\cos\omega} - 1\right)$$

sviluppando in serie il coseno e arrestandosi al primo termine si ha:

$$\frac{x}{R} \approx \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{2}} - 1 \approx 1 + \frac{\omega^2}{2} - 1 = \frac{\omega^2}{2}$$

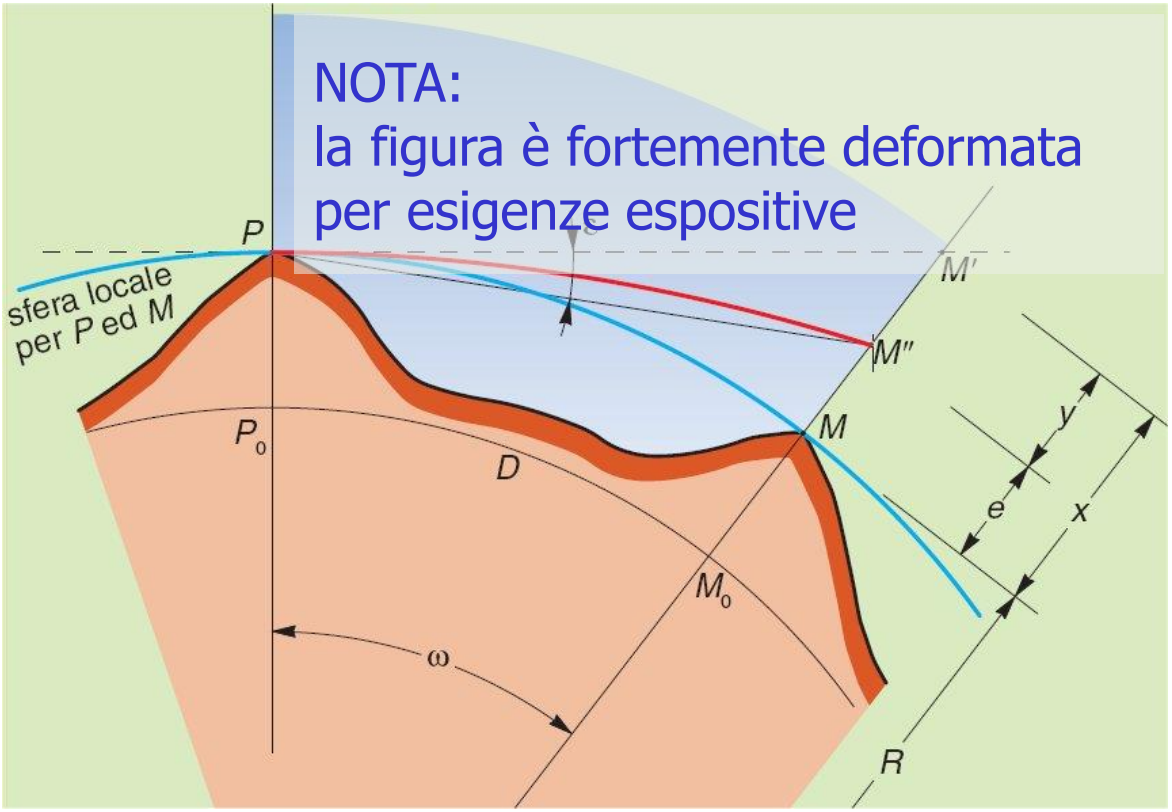
da cui:

$$\frac{x}{R} = \frac{d^2}{2R^2}; \qquad x = \frac{d^2}{2R}$$

ERRORE LINEARE DI SFERICITÀ

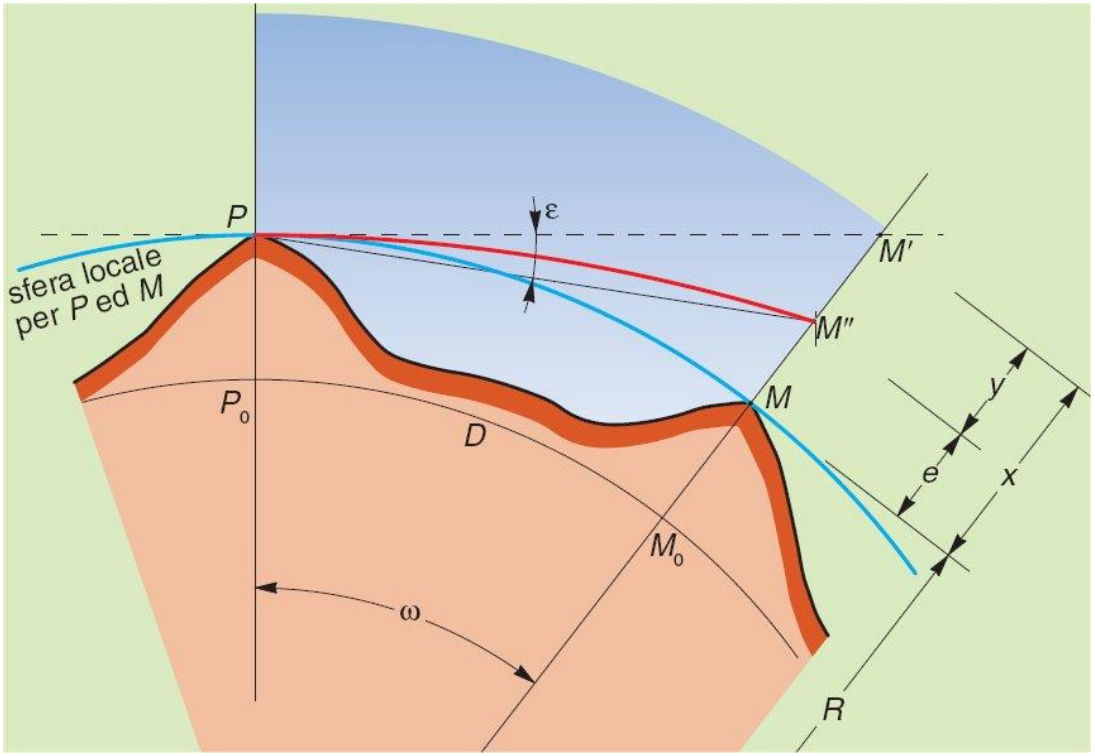
- I due punti P ed M sono alla stessa distanza dalla superficie di riferimento scelta per la terra, ad esempio la sfera locale; dunque essi hanno la stessa quota, rispetto a tale superficie e il loro **dislivello è nullo**.
- Se si adotta il piano tangente in P alla sfera locale, i punti P ed M **non hanno più la stessa quota** e il loro **dislivello** è il **segmento** $x = MM'$ (**errore di sfericità**):

