



*Università degli Studi di Napoli “Parthenope”
Dipartimento di Scienze e Tecnologie*

Corso di Topografia e Idrografia

Lezione 7

Determinazione delle coordinate planimetriche di punti in topografia

Claudio Parente

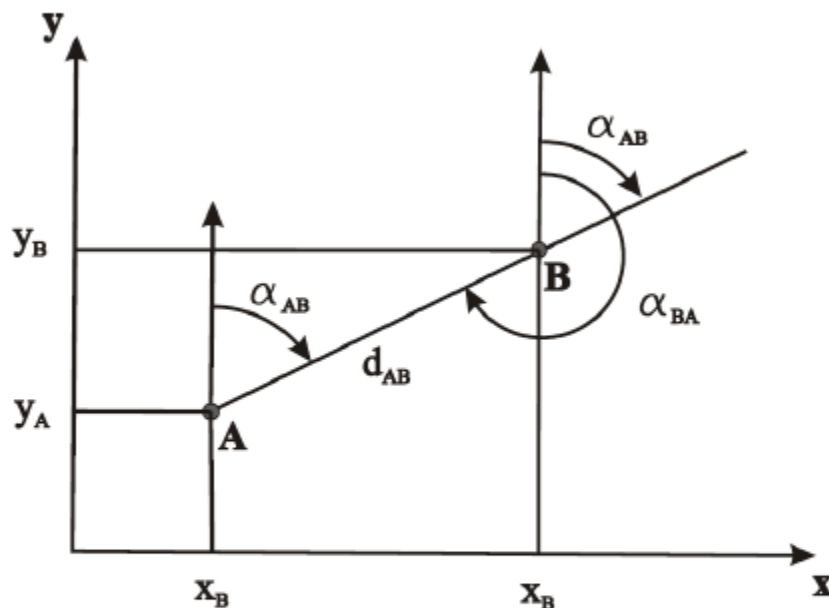
- Per determinare le coordinate di un punto in topografia, si può ricorrere ad operazioni diverse.
- Si effettueranno comunque delle misure in campo e si applicheranno delle formule.

- Vediamo anzitutto come si possono esprimere le coordinate di un punto.
- Possiamo utilizzare coordinate polari oppure coordinate cartesiane

Coordinate polari relative - 1

Se si prendono in considerazione due punti $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, si possono definire le **coordinate polari relative** di uno rispetto all'altro.

Le coordinate polari relative di B rispetto ad A sono costituite dalla coppia (α_{AB}, d_{AB}) .

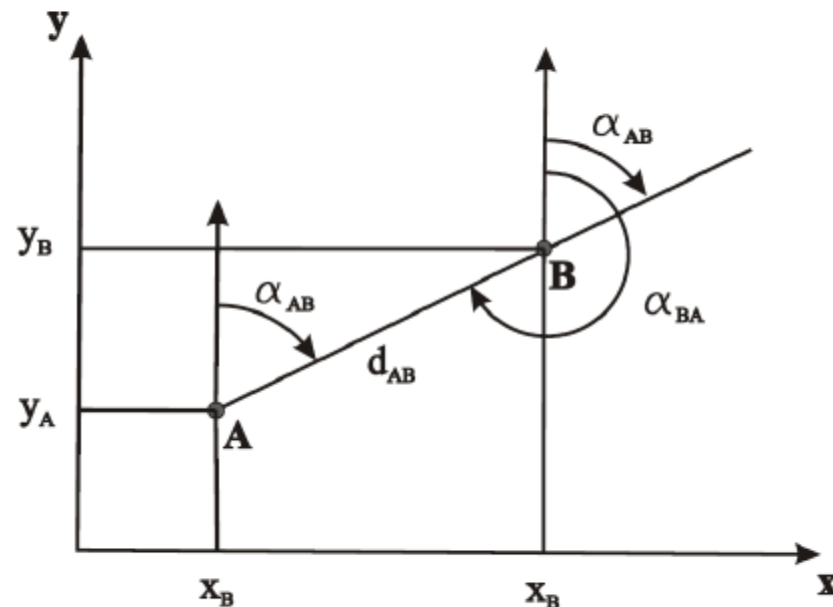


In particolare, l'angolo α_{AB} è detto **angolo di direzione** di B rispetto ad A.

Coordinate polari relative - 2

Nascono due questioni:

1. note le coordinate cartesiane (assolute) di entrambi i punti occorre trovare le coordinate polari relative di B rispetto ad A
2. note le coordinate cartesiane di A e le coordinate polari relative di B occorre trovare le cartesiane di quest'ultimo (analogo discorso che sono note le cartesiane di B ed occorre ricavare quelle di A)

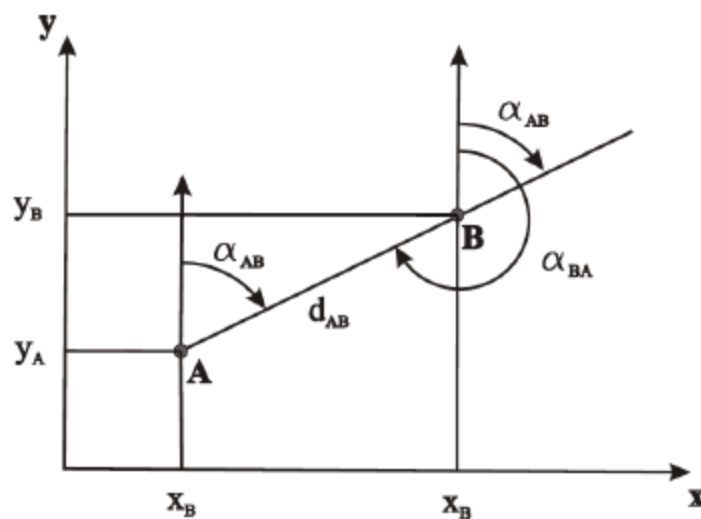


Angolo di direzione di un segmento - 1

Definiamo in modo rigoroso l'angolo di direzione α_{AB} .

Consideriamo una semiretta r avente origine in A e parallela al semiasse positivo delle ordinate.

Si definisce **angolo di direzione** α_{AB} del segmento $\overline{AB}$, l'angolo orario che la semiretta r deve descrivere per andarsi a sovrapporre al segmento $\overline{AB}$.

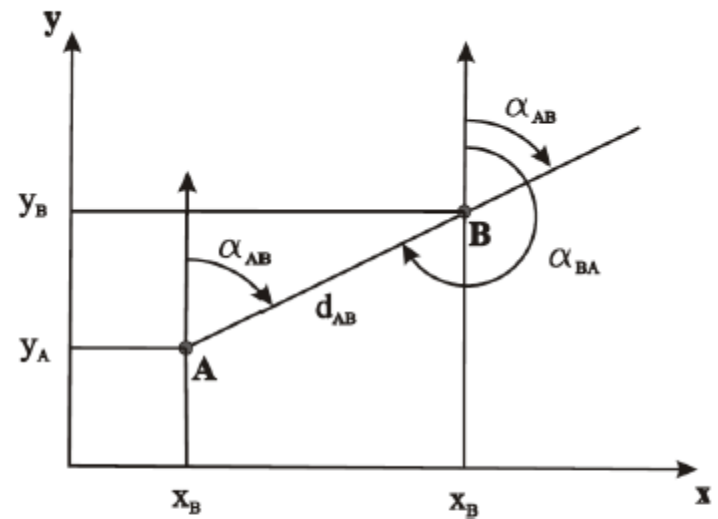


Analogamente si definisce **angolo di direzione** α_{BA} del segmento $\overline{BA}$, l'angolo orario che una semiretta r , avente origine in B e parallela all'asse y , deve descrivere per andarsi a sovrapporre al segmento $\overline{BA}$.

Angolo di direzione di un segmento - 2

Gli angoli di direzione α_{AB} e α_{BA} sono diversi tra loro e sono legati dalla relazione:

$$\alpha_{BA} = \alpha_{AB} + 200$$



Conversioni da polari a cartesiane (e viceversa)

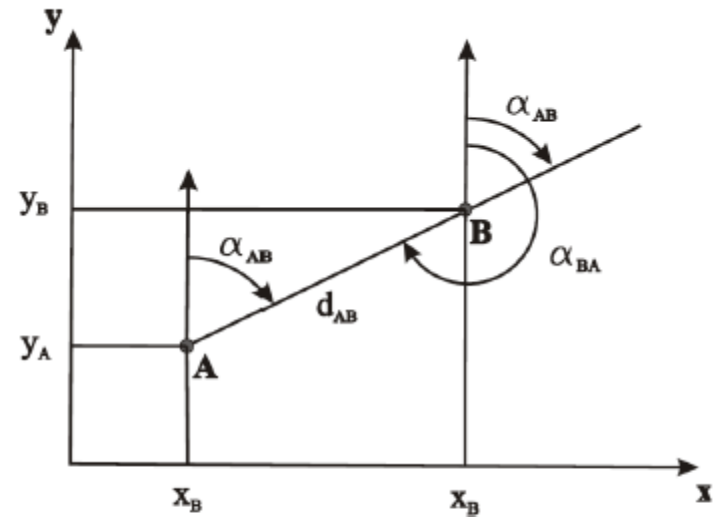
- *Da polari a cartesiane*: note le cartesiane di A e le polari del segmento, trovare le cartesiane di B; similmente, note le cartesiane di B e le polari del segmento, trovare le cartesiane di A
- *Da cartesiane a polari*: note le cartesiane di A e B, trovare le polari del segmento