$$x = \frac{D^2}{2R}$$



ERRORE ANGOLARE DI RIFRAZIONE

- In **assenza di atmosfera**, la linea di mira di un teodolite collocato in P (pensata orizzontale per semplicità) seguirebbe una **traiettoria rettilinea** e intercetterebbe in M' la verticale per M.
- Tuttavia la presenza dell'atmosfera (con i suoi strati a diversa densità) impone alla stessa linea di mira una **traiettoria curva** (verso il basso) che intercetta in M" la verticale per M.
- L'angolo ε che formano la traiettoria rettilinea teorica e la **congiungente PM"** si chiama **errore angolare di rifrazione**:



- L'angolo ε è proporzionale a metà dell'angolo al centro tra i punti P e M, a mezzo di un parametro K detto **coefficiente di rifrazione atmosferica** (perché dipende dalle **condizioni atmosferiche**).

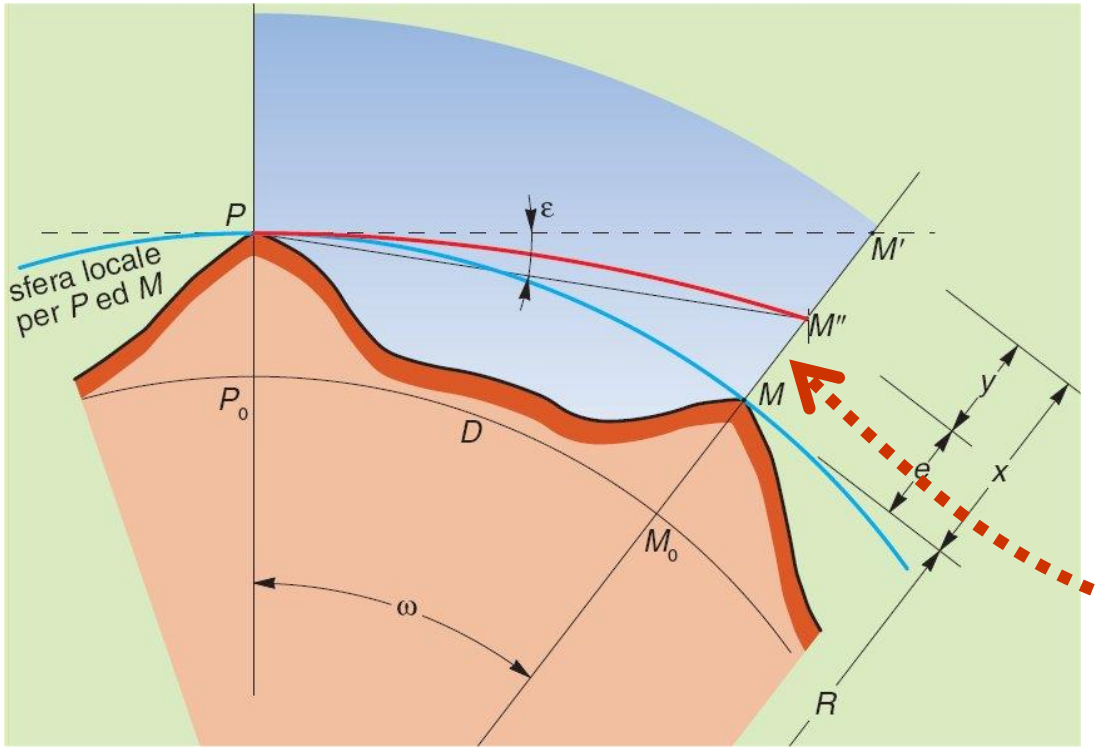
$$\varepsilon^{rad} = K \cdot \frac{\omega^{rad}}{2} = K \cdot \frac{D}{2R}$$

ERRORE LINEARE DI RIFRAZIONE

- La **presenza dell'atmosfera** provoca di fatto una **riduzione** dell'errore di sfericità x di una quantità y = M'M", detto **errore lineare di rifrazione.**