Da polari a cartesiane

Note le coordinate cartesiane di A e le polari del segmento, trovare le cartesiane di B:

$$x_B = x_A + d_{AB} \sin \alpha_{AB}$$

$$y_B = y_A + d_{AB} \cos \alpha_{AB}$$



Da cartesiane a polari

Note le coordinate cartesiane di A e B,
trovare le polari del segmento $\overline{AB}$:

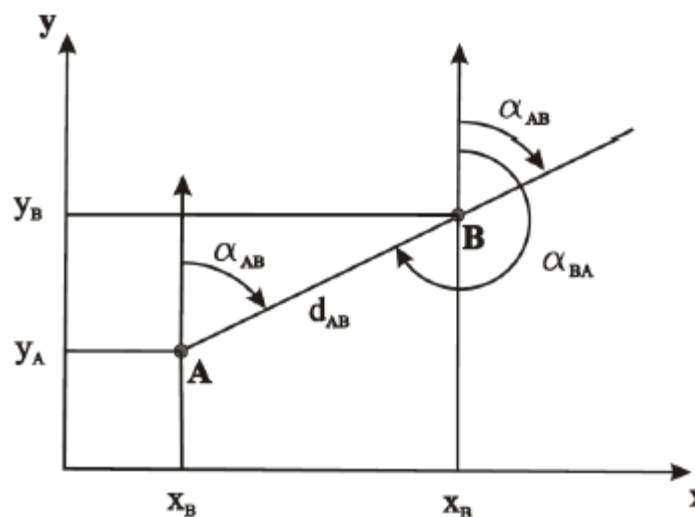
$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Ponendo:

$$\alpha' = \arctan \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

Si ha:

$$\alpha = \alpha(\overrightarrow{x_A}, \overrightarrow{y_B})$$
$$= \begin{cases} \alpha' & \Delta x > 0 \quad \Delta y \geq 0 \\ 100 & \Delta x > 0 \quad \Delta y = 0 \\ \alpha' + 200 & \Delta y < 0 \\ 300 & \Delta x < 0 \quad \Delta y = 0 \\ \alpha' + 400 & \Delta x < 0 \quad \Delta y > 0 \end{cases}$$



Esercizi - da polari a cartesiane

Da polari a cartesiane					
X1 [m]	Y1 [m]	d [m]	alfa [GRAD]	X2 [m]	Y2 [m]
55.338	99.631	154.555	221.9100	3.190	-45.861
21.063	46.567	125.586	137.7507	125.208	-23.616
91.775	43.788	187.699	11.3147	124.960	228.530
35.733	24.964	74.562	51.9099	90.014	76.082
27.470	43.860	164.376	335.6749	-111.765	131.227
44.589	23.708	163.077	21.6964	99.097	177.406
56.485	60.434	138.661	24.6005	108.743	188.871
28.134	80.914	85.787	85.3568	111.662	100.473

Esercizi - da cartesiane a polari

Da cartesiane a polari

X1 [m]	Y1 [m]	X2 [m]	Y2 [m]	d [m]	alfa [GRAD]
82.414	91.238	-5.824	30.126	107.334	261.4381
47.007	83.917	24.613	-14.730	101.157	214.2111
68.629	78.747	-92.212	113.172	164.484	313.4231
79.300	24.107	103.532	-32.361	61.448	174.1939
28.385	25.831	-36.638	10.603	66.782	285.3547
30.231	27.082	-83.223	-76.325	153.508	252.9473
63.963	83.868	203.970	48.174	144.485	115.8917
58.818	95.441	184.876	139.859	133.655	78.4328

Complemento

Se conosciamo $\vec{x}_B$, d_{AB} e α_{AB} , come si può calcolare $\vec{x}_A$?

Prima via:

$$x_A = x_B - d_{AB} \sin \alpha_{AB}$$

$$y_A = y_B - d_{AB} \cos \alpha_{AB}$$

Seconda via:

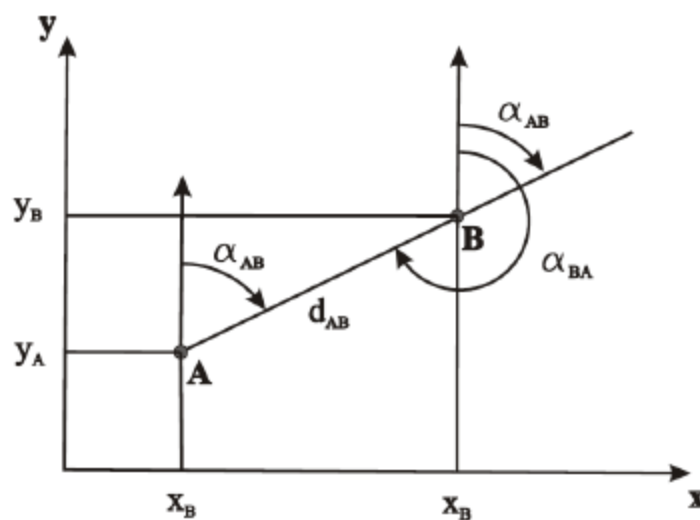
$$x_A = x_B + d_{BA} \sin \alpha_{BA}$$

$$y_A = y_B + d_{BA} \cos \alpha_{BA}$$

Ricordando che:

$$d_{AB} = d_{BA}$$

$$\alpha_{BA} = \alpha_{AB} + 200$$



Normalizzazione degli angoli

Per ragioni sostanzialmente estetiche, si preferisce che gli angoli di direzione α , e gli angoli orizzontali in genere, soddisfino la condizione di normalizzazione:

$$0 \leq \alpha < 400$$

Non vi è una motivazione sostanziale, in quanto tutti gli angoli

$$\alpha + 400n \quad n \in \mathbb{Z}$$

sono equivalenti, tuttavia è bene usare angoli normalizzati.

Durante lo svolgimento dei calcoli avviene spesso che, pur partendo da angoli normalizzati, i risultati non lo siano: è necessario pertanto normalizzare gli angoli. L'idea per la normalizzazione è che, se $\alpha > 400$ si deve sottrarre iterativamente 400 fino a quando la condizione di normalizzazione è soddisfatta.

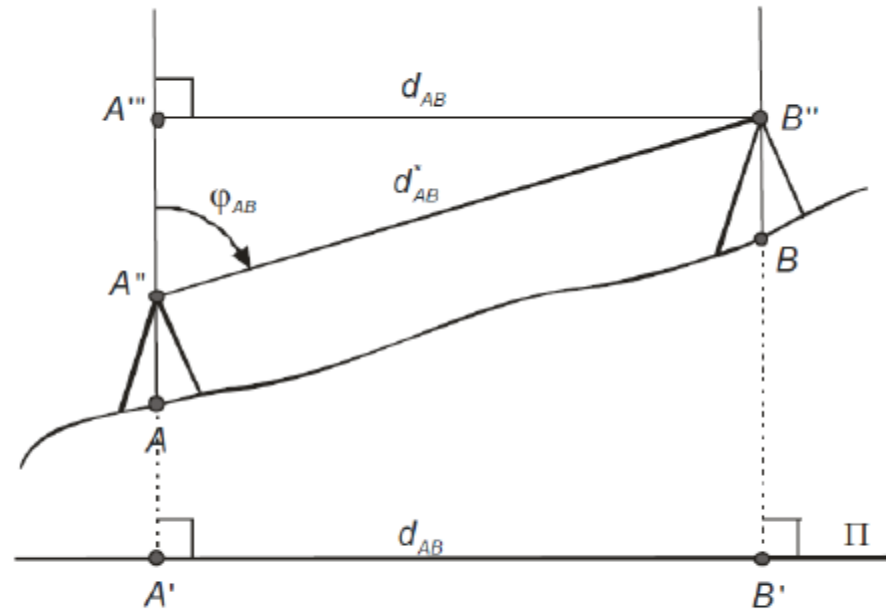
Se viceversa α è negativo, si dovrà aggiungere iterativamente 400 fino a renderlo positivo.

Distanza topografica - 1

Ho due punti A e B:

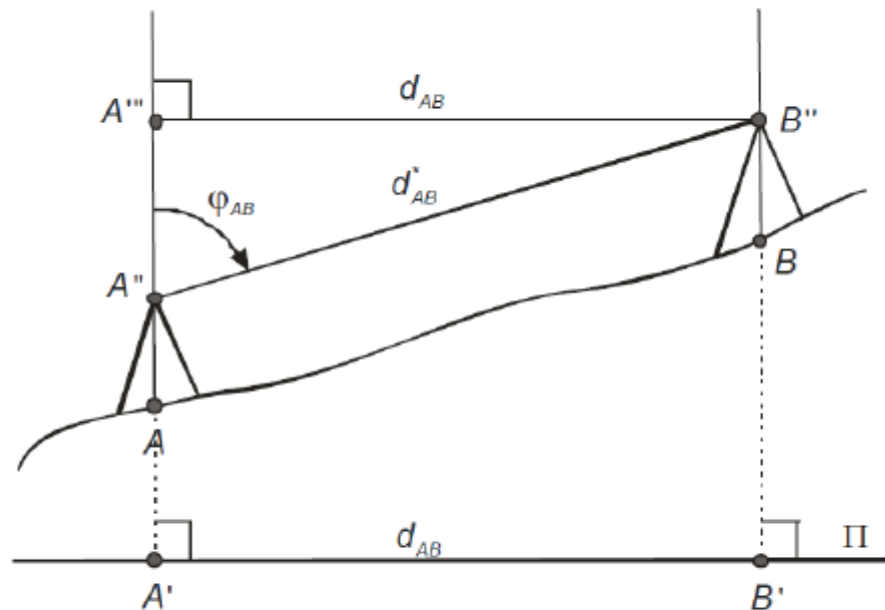
- su A si trova una TS
- su B ho un prisma

Lo strumento consente di misurare la **distanza inclinata** d_{AB}^* fra i centri dei due dispositivi A'' e B'' .