- Immaginando M'M" come un arco di cerchio di raggio D e angolo al centro ε, l'errore lineare di rifrazione può essere calcolato con l'espressione: $y = \varepsilon^{rad} \cdot D$:

$$y = K \cdot \frac{D^2}{2R}$$

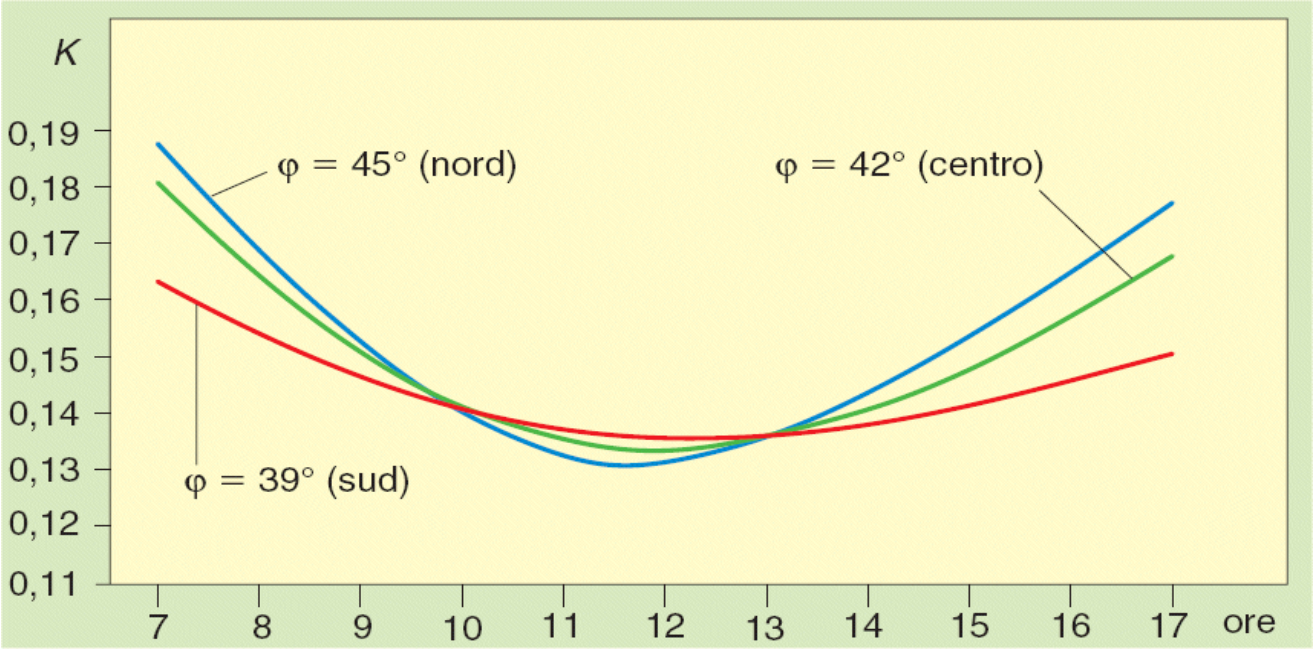


- In definitiva, tenendo conto della contemporanea presenza degli **errori di sfericità** e **rifrazione**, l'adozione della superficie di riferimento **piana** al posto di quella sferica provoca l'errore complessivo e fornito dalla relazione:

$$e = \frac{1 - K}{2 \cdot R} \cdot D^2$$

IL COEFFICIENTE DI RIFRAZIONE K

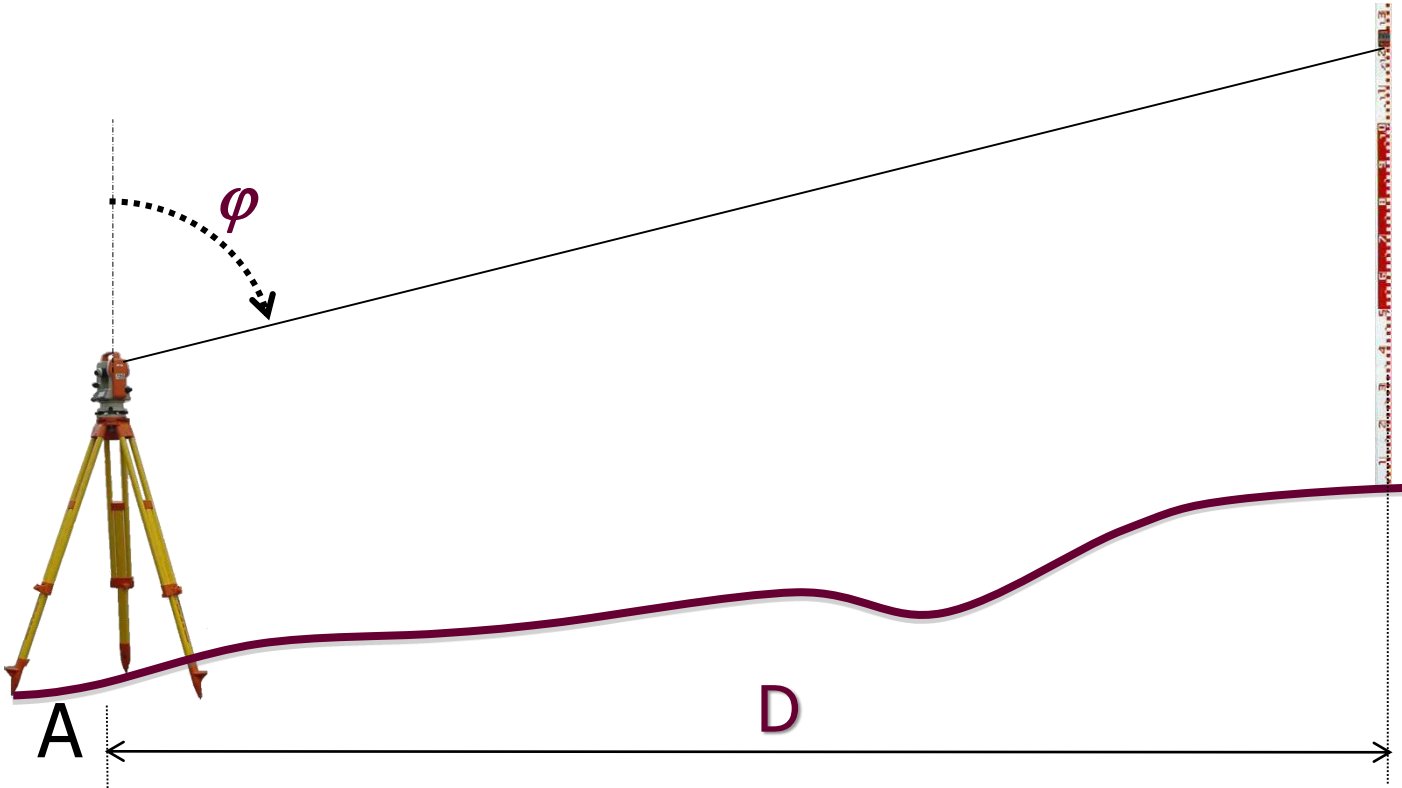
- Il valore del coefficiente K dipende dalle condizioni atmosferiche, dunque da **pressione e temperatura**. Queste, naturalmente, variano da località a località, e in base alle stagioni e all'ora nell'ambito della stessa giornata.
- In Italia, indicativamente, il **valore medio** di K è di 0,13-0,14, e può comunque oscillare tra i valori 0,09 e 0,18.
- Nell'ambito di una stessa giornata, il valore di K è **costante durante la notte**, mentre assume **valori massimi al mattino**, che decrescono rapidamente (a causa del riscaldamento dell'atmosfera) sino a raggiungere il **minimo verso le ore 10-12**, per poi ricrescere nelle ore pomeridiane.

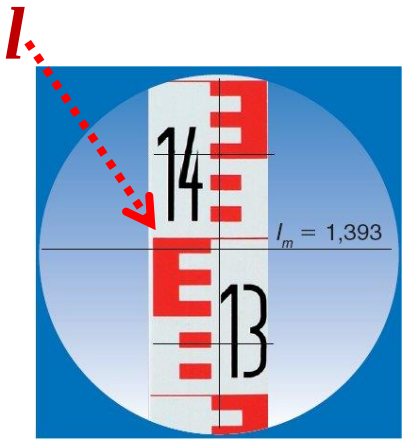


MISURA DEI DISLIVELLI:
LE LIVELLAZIONI
A VISUALE LIBERA

LIVELLAZIONE ECCLIMETRICA

- La **livellazione ecclimetrica** si esegue con un qualsiasi goniometro in grado di misurare **angoli zenitali** collocato su un estremo, e una **mira** sistemata sul secondo estremo del dislivello da misurare. Se la distanza tra i due punti non supera 100-150 m, la mira può essere una **stadia** verticale sulla quale si esegue la lettura l al **filo medio** del reticolo.
- Viene generalmente impiegata quando la **distanza** tra i due punti, che deve essere **nota**, è inferiore a *pochissime centinaia* di metri e il relativo dislivello può essere determinato con la precisione di 1÷3 cm /100 m.
- In questo contesto si adotta la **superficie di riferimento piana**, trascurando pertanto gli effetti della **sfericità** e della **rifrazione atmosferica**.





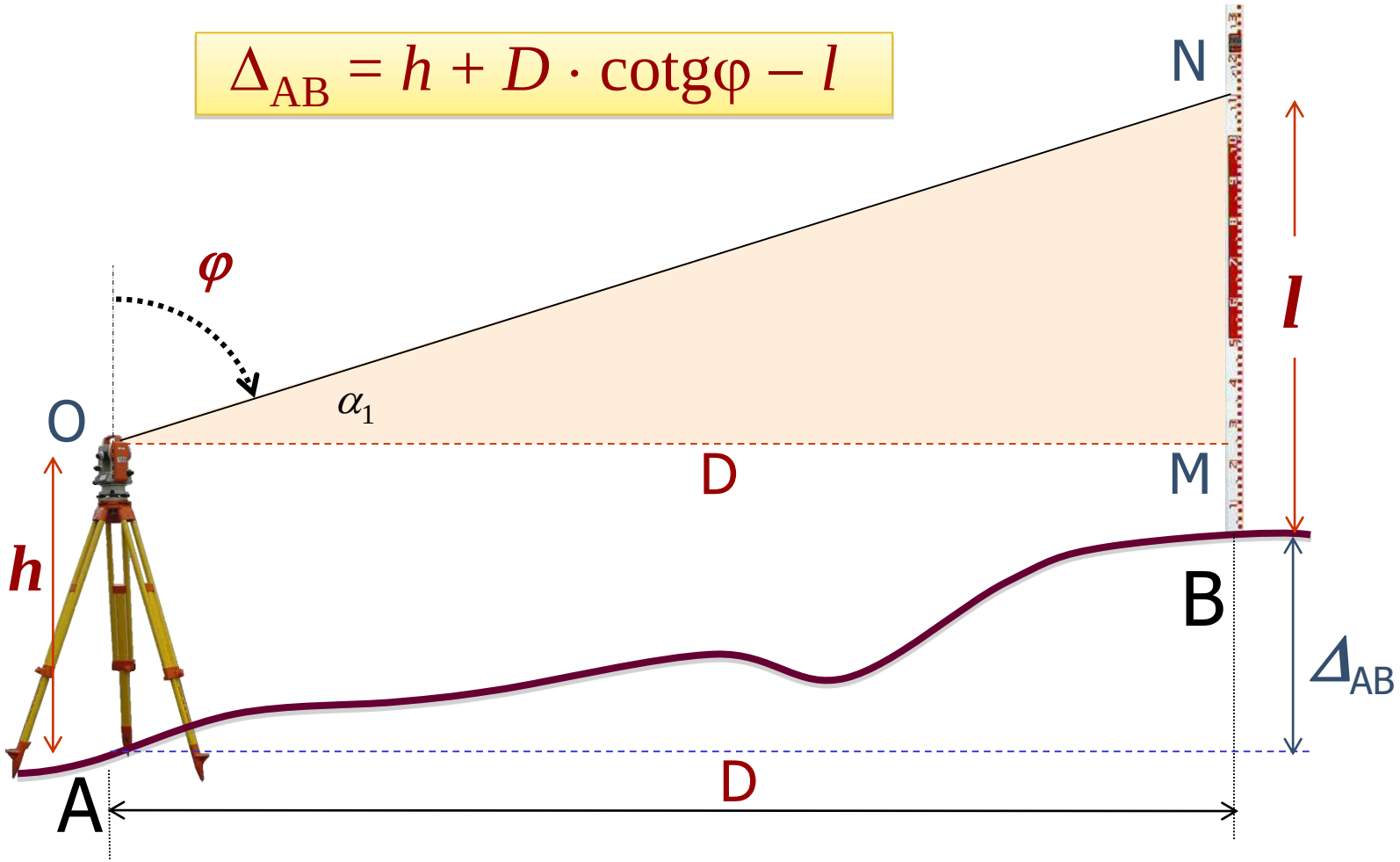
l = lettura al filo medio

LIVELLAZIONE ECCLIMETRICA

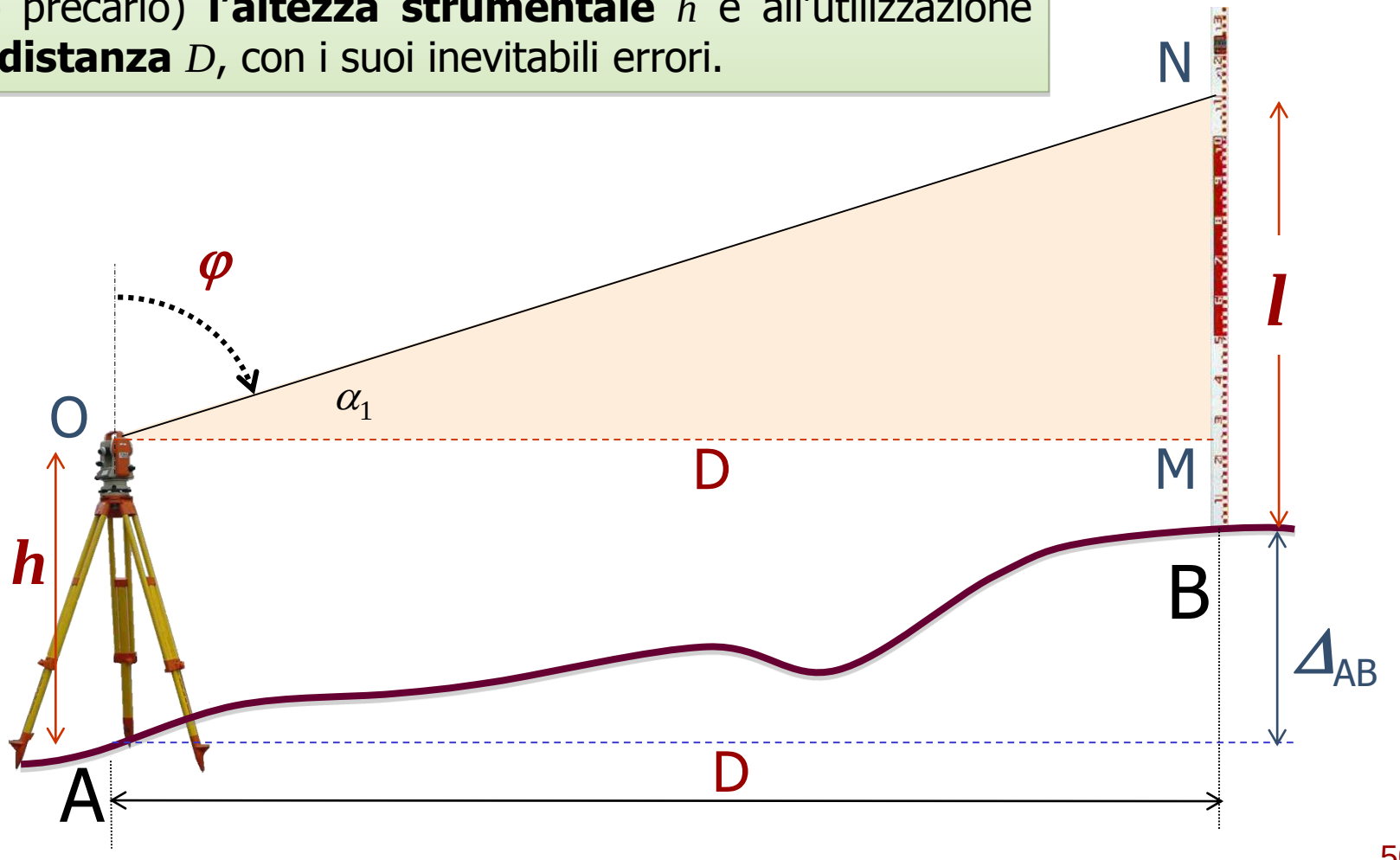
Nella **livellazione ecclimetrica** è necessario misurare: l'**altezza strumentale** h, l'**angolo zenitale** φ, la lettura al **filo medio** l della stadia e la **distanza** D tra gli estremi.