Distanza topografica - 2

La distanza topografica, o distanza orizzontale, d_{AB} , è la distanza che separa A' e B' , cioè le proiezioni di A e B sul piano di riferimento.



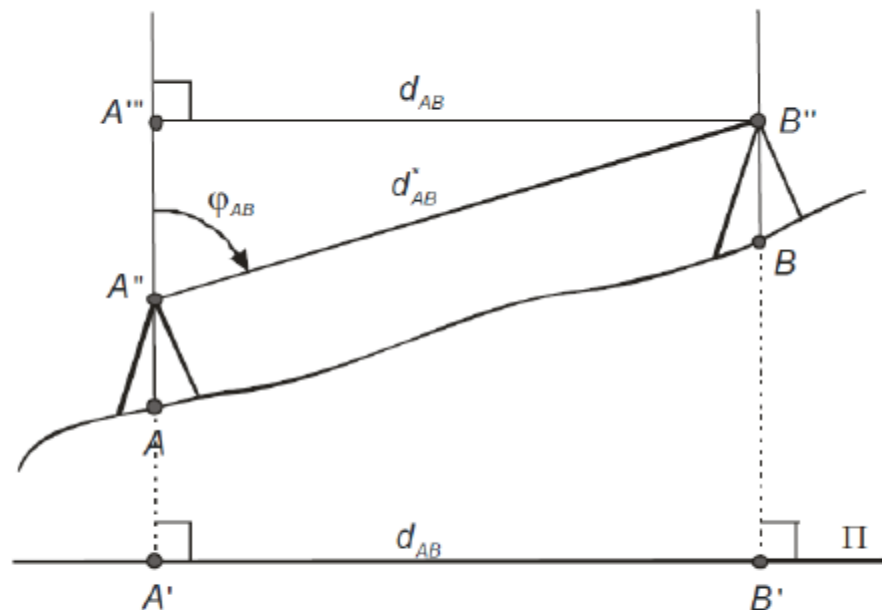
Distanza topografica - 3

Dal disegno:

$$d_{AB} = d_{AB}^* \sin \varphi_{AB}$$

Condizione necessaria:

- A, A' e A'' si devono trovare sulla stessa retta ortogonale al piano di riferimento
- lo stesso vale anche per B, B' e B''.



Tale condizione è rispettata se vi è una della **corretta messa in stazione**.

Esercizi

Calcolare la distanza topografica

fi [grad]	d* [m]	d [m]
77.6025	79.935	75.039
117.9703	98.390	94.496
115.5098	73.615	71.441
66.2612	83.411	71.969
61.8998	68.952	56.968

- Lo scopo della topografia è rappresentare una porzione di un territorio.
- Si deve quindi procedere a ricostruire la realtà con un modello: gli oggetti sono rappresentati mediante le coordinate dei punti che ne caratterizzano la forma.
- Il problema è quindi determinare le coordinate di tali punti
- Bisogna dapprima introdurre un sistema di coordinate e procedere alla sua materializzazione, ovvero costruire una rete di inquadramento. Realizzata la rete, si provvede ad infittirla introducendo nuovi punti.
- Partiamo dall'infittimento di reti planimetriche preesistenti.

Infittimento di reti planimetriche

**Dopo aver realizzato la rete di
inquadramento
occorre infittire i punti di rete
con altri punti**

Infittimento di reti planimetriche

**I punti dell'infittimento si
determinano mediante le seguenti
procedure topografiche**

Intersezione in avanti



Semplice



Multipla

Infittimento di reti planimetriche

**I punti dell'infittimento si
determinano mediante le seguenti
procedure topografiche**

Intersezione inversa



Semplice

Multiplo



Infittimento di reti planimetriche

**I punti dell'infittimento si
determinano mediante le seguenti
procedure topografiche**

Poligonale

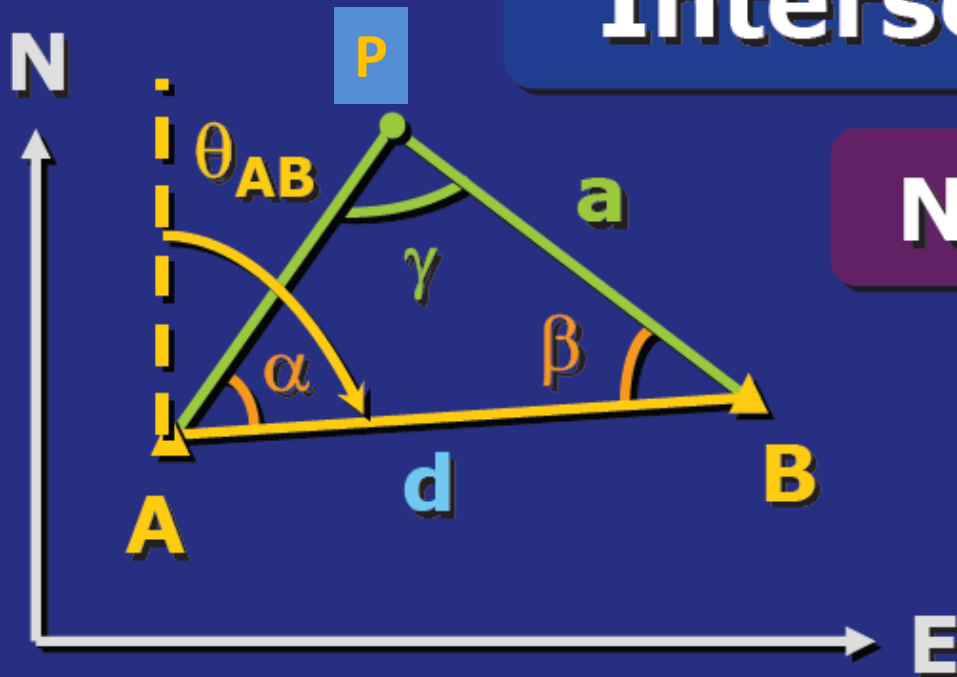


Ordinaria



Di precisione

Intersezione in avanti



Noti:

$A(E_A, N_A)$
 $B(E_B, N_B)$

$$\theta_{AB} = \arctg \frac{E_A - E_B}{N_A - N_B}$$

P è incognito,
eventualmente anche inaccessibile

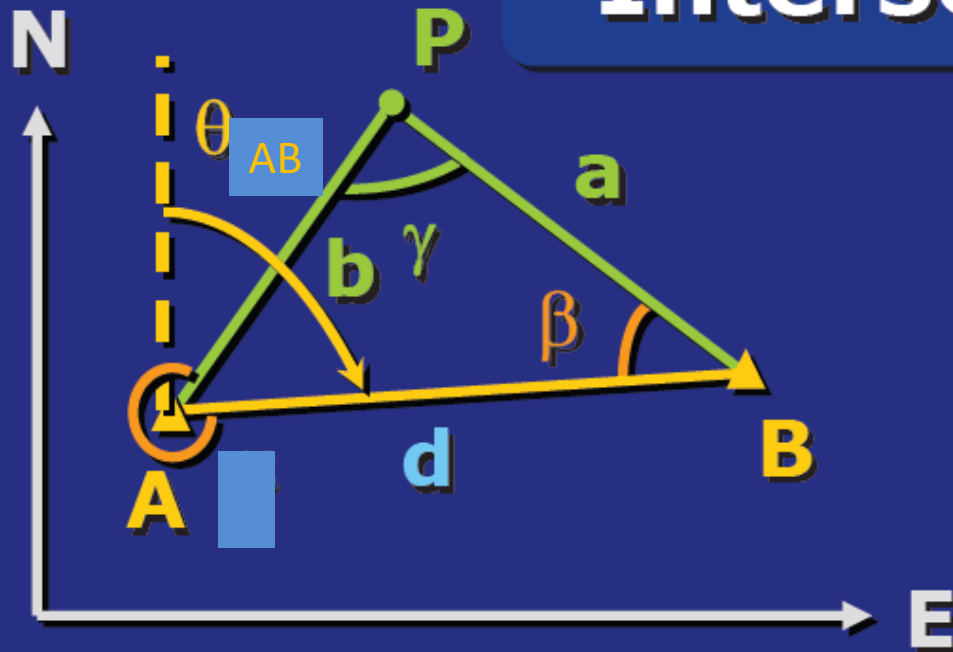
Misure

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right.$

Calcolo:

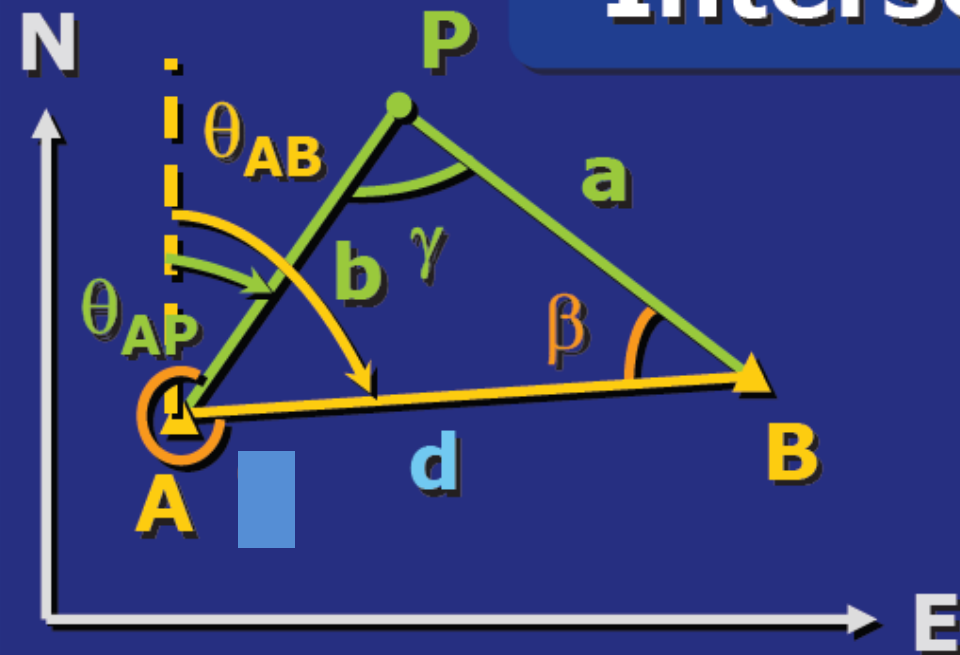
$$\gamma = \pi - \alpha - \beta$$

Intersezione in avanti



$$\overline{AB} = \sqrt{(E_B - E_A)^2 + (N_B - N_A)^2} = d_{AB}$$

Intersezione in avanti

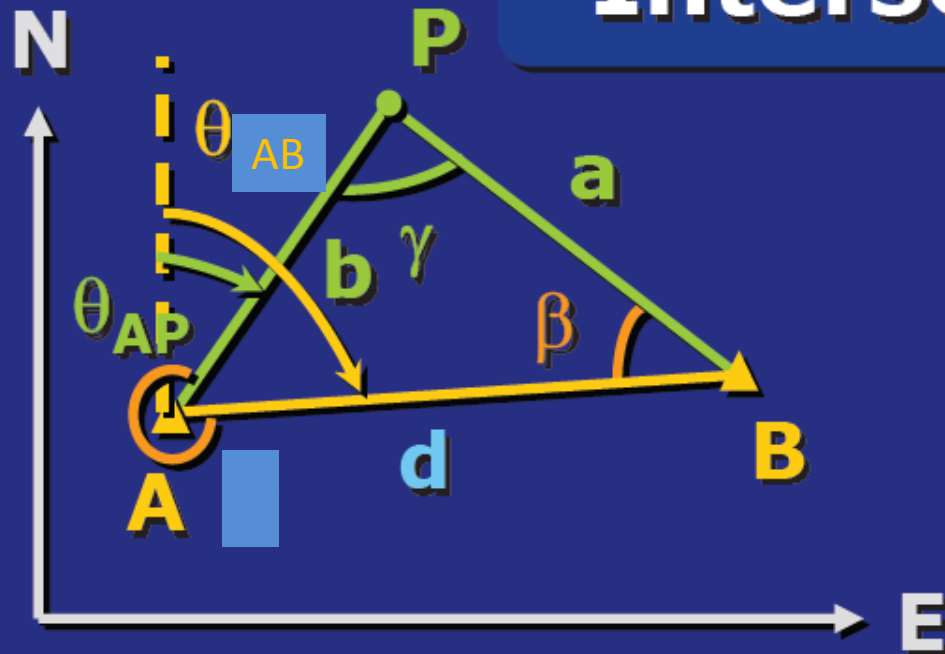


$$\frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{d}{\text{sen}\gamma}$$



$$b = \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}\gamma} d$$

Intersezione in avanti



$$E_P = E_A + b \sin \theta_{AP}$$

$$N_P = N_A + b \cos \theta_{AP}$$

$$b = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} d$$

Intersezione in avanti

Il metodo esposto è quello classico dell'intersezione in avanti semplice

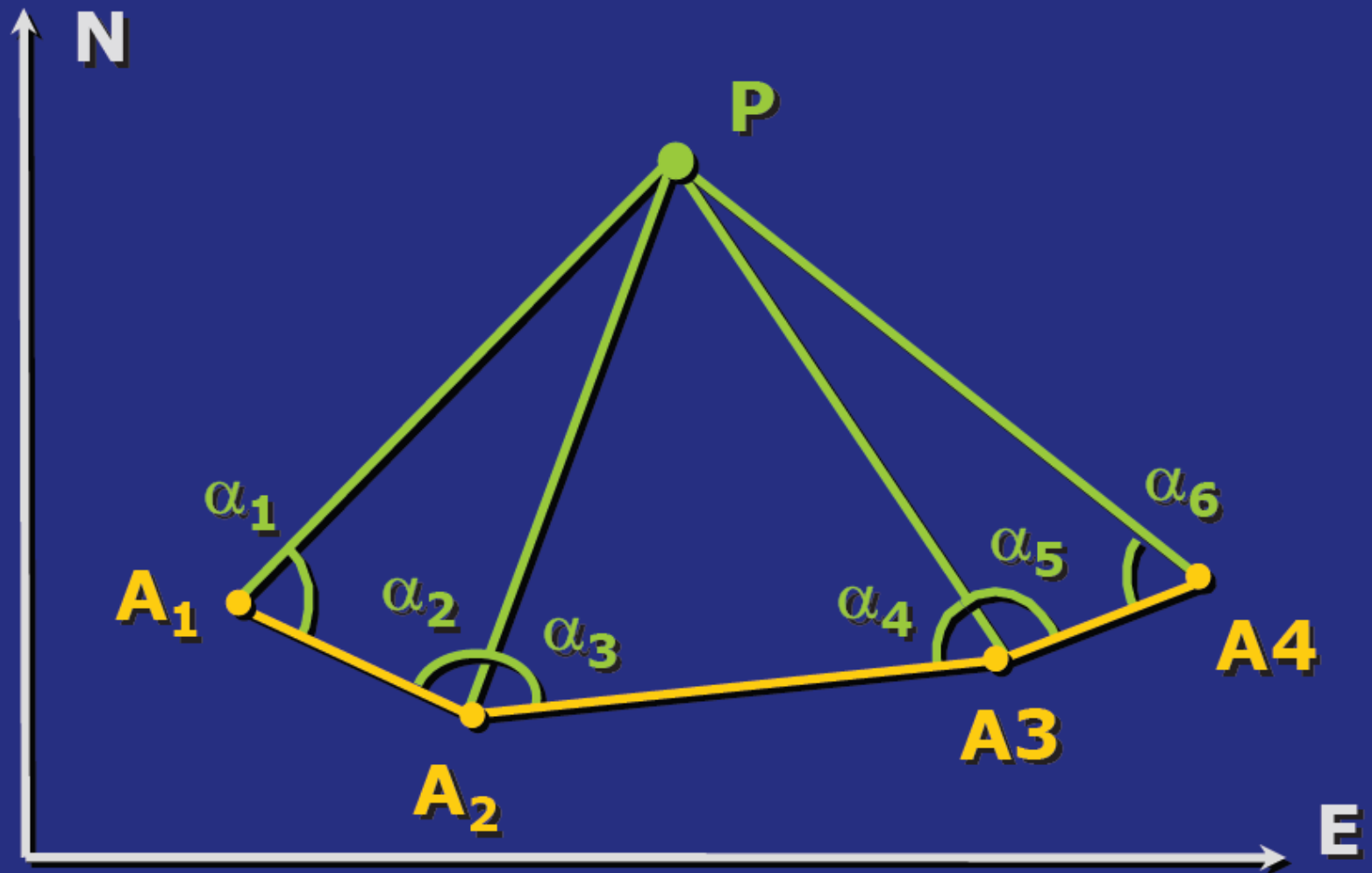
Però se si commette un errore nelle letture al cerchio e quindi un errore in α o in β , non c'è modo di individuare l'errore

Intersezione in avanti

**Si deve ricorrere allora
all'intersezione in avanti multipla**

**Anziché da 2 soli punti di coordinate
note collimiamo il nostro punto **P** da
tanti punti misurando sempre l'angolo
dal punto precedente al punto **P****