$$\Delta_{AB} = AO + MN - NB$$

$$\Delta_{AB} = h + D \cdot \mathrm{cotg}\varphi - l$$

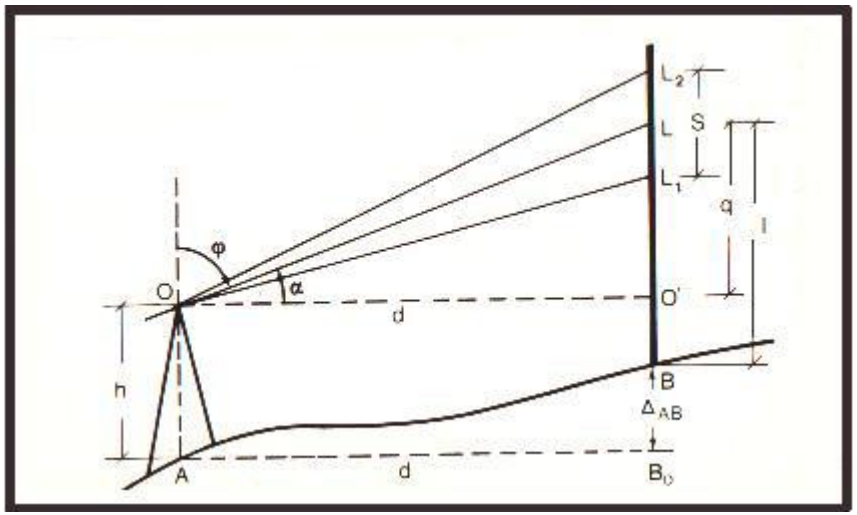


La responsabilità della **scarsa precisione** della livellazione ecclimetrica non è dovuta tanto alla mancata valutazione di **sfericità** e **rifrazione**, quanto alla necessità di misurare (in modo precario) **l'altezza strumentale** h e all'utilizzazione della **distanza** D, con i suoi inevitabili errori.



LIVELLAZIONE TACHEOMETRICA

- Nella **livellazione ecclimetrica** la **distanza** D tra gli estremi potrebbe essere misurata in modo **indiretto** con l'espressione : $D = KS\text{sen}^2\varphi$**.**
- In tal caso la livellazione è detta **tacheometrica**
-