Intersezione in avanti multipla



Intersezione in avanti multipla

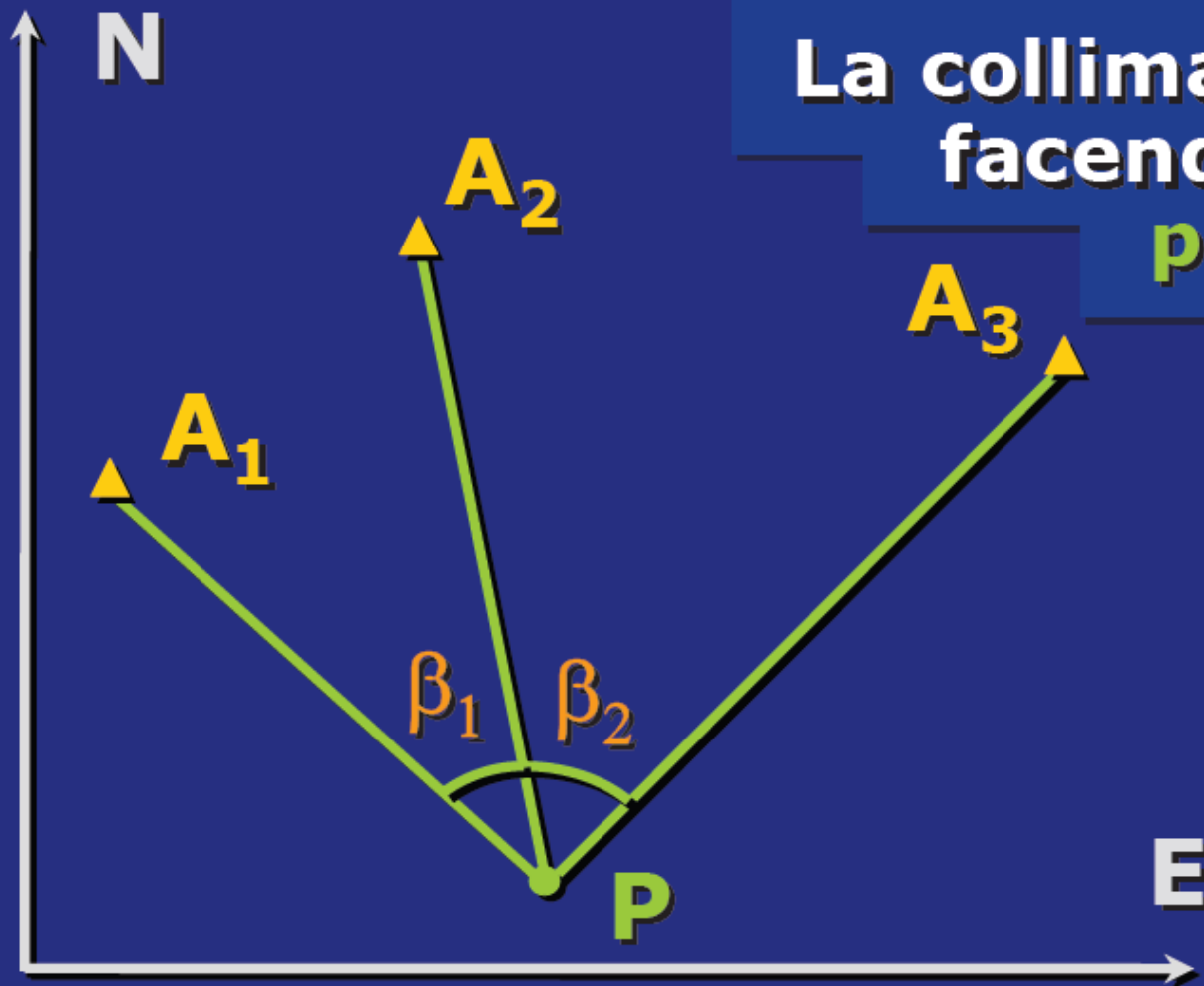
Per ciascuna misura angolare si può scrivere un'equazione del tipo

$$\theta_{Ai,Ai+1} - \theta_{Ai,P} = \alpha_i$$

$$\arctg \frac{E_{Ai} - E_{Ai+1}}{N_{Ai} - N_{Ai+1}} - \arctg \frac{E_{Ai} - E_P}{N_{Ai} - N_P} = \alpha_i$$

Il problema si risolve mediante algoritmi a minimi quadrati

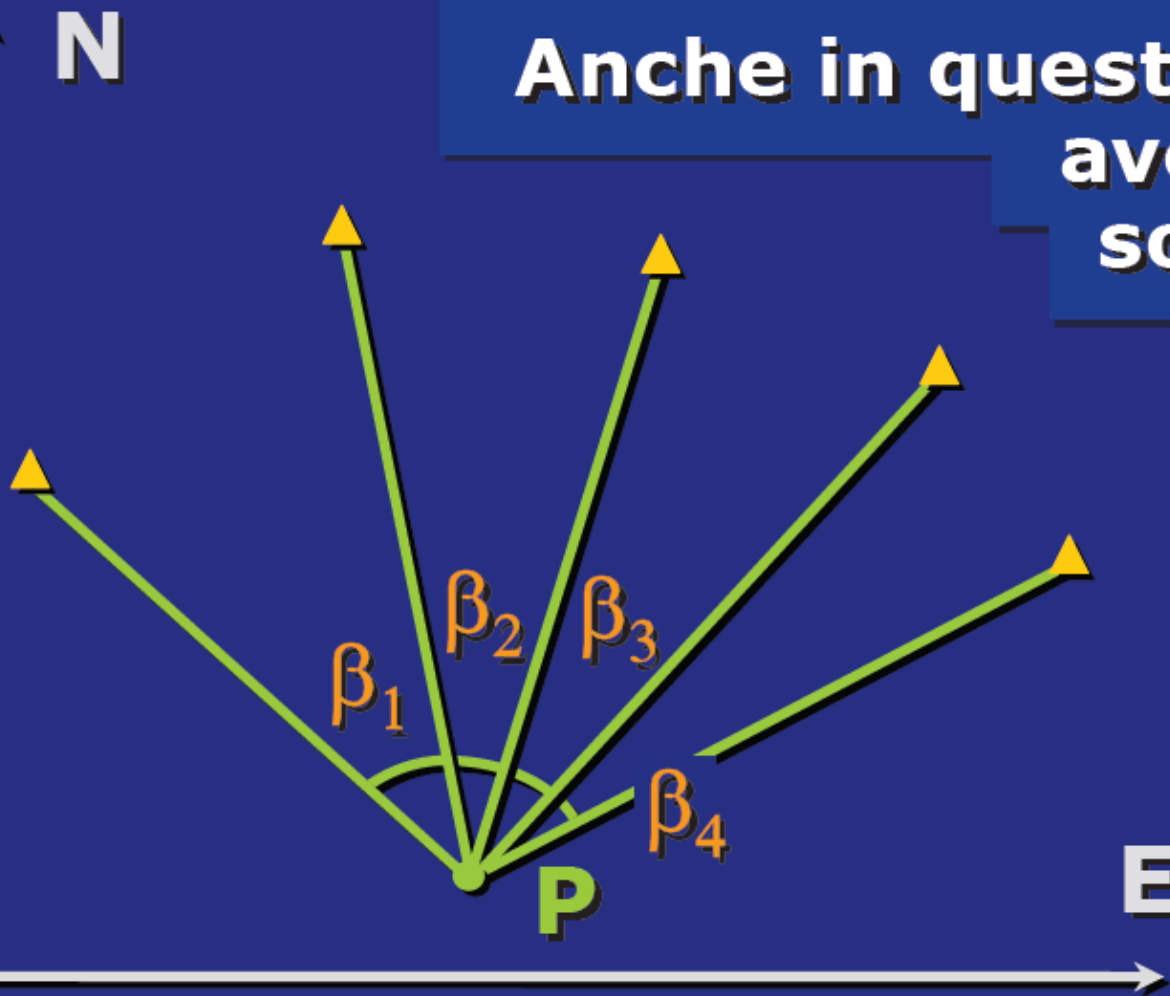
Intersezione inversa semplice



La collimazione avviene
facendo stazione sul
punto incognito
e collimando
punti noti

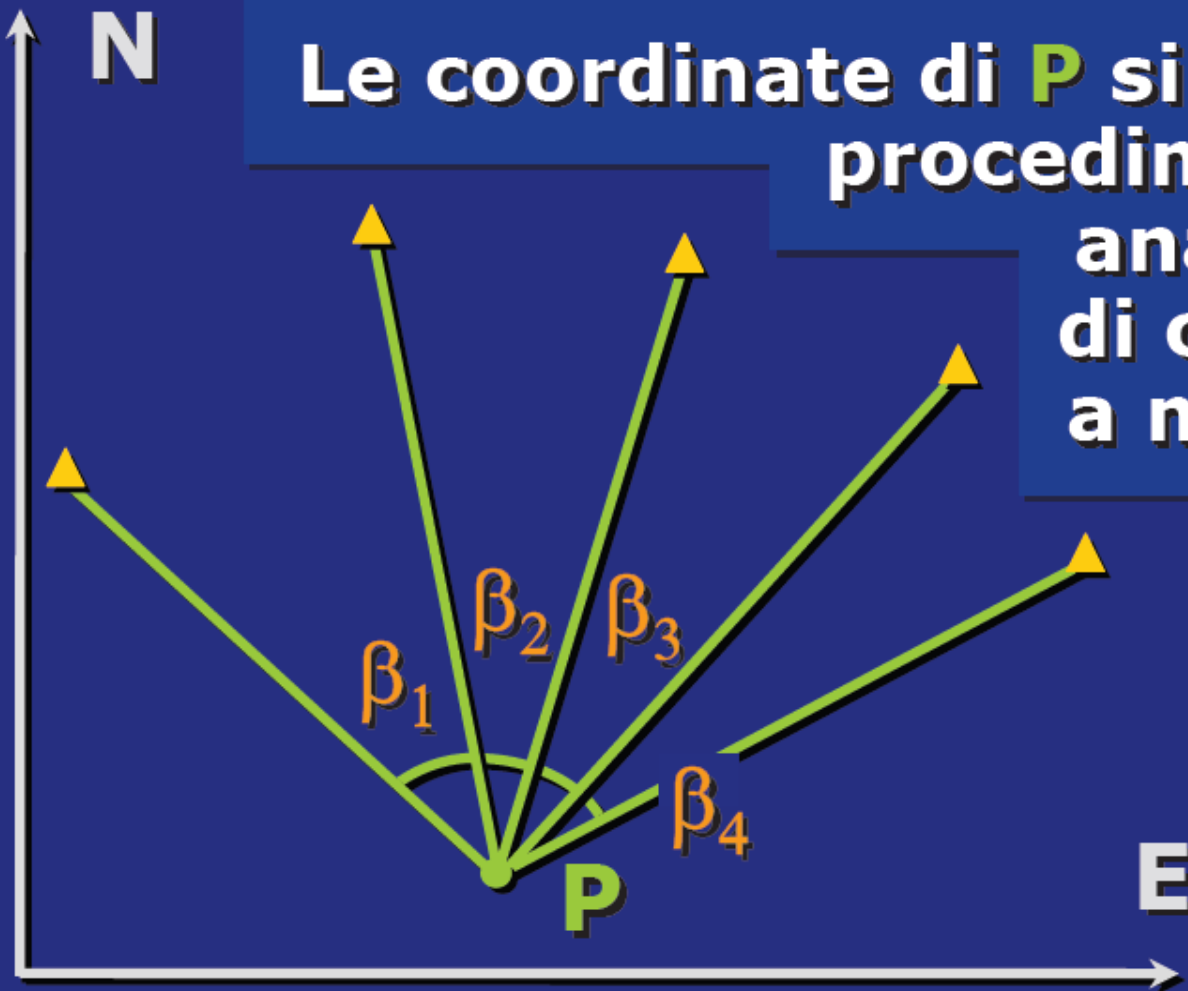
Intersezione inversa multipla

Anche in questo caso occorre avere un numero sovrabbondante di misure



Intersezione inversa multipla

Le coordinate di **P** si ottengono con
procedimenti di calcolo
analitico rigoroso
di compensazione
a minimi quadrati



- Vediamo adesso come infittire i punti ricorrendo alle poligoni.

Poligonale

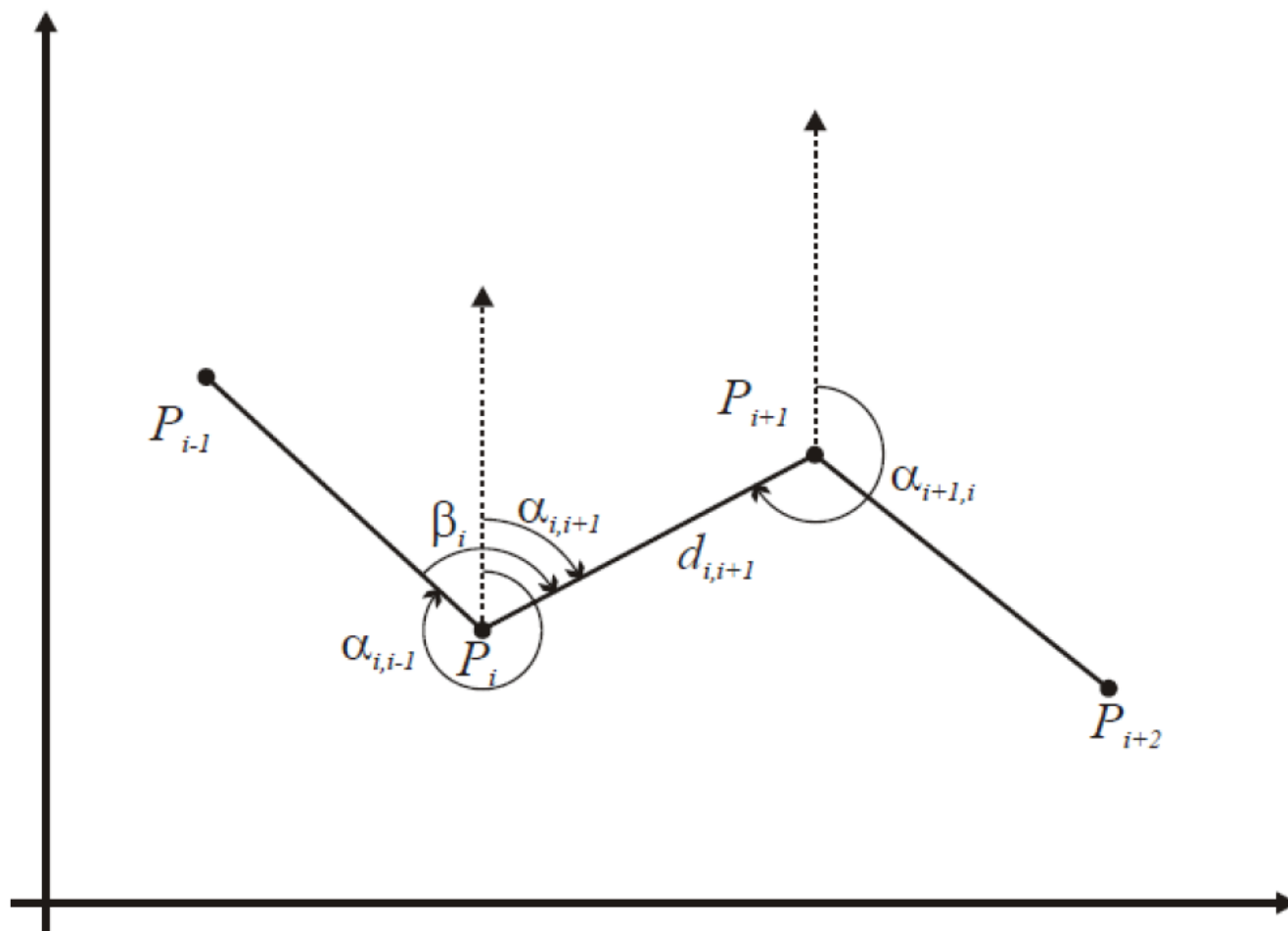
La poligonale è un metodo topografico per la determinazione delle coordinate tridimensionali di punti stazionabili disposti lungo una spezzata (nella trattazione affronteremo prima l'aspetto planimetrico e successivamente quello altimetrico).

La misura di una poligonale necessita della misura di angoli e distanze, dunque richiede l'uso di una Total Station.

La poligonale è un metodo iterativo che richiede la conoscenza delle coordinate di due punti consecutivi iniziali (tale affermazione verrà meglio specificata in seguito) e consente di determinare da questi le coordinate di un terzo punto; dal secondo e terzo si può ricavare il quarto, eccetera.

Questo implica che ci deve essere intervisibilità fra coppie di punti consecutivi.

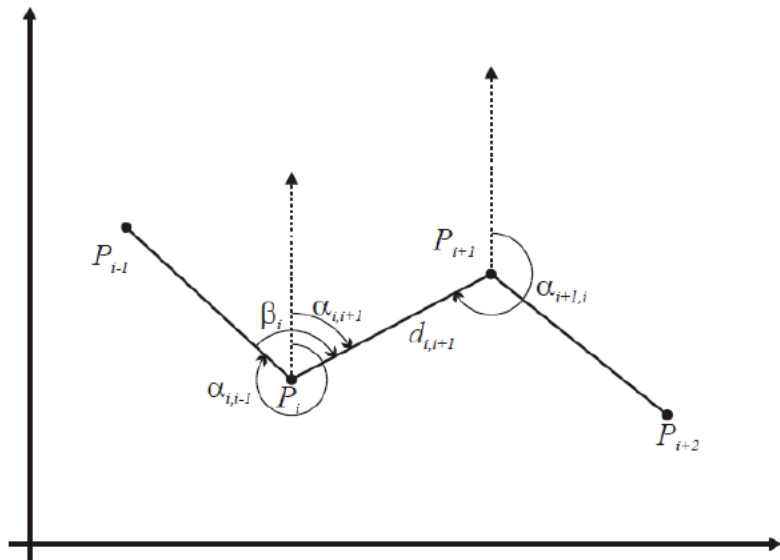
Schema poligonale



Terminologia

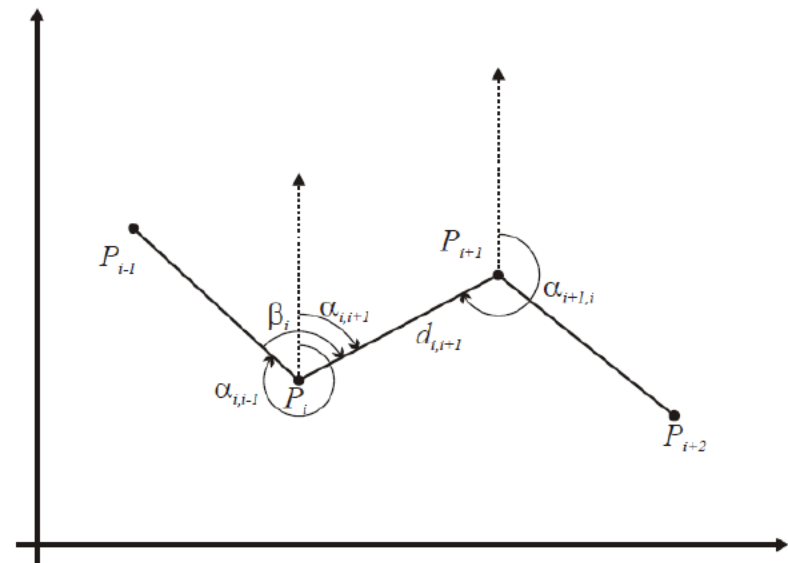
- P_i - punto di stazione - punto sul è posizionato lo strumento
- P_{i-1} - punto indietro - punto su cui è posizionato un primo prisma
- P_{i+1} - punto avanti - punto su cui è posizionato un secondo prisma

Tutto ciò che fa riferimento ai due punti su cui sono posizionati i prismi (lato, distanza, angolo di direzione, ecc.) viene automaticamente etichettato come "indietro" o "avanti"