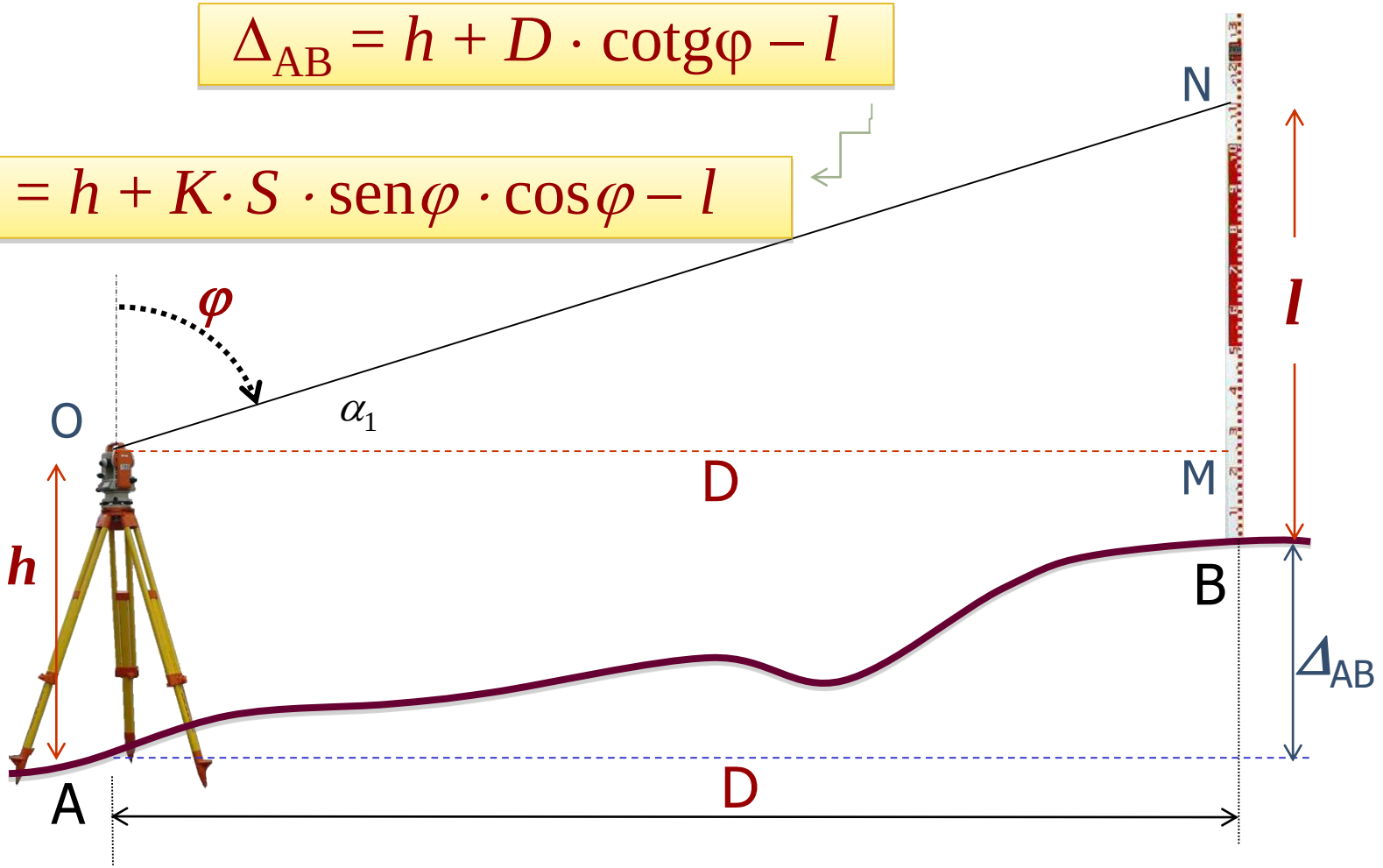
Si ricorda che K è una costante strumentale e S è la distanza letta sulla stadia come differenza tra la lettura al filo superiore e la lettura al filo inferiore. Infatti il cannocchiale del tacheometro presenta delle linee orizzontali in corrispondenza delle quali viene fatta la lettura sulla stadia.

LIVELLAZIONE TACHEOMETRICA

- Sostituendo D nella precedente espressione con $D = KS\text{sen}^2\varphi$ si ottiene una diversa forma del dislivello, denominata **livellazione tacheometrica**, che veniva usata nella celerimensura classica (ora in disuso):

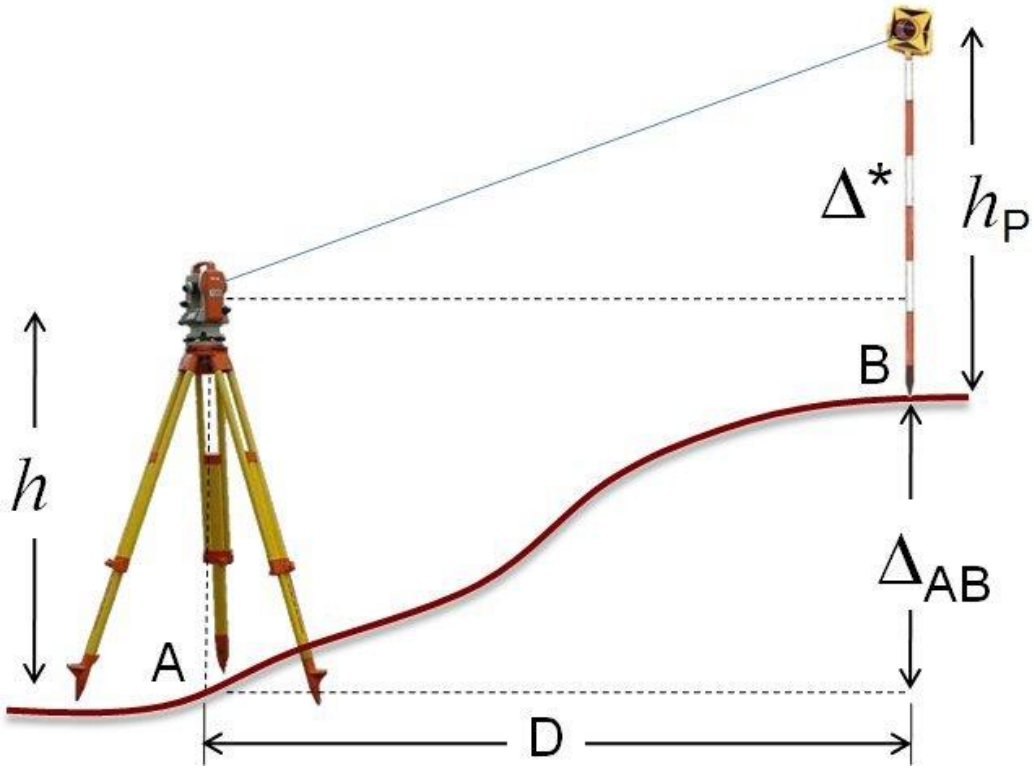
$$\Delta_{AB} = h + D \cdot \text{cotg}\varphi - l$$

$$\Delta_{AB} = h + K \cdot S \cdot \text{sen}\varphi \cdot \cos\varphi - l$$



LIVELLAZIONE CON IL GEODIMETRO

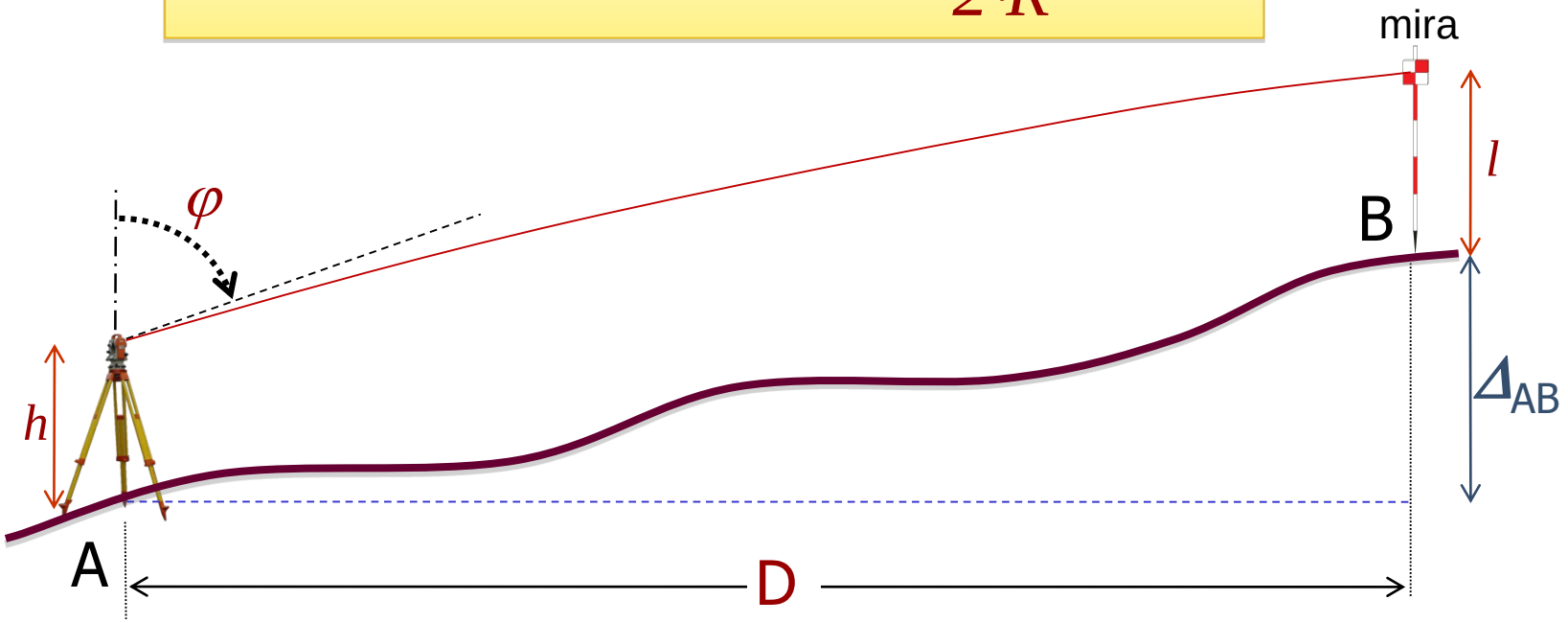
- La **livellazione ecclimetrica** può essere effettuata con un **geodimetro** elettronico. In questo caso lo strumento fornisce **direttamente** sul display la misura del dislivello Δ^* tra il centro dello strumento e il prisma riflettente.
- Sostituendo Δ^* al posto di $MN = D \cdot \text{cotg}\varphi$ nell'espressione della **livellazione ecclimetrica** si ottiene:



$$\Delta_{AB} = h + \Delta^* - h_P$$

Osserviamo tuttavia che l'uso del geodimetro non migliora di molto la precisione nella misura del dislivello.
Infatti rimane l'incertezza nella misura **dell'altezza strumentale** *h*, che da sola condiziona la precisione della misura.

LIVELLAZIONE TRIGONOMETRICA
(DA UN ESTREMO)

- Se è necessario misurare il dislivello tra due punti A e B posti a distanze superiori a 300-400 m con una sola operazione, non è più possibile trascurare gli effetti della **rifrazione** atmosferica e della **sfericità**.
- Semplificando (ma con D < 2 km), possiamo considerare che anche in questo caso si tratta di una livellazione ecclimetrica a cui, tuttavia, è necessario aggiungere un termine correttivo costituito dall'**errore complessivo** di sfericità e rifrazione (*e*):

$$\Delta_{AB} = h + D \cdot \operatorname{cotg}\varphi - l + \frac{1-K}{2 \cdot R} \cdot D^2$$