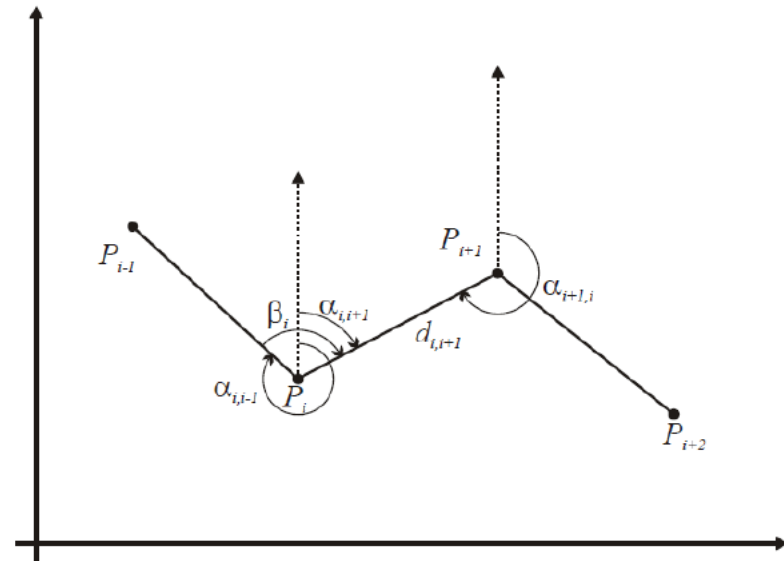
Simbologia - 1

- $\alpha_{i,i-1}$ - angolo di direzione del segmento $\overrightarrow{P_i P_{i-1}}$
- $\alpha_{i,i+1}$ - angolo di direzione del segmento $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$
- $d_{i,i-1}^*$ - distanza inclinata fra i punti P_i e P_{i-1}
- $d_{i,i+1}^*$ - distanza inclinata fra i punti P_i e P_{i+1}
- $d_{i,i-1}$ - distanza orizzontale fra i punti P_i e P_{i-1}
- $d_{i,i+1}$ - distanza inclinata fra i punti P_i e P_{i+1}



Simbologia - 2

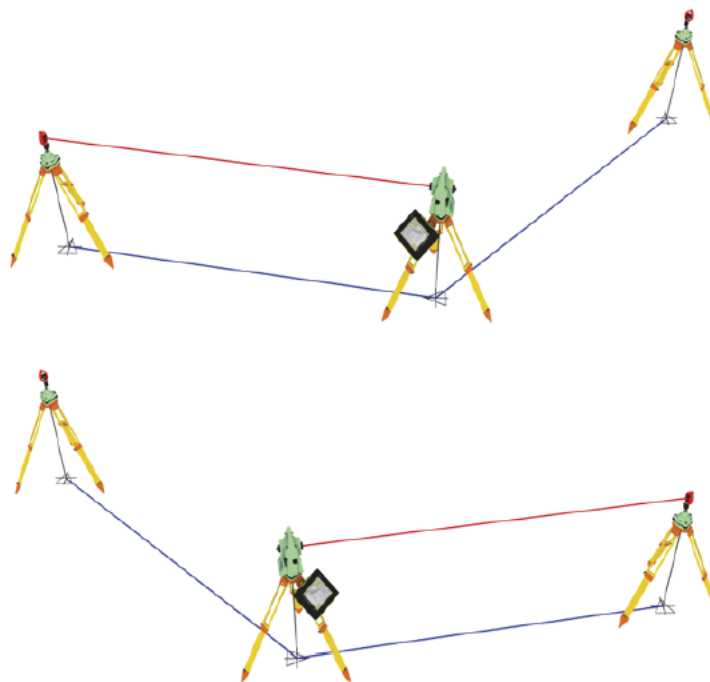
- β_i - angolo orizzontale misurato in senso orario, formato dai segmenti $\overrightarrow{P_i P_{i-1}}$ e $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$
- $\lambda_{i,i-1}$ - lettura al cerchio orizzontale con lo strumento su P_i ed osservando P_{i-1} (lettura indietro)
- $\lambda_{i,i+1}$ - lettura al cerchio orizzontale con lo strumento su P_i ed osservando P_{i+1} (lettura avanti)



Passo di poligonale

Come si è detto, la poligonale è un metodo di rilevamento iterativo che coinvolge, ad ogni reiterazione, tre vertici: punto indietro, punto di stazione e punto avanti. L'insieme delle misure effettuate sul punto indietro e su quello avanti viene definito ***passo di poligonale***.

1. dal punto di stazione effettuo misure angolari e di distanza verso il punto indietro
2. dal punto di stazione effettuo misure angolari e di distanza verso il punto avanti



Le quantità misurate

Come già detto, per poter dar inizio al primo passo di poligonale, supponiamo che le coordinate dei punti P_i e P_{i+1} siano note. Da questa conoscenza posso ricavare l'angolo di direzione $\alpha_{i,i-1}$ (come spiegato nella lezione precedente).

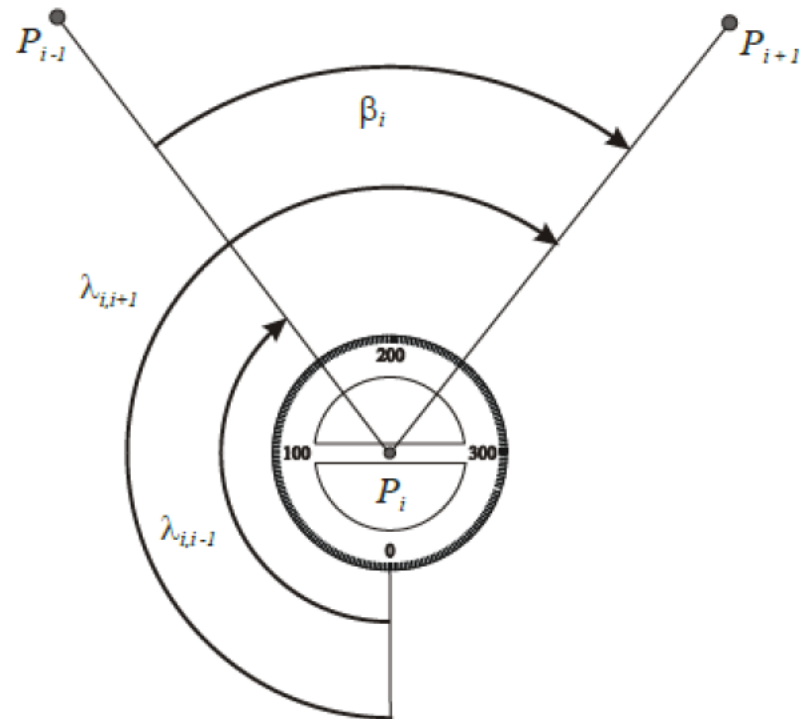
Quali quantità vengono misurate?

- dall'osservazione del punto indietro P_{i-1} si ricavano: $\lambda_{i,i-1}$ (lettura al cerchio orizzontale) e $d_{i,i-1}^*$ (distanza inclinata)
- dall'osservazione del punto avanti P_{i+1} si ricavano: $\lambda_{i,i+1}$ (lettura al cerchio orizzontale) e $d_{i,i+1}^*$ (distanza inclinata)

Angolo interno - 1

Un'altra convenzione da fissare riguarda l'angolo interno β_i , formato dai segmenti $\overrightarrow{P_i P_{i-1}}$ e $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$, in quanto vi sono due possibili candidati.

La scelta adottata per **convenzione** è quella **oraria**, dunque β_i è l'angolo che il segmento indietro $\overrightarrow{P_i P_{i-1}}$ descriverebbe se ruotasse in senso orario fino a sovrapporsi al segmento avanti $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$.

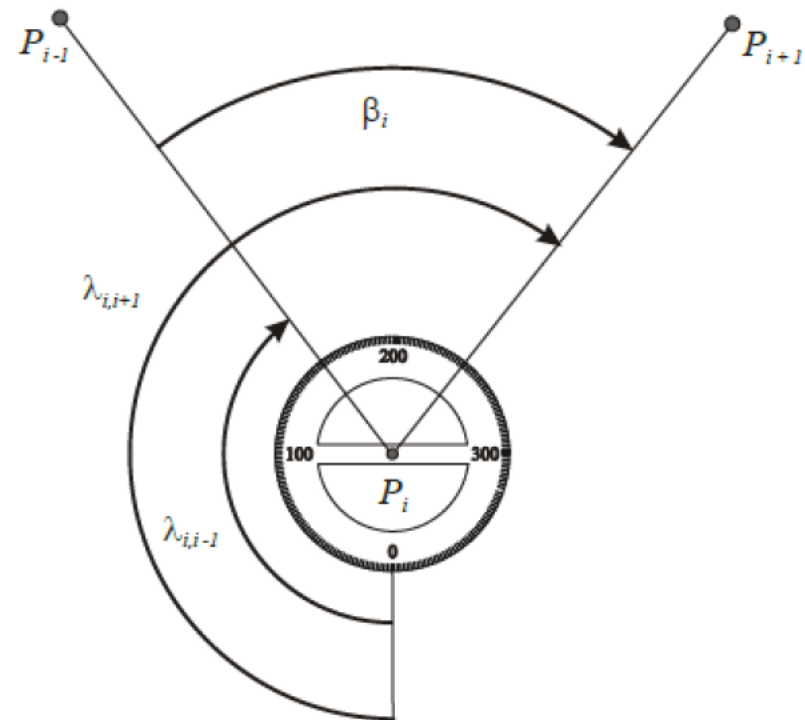


Angolo interno - 2

La convenzione oraria è adottata dalla stragrande maggioranza degli strumenti topografici attuali, che dispongono appunto di goniometri orari.

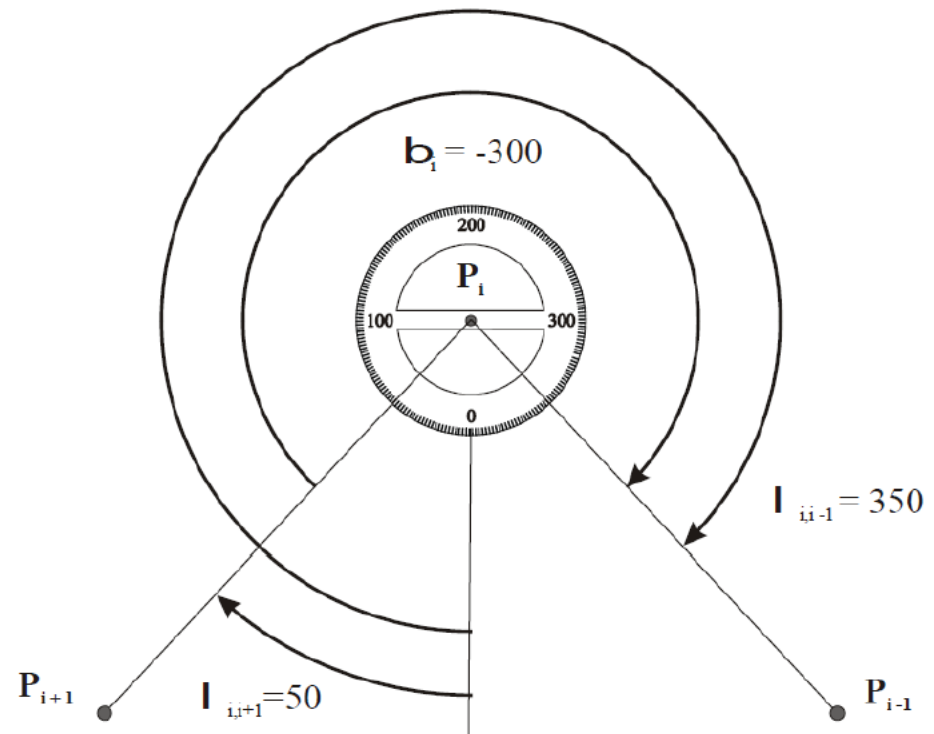
Nel quadro delle convenzioni fissate, per l'angolo interno e per il goniometro degli strumenti, l'angolo interno β_i può essere ottenuto da:

$$\beta_i = \lambda_{i,i+1} - \lambda_{i,i-1}$$



Casi possibili

La particolare posizione dell'origine del goniometro può portare ad un angolo negativo, che deve essere normalizzato.

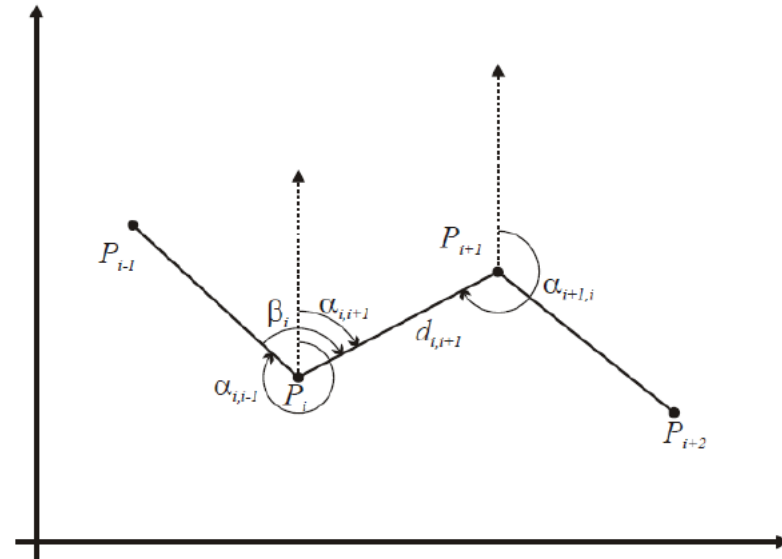


Angolo di direzione del segmento avanti

Noto β_i , si può ricavare l'angolo di direzione $\alpha_{i,i+1}$ come:

$$\alpha_{i,i+1} = \alpha_{i,i-1} + \beta_i$$

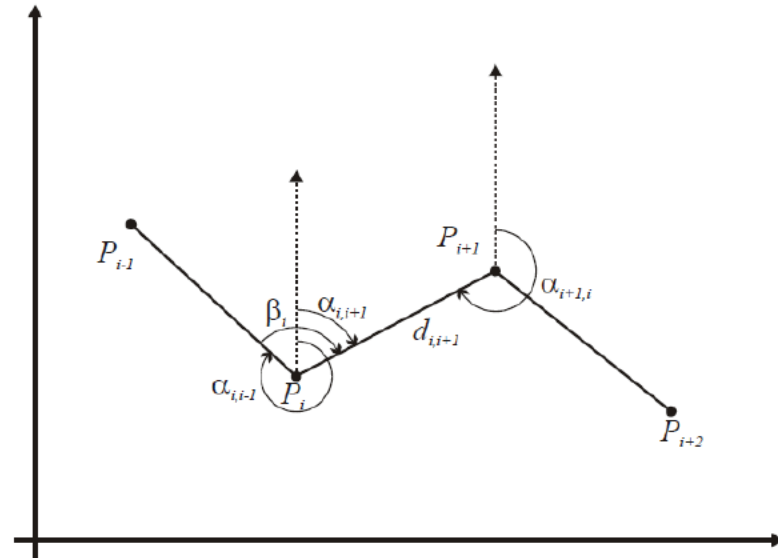
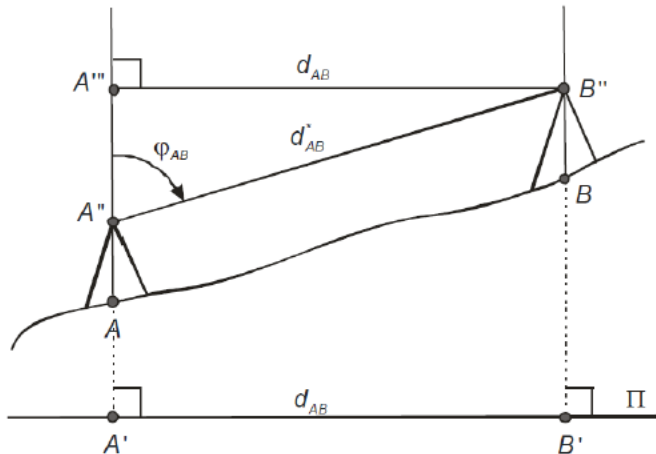
Anche $\alpha_{i,i+1}$ potrebbe richiedere la normalizzazione.



Distanza topografica rispetto al punto avanti

Ricordando lo schema visto nella lezione precedente, la distanza topografica rispetto al punto avanti viene calcolata come:

$$d_{i,i+1} = d_{i,i+1}^* \sin \varphi_{i,i+1}$$

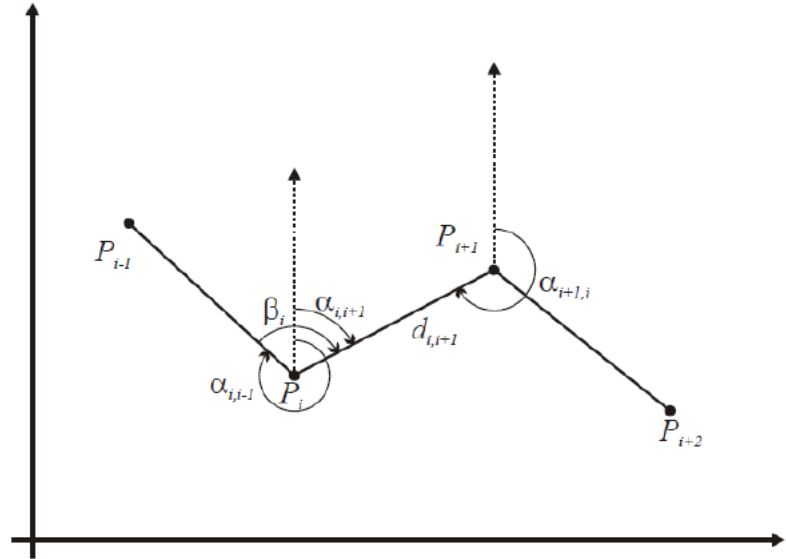


Determinazione delle coordinate del punto avanti

Ora che le componenti polari $(\alpha_{i,i+1}, d_{i,i+1})$ del punto avanti P_{i+1} , rispetto a P_i , sono note, è possibile ricavare quelle cartesiane come:

$$x_{i+1} = x_i + d_{i,i+1} \cdot \sin \alpha_{i,i+1}$$

$$y_{i+1} = y_i + d_{i,i+1} \cdot \cos \alpha_{i,i+1}$$



Le formule presentate fanno riferimento al generico punto i -esimo per sottolineare come esse possano essere adottate ripetutamente e identicamente per calcolare progressivamente i punti P_3 , P_4 , P_5 , eccetera.

Poligonale 2D

Le formule:

$$x_{i+1} = x_i + d_{i,i+1} \cdot \sin \alpha_{i,i+1}$$

$$y_{i+1} = y_i + d_{i,i+1} \cdot \cos \alpha_{i,i+1}$$

risolvono il problema della determinazione planimetrica del punto P_{i+1} .

Con i dati misurati durante il rilievo della poligonale è possibile determinare anche la componente altimetrica del punto P_{i+1} partendo dalla conoscenza della quota di P_i